



(Ver Desde Madrid: Congreso Internacional de Matemáticos, ICM 2006, p. 105)

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XIII, Número 1, Año 2006

I.S.S.N. 1315-4125

Editor

Argimiro Arratia

Comité Editorial

Oswaldo Araujo Eduardo Lima de Sá

Alejandra Cabaña Gerardo Mendoza Joaquín Ortega

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Carlos A. Di Prisco

Capítulos Regionales

CAPITAL

Carlos A. Di Prisco, Matemáticas, IVIC
cdiprisc@ivic.ve

LOS ANDES

Oswaldo Araujo, Matemáticas, ULA
araujo@ciens.ula.ve

ZULIA-FALCON

Fernando Sánchez, Matemáticas, LUZ
fsanchez@luz.ve

CENTRO-OCCIDENTAL

Neptalí Romero
nromero@uicm.ucla.edu.ve

Matemáticas, UCLA

ORIENTE

Said Kas-Danouche
skasdano@sucre.udo.edu.ve
Matemáticas, UDO

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet o escribir a su dirección postal.

Asociación Matemática Venezolana

Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela

amv@usb.ve <http://amv.ivic.ve/>

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041 – A, Venezuela

**Boletín
de la
Asociación
Matemática
Venezolana**

Vol. XIII • No. 1 • Año 2006

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XIII, Número 1, Año 2006

ARTÍCULOS

- An exposé on discrete Wiener chaos expansions**
Henryk Gzyl **3**
- Intuitionistic Fuzzy θ -Closure Operator**
I. M. Hanafy, A. M. Abd El-Aziz & T. M. Salman **27**
- A semi-discrete high resolution scheme for nonlinear scalar conservation laws**
Yousef Hashem Zahran **41**

EDUCACIÓN

- La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica**
J. M. Sigarreta, J. M. Rodríguez & P. Ruesga **53**

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

- La integral de Lebesgue un poco más de cien años después**
Diomedes Bárcenas **67**
- ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo?**
Douglas Jiménez **87**

INFORMACIÓN INTERNACIONAL

- Desde Madrid: Congreso Internacional de Matemáticos, ICM 2006**
Argimiro Arratia **105**
- La Esquina Olímpica**
Rafael Sánchez Lamonedá **109**

An exposé on discrete Wiener chaos expansions

Henryk Gzyl

Abstract

In this note we review and compare different versions of expansions in discrete Wiener chaos. We relate these expansions to the Rota-Wallstrom combinatorial approach to stochastic integration and to extended Haar systems. At the end we present some simple applications.

1 Preliminaries

Discrete stochastic calculus has seen a revival during the last decade or so, and several lines of work have been developed. We can begin tracing them with the very short note [M] by Meyer, in which he made use of ideas already proposed Kroecken in [K] to prove that for a Markov chain $(\{X_n\}_{n \leq N}, \Omega, \{\mathcal{F}_n\}_{n \leq N}, P)$ every $H \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ has an expansion in an appropriate Wiener chaos associated to the chain. These ideas were very much extended by Privault and Schoutens in [PS]. From a seemingly unrelated direction comes the work by Holden, Lindstrøm, Øksendal and Ubøe see [HLOU-1] and [HLOU-2] in which the role of the Wick product is emphasized, and see as well the note by Leitz-Martini [L-M] who filled in the proofs in these papers and nicely filled in a gap in the relationship between discrete Brownian motion and discrete white noise.

From still another direction, comes the work by Feinsilver and Schott, see [F], [FS-1] and [FS-2] in which the relationship between discrete exponential martingales related to Bernoulli and other random flights and Krawtchouk polynomials is explored. Along these lines falls the note by Akahori [A]. And there is still another line of work, explored by Biane in [B], in which a chaotic representation for finite Markov chains is obtained. A last-but-not-least loose strand is the combinatorial approach to repeated integration by Rota and Wallstrom [RW].

Our aim here is to find an underlying thread through all of these papers. Since there are several different frameworks, we shall present results that capture the essence of those papers in such a way that comparisons and relationships can be made. This paper is organized as follows. In the remainder of this section the basic assumptions and notations are introduced. In sections 2 and 3 the basic discrete exponential martingale is explored from two points of view,

and the expansion in Krawtchouk polynomials is used as a stepping stone for the expansions in discrete chaos. Section 4 is devoted to a discrete version of the work by Biane and section 5 is devoted to a very rapid review of the combinatorial approach to iterated integration of Rota and Wallstrom, which should eventually provide the common framework unifying the different expansions in discrete chaos. Section 6 is devoted to a version of the Clark-Ocone formula and in section 6 we show that the Walsh functions are an extended Haar system in the sense of Gundy. To finish we present a list of simple examples.

We shall consider a time homogeneous Markov chain $(\{X_n\}_{n \leq N}, \Omega, \{\mathcal{F}_n\}_{n \leq N}, P)$ with state space either a finite set $S \subset \mathbb{R}$ or a lattice on the real line. In the first case we shall assume that either $P(X_1 = s_j | X_0 = s_i) > 0$ for any i, j as in Meyer or either $P_{ij} = P(X_1 = s_j | X_0 = s_i) > 0$ only for $i \neq j$. Now and then we shall use the interval notation $[1, N] = \{1, \dots, N\}$.

When the state space is a lattice in the real line, we shall assume that the chain is generated in the usual way from a sequence of i.i.d. finite random variables $\{\xi_n | n \geq 1\}$ defined on a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) such that ξ_1 takes values in the set $\{0, \pm h, \pm 2h, \dots, \pm Kh\}$ or in the set $\{\pm h, \pm 2h, \dots, \pm Kh\}$. The corresponding chain is described by $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k$. Also, throughout we shall consider a finite time horizon N . In this fashion our set up sits in between that used in [M], [PS], [FS-2] and [HLOU]. The essential assumption is that the cardinality of the set $\{s \in S | P(X_1 = s | X_0 = s') > 0\} = d$ is constant for all $s' \in S$. This simplifies the notation considerably.

A basic construct both in [M] and [PS] is contained in the simple

Lemma 1.1 *Let X_n be a Markov chain with state space S . For each $s \in S$ there is a family of polynomials $\phi_s^l : S \rightarrow \mathbb{R}$ for $l = 0, 1, \dots, d-1$ such that*

- i) The $\phi_s^l(s')$ are of degree l in $s' \in S$, and $\phi_s^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$.*
- ii) They are orthogonal with respect to $P_{ss'} = P(X_1 = s | X_0 = s')$, that is*

$$\sum_t \phi_s^l(s') \phi_s^k(s') P_{ss'} = E[\phi_{X_0}^l(X_1) \phi_{X_0}^k(X_1)] = \delta_{lk}. \quad (1)$$

Proof. Is simple. For $s \in S$ consider $\{t^k | t \in S, t \neq s\}$. Since the Vandermonde matrix has a non-null determinant, these determine independent vectors in \mathbb{R}^d , and an application of the Gram-Schmidt procedure with respect to the scalar product $\langle x, y \rangle_s := \sum_{t \neq s} x_t y_t P_{st}$ yields the desired conclusion.

Comments. Note that the ϕ_s^l are orthogonal to $\phi_s^0 = 1$. This implies that the processes $\phi_{X_{k-1}}^l(X_k)$ are martingales.

The variation on this theme corresponding to the case considered by [FS-1], [HLOU-2] and [L-M] is even simpler, for now the ϕ_s^l are independent of s , which is due to the fact that $P(X_n = t | X_{n-1} = s) = P(\xi_n = t - s)$. The analogous result is

Lemma 1.2 *Let X_n be a Markov chain generated by an i.i.d. sequence $\{\xi_n\}$. There is a family of polynomials $\phi^l : S \rightarrow \mathbb{R}$ for $l = 0, 1, \dots, d-1$ such that*

i) The $\phi^l(t)$ are of degree l in $t \in S$, and $\phi^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

ii) They are orthogonal with respect to $P(s) = P(\xi_1 = s)$, that is

$$\sum_t \phi^l(s) \phi^k(s) P(s) = E[\phi^l(\xi_1) \phi^k(\xi_1)] = \delta_{lk}. \quad (2)$$

Comment. The case considered by [FS-1] concerns only (the non-normalized) version of $\phi^1(s) = s - E\xi_1$. Similarly, [HLOU-2] and [L-M] consider $\{\xi_1 = \pm 1\}$ only.

We should also mention the elegant presentation by Emery in [E-1] and [E-2]. His setup is a bit more general, and his emphasis is on different issues. He considers a process $X = (\Omega, \mathcal{F}_{n \in \mathbb{Z}}, X_{n \in \mathbb{Z}}, P)$ (which he calls a “novation”) such that

$$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0 \quad \text{and} \quad E[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] = 1$$

He explores, among other things, the connection between the predictable representation property and the chaotic representation property. An important difference is that for his purpose, he has to consider \mathbb{Z} as time index set.

2 Exponential martingales and Krawtchouk-like polynomials

What comes up next mimics the usual procedure employed to relate the exponential martingales associated with Brownian motion to the Hermite polynomials. Here we shall follow the lead of Feinsilver who relates Krawtchouk polynomials to the discrete version of the exponential martingale. But it will not be until we introduce Wick products that we shall understand why the discrete exponential martingale is the same thing as the continuous exponential martingale.

Definition 2.1 *For $z = (z_1, \dots, z_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, not all z_i vanishing simultaneously, and $\tau \in \mathbb{R}$ define*

$$\mathcal{E}_n(z, \tau) = \prod_{k=1}^n (1 + \tau Z_k) \quad (3)$$

where τ will play the role of a placeholder or accounting device and where

$$Z_k = \sum_{j=1}^{d-1} z_j \phi_{X_{k-1}}^j(X_k) \quad \text{or} \quad Z_k = \sum_{j=1}^{d-1} z_j \phi^j(\xi_k) \quad (4)$$

The following is a simple consequence of property (ii) of the definition of the ϕ 's.

Lemma 2.1 *The process $\{\mathcal{E}_n \mid 1 \leq n\}$ is a martingale with respect to each $P^s = P[\cdot \mid X_0 = s]$.*

Now, let us fix the time horizon at N and notice that

$$\mathcal{E}_N(z, \tau) = \sum_{n=0}^N \tau^n \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \prod_{i=1}^n Z_{k_i}$$

and here the account keeping role of τ becomes clear. We may drop it at any time. Clearly,

$$\prod_{i=1}^n Z_{k_i} = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{d-1} z_j \phi_{X_{k_i-1}}^j(X_{k_i}) \right) = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n z_{j_i} \phi_{X_{k_i-1}}^{j_i}(X_{k_i})$$

and similarly for the i.i.d. case we have

$$\prod_{i=1}^n Z_{k_i} = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{d-1} z_j \phi^j(\xi_{k_i}) \right) = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n z_{j_i} \phi^{j_i}(\xi_{k_i})$$

where in both cases $(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, d-1\}^n$, and in analogy with the expansion of the standard exponential martingale in terms on Hermite polynomials, we can write

$$\mathcal{E}_N(z, \tau) = \sum_{n=0}^N \tau^n H_n(z)$$

where either

$$\begin{aligned} H_n(z) &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n z_{j_i} \phi_{X_{k_i-1}}^{j_i}(X_{k_i}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \left(\prod_{i=1}^n z_{j_i} \right) H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n) \end{aligned}$$

and for the case of independent increments, the analogous expression is

$$\begin{aligned} H_n(z) &= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \prod_{i=1}^n z_{j_i} \phi^{j_i}(\xi_{k_i}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \left(\prod_{i=1}^n z_{j_i} \right) H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n) \end{aligned}$$

We also have:

Lemma 2.2 *The family of polynomials*

$$\left\{ \prod_{i=1}^n z_{j_i} \phi_{X_{k_{i-1}}}^{j_i}(X_{k_i}) \mid 1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N; (j_1, \dots, j_n) \in [1, d-1]^n, n \geq 1 \right\}$$

and correspondingly, the family

$$\left\{ \prod_{i=1}^n z_{j_i} \phi^{j_i}(\xi_{k_i}) \mid 1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N; (j_1, \dots, j_n) \in [1, d-1]^n, n \geq 1 \right\}$$

is orthonormal and complete in $L_2(P^s)$ for any $s \in S$.

Proof Proceeds by induction on n based on the orthonormality properties of the ϕ_i^j (or correspondingly the ϕ^j). It all hinges on the fact that when the products are different, there will always be a factor of the type $\phi_{X_{k-1}}^j(X_k)$ for which

$$E^s[\phi_{X_{k-1}}^j(X_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}] = E^{X_{k-1}}[\phi_{X_{k-1}}^j(X_1)] = 0$$

for any $1 \leq j \leq d-1$. And clearly a similar argument holds for the i.i.d. case. *Comment.* When the time horizon is N , we can identify Ω with $\{\omega : [1, N] \rightarrow S\}$ and $L_2(P)$ with \mathbb{R}^M with $M = d^N$ with a conveniently defined scalar product. What matters here is that there are $\sum_{n=1}^N \binom{N}{n} (d-1)^n$ polynomials $H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n)$, and adding $\phi_s^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ to the list, we end up with $((d-1)+1)^N = d^N$ orthogonal polynomials. Thus they span $L_2(P)$. This is Meyer's argument.

Corollary 2.1 *With the notations introduced above, we have*

$$\mathcal{E}(z, \tau) = \sum_{n=0}^N \tau^n \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \left(\prod_{i=1}^n z_{j_i} \right) H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n).$$

Comment. This is the analogue to the expansion of $\exp(\tau B(T) - \tau^2 T/2)$ in terms of Hermite polynomials. More about this correspondence in the next section. Now that we have identified a candidate for a basis, we can extend the previous lemma to

Proposition 2.1 *Let s be any point in S and $Z \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_N, P^s)$. Then*

$$Z = E^s[Z] + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq N} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} E[Z H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n)] H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n) \quad (5)$$

is the expansion of Z in discrete X -chaos.

Comment. Clearly a similar result can be formulated for random variables in terms of direct sums of products of the type $L_2(\Omega_1, P_1) \otimes \dots \otimes L_2(\Omega_m, P_m)$ corresponding to the physicists' multi-particle expansions.

To obtain the predictable representation property from the chaotic representation property, it suffices to have in mind the following

Lemma 2.3 *Let $Z \in L_2(\Omega, P^s)$, $s \in S$. If $Z \in \mathcal{F}_m$ for some fixed $m < N$, then*

$$Z = E^s[Z] + \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} E[ZH(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n)]H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n) \quad (6)$$

Proof It suffices to note that any $H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n)$ such that for some k_i on we have $m < k_i < \dots < k_n \leq N$, satisfies $E^s[H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n) | \mathcal{F}_m] = 0$. This in turn follows from the definition of $H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n)$ and lemmas (1.1)-(1.2), that is on the fact that, for example, for any $k > m$ we have $E^s[\phi_{X_{k-1}}^j(X_k) | \mathcal{F}_m] = 0$.

Corollary 2.2 *With the same notation as above, for any $1 \leq m \leq N$,*

$$E[Z | \mathcal{F}_m] = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} \sum_{(j_1, \dots, j_n)} E[ZH(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n)]H(k_1, j_1, \dots; k_n, j_n)$$

The following is now a simple consequence of the previous lemma. It asserts that the chaos representation property follows from the predictable representation property.

Proposition 2.2 *Let $\{M_n | 0 \leq n \leq N\}$ be an $(\Omega, \mathcal{F}_n, P^s)$ -martingale, $s \in S$. Then there exist processes $\{Z_n^j | 1 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq d-1\}$, which are previsible, (i.e. $Z_n^j \in \mathcal{F}_{n-1}$) such that*

$$M_n = M_{n-1} + \sum_j Z_n^j \phi_{X_{n-1}}^j(X_n)$$

or the corresponding version for the process with i.i.d. increments

$$M_n = M_{n-1} + \sum_j Z_n^j \phi^j(\xi_n).$$

Proof It consists in isolating the last term in (6) and appropriately identifying the Z_n^j 's.

Let us now examine an interesting property of the martingales associated to the polynomials $\phi_y^j(x)$. Let us put

$$Z_0^j = 0, \quad \text{and} \quad Z_n^j = \sum_{i=1}^n \phi_{X_{i-1}}^j(X_i).$$

An elementary computation confirms

Lemma 2.4 *The $\{\{Z_n^j | 0 \leq n \leq N\} | 1 \leq j \leq d-1\}$ is a collection of mutually orthogonal martingales. That is, for different i, j , $\{Z_n^i Z_n^j | 1 \leq n \leq N\}$ is a P^s -martingale for each s .*

But more interesting is

Proposition 2.3 *The collection $\{\{Z_n^j | 0 \leq n \leq N\} | 1 \leq j \leq d-1\}$ is a linearly independent collection.*

Proof It suffices to verify that if a_j are constants, then if for any $n \geq 1$ the sum $\sum_{j=1}^{d-1} a_j \Delta Z_n^j = 0$, then the coefficients a_j all vanish. But this is a trivial consequence of the orthogonality of the polynomials with respect to $P^s[\cdot | \mathcal{F}_{n-1}]$.

This means that the orthogonal projections onto the linear subspace of $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P^s)$

$$\mathcal{M} := \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{d-1} a_k^j \Delta Z_k^j \mid \{a_k^j | 1 \leq k \leq N\} \text{ predictable } 1 \leq j \leq d-1; n \leq N \right\}$$

are unique. This and proposition 2.2 round up the issues associated with the representation problem. Let us close this section by briefly particularizing the above results.

The simplest case corresponds to the case of simple random walks. This is the case considered in [HLOU-2] and [L-M]. We have $X_n = X_0 + \sum_1^n \xi_k$ with $P(\xi_k = \pm 1) = 1/2$. The orthogonal basis associated to P has two vectors: $\phi^0(s) = 1$ and $\phi^1(s) = s$ and the discrete exponential martingale is $\mathcal{E}(z) = \prod_1^n (1 + z\xi_k)$. This can be rewritten as

$$\mathcal{E}_N(z) = (1+z)^{\sum \xi_k} (1-z)^{N-\sum \xi_k} = \sum_{n=0}^N z^n K_n(\sum \xi_k)$$

which is the usual expansion of $\mathcal{E}_N(z)$ in terms of Krawtchouk polynomials.

The other simple chain process with i.i.d. increments corresponds to taking $\xi_k \in \{0, \pm h, \dots, \pm hK\}$ with probabilities $p_0 = P(\xi_1 = 0), \dots, p_K = P(\xi_1 = \pm hK)$. (Certainly this is not mandatory, but it makes the state space of $X_n = X_0 + \sum \xi_k$ a lattice in \mathbb{R}). Also, if $\phi^j(s)$ are the polynomials described in section 1, clearly $\phi^1(s) = s/\sigma$, where $\sigma^2 = \text{Var}(\xi)$. To relate to the results in [FS1] we consider $\mathcal{E}_n(z) = \prod_1^n (1 + z\phi^1(\xi_k))$. Introducing (the number of times each step

is taken) $n(\pm hk) = \sum_{j=1}^N I_{\{\pm hk\}}(\xi_j)$, then

$$\mathcal{E}(z) = \prod_{j=1}^K \left(1 + \frac{z}{\sigma} h_j\right)^{n(jh)} \left(1 - \frac{z}{\sigma} h_j\right)^{n(-jh)} = \sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{\sigma}\right)^n K_n(n(\pm 1), \dots, n(\pm hk))$$

where the polynomials K_n are now related to Lauricella polynomials. See [FS] for more about this. An interesting related question also considered by Feinsilber, see [F] for instance: When are the polynomials K_n iterated integrals? The answer is: they are iterated integrals only when the variables ξ_n are of Bernoulli type. This fact relates to similar results obtained in [E2] and [PS].

3 Wick products, exponential martingales, and repeated integrals

Let us now examine in what sense the $\mathcal{E}(z, \tau)$ introduced in the previous section is an exponential martingale. What comes up next is an amplification of a side remark in [HLOU-2] that shows part of the relevance of Wick products in probability theory, in particular that the Wick exponential $e^{\diamond Z}$ of a Gaussian variable Z is given by $e^{Z - \|Z\|^2/2}$.

In order to easily relate the results of different authors, we shall consider the case of processes with i.i.d. increments and begin with

Definition 3.1 Let ϕ_s^j be the polynomials defined in Lemma 1.2. Let $\{k_i, j_i \mid 1 \leq i \leq n \text{ and } 1 \leq j_i \leq d-1\}$, and $\{l_i, j_i \mid 1 \leq i \leq m \text{ and } 1 \leq j_i \leq d-1\}$ be two sets of indices. We assume that the first indices are all different whereas there may be repetitions among the second indices. The Wick product of $\prod_{i=1}^n \phi^{j_i}(\xi_{k_i})$ and $\prod_{t=1}^m \phi^{j_t}(\xi_{l_t})$ is defined by

$$\prod_{i=1}^n \phi^{j_i}(\xi_{k_i}) \diamond \prod_{t=1}^m \phi^{j_t}(\xi_{l_t}) = \prod_{i=1}^n \phi^{j_i}(\xi_{k_i}) \prod_{t=1}^m \phi^{j_t}(\xi_{l_t}) \quad (7)$$

whenever $\{k_1, \dots, k_n\} \cap \{l_1, \dots, l_m\} = \emptyset$ or equal to 0 otherwise, independently of the superscripts.

Comment. Note that with this definition, for example, $\prod_{i=1}^n \phi^{j_i}(\xi_{k_i}) = \phi^{j_1}(\xi_{k_1}) \diamond \dots \diamond \phi^{j_n}(\xi_{k_n})$.

Proposition 3.1 Consider the sequence $\{c_{n,j} \mid n \geq 1, 1 \leq j \leq d-1\}$ such that $\sum_{n,j} |c_{n,j}|^2 < \infty$. Define the process Z by setting $Z_0 = 0$ and $Z_n =$

$$\sum_{m \leq n} \sum_{j=1}^{d-1} c_{m,j} \phi^j(\xi_m). \text{ Also, write } Z_n = \sum_{k=1}^n \Delta Z_k \text{ where } \Delta Z_k = \sum_{j=1}^{d-1} c_{k,j} \phi^j(\xi_k).$$

Then

i) $\Delta Z_k \diamond \Delta Z_l = 0$ whenever $k = l$.
 ii) For every $n \geq 1$ and $1 \leq N$, $Z_n^{\diamond N} = 0$ whenever $N > n$, and when $N \leq n$ the recurrence $Z_n^{\diamond N} = N \sum_{k=1}^n Z_{k-1}^{\diamond(N-1)} \Delta Z_k$ holds.

$$\text{iii) } \exp^{\diamond}(Z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{Z_n^{\diamond N}}{N!} = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta Z_k)$$

Comment. It now appears that the name “exponential martingale” assigned to equation (3) is fully justified from two different points of view.

Proof (i) The identity $\Delta Z_k \diamond \Delta Z_l = 0$ whenever $k = l$ follows from the definition of Wick product. If we rewrite it as $\Delta Z_k \diamond \Delta Z_l = \Delta Z_k \Delta Z_l (1 - \delta_{kl})$ we readily obtain

$$Z_n^{\diamond 2} = 2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k-1} \Delta Z_j \right) \Delta Z_k = \sum_{k=1}^n Z_{k-1} \Delta Z_k$$

This remark is just the first inductive step in the proof of (ii) by induction on N . By definition

$$Z_n^{\diamond N} = \sum_{\{k_1, \dots, k_N\}}^* \prod_{i=1}^N \Delta Z_{k_i}$$

where Σ^* denotes the sum over the collection of all subsets of $\{1, \dots, n\}$ with N elements. Notice that when $N > n$ this collection is empty, and therefore we set the sum equal to 0. Re-ordering the factors of each term in the sum, we obtain

$$Z_n^{\diamond N} = N! \sum_{k_1 < \dots < k_N} \prod_{i=1}^N \Delta Z_{k_i}$$

or equivalently

$$Z_n^{\diamond N} = N \sum_{k=1}^n Z_{k-1}^{\diamond(N-1)} \Delta Z_k$$

and the reader should not forget that actually the summation has a smaller range due to the fact that $Z_n^{\diamond N} = 0$ whenever $N > n$.

To obtain (iii) is now just a computation. Let us set $M_n = \exp^{\diamond}(Z_n)$. Thus

$$M_n = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{Z_n^{\diamond N}}{N!} = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(N-1)!} \sum_{j=1}^n Z_{j-1}^{\diamond(N-1)} \Delta Z_j$$

which after interchanging the summations becomes $\sum_{j=1}^n \exp^{\diamond}(Z_{(j-1)}) \Delta Z_j$. Clearly

this implies that $M_n = M_{n-1} + M_{n-1}\Delta Z_n$ which after a simple iteration becomes $M_n = \exp^\diamond(Z_n) = \prod_{j=1}^n (1 + \Delta Z_j)$.

4 Martingales associated with jumps of discrete Markov chains

Let us assume as in section 1 that the state space is a lattice in the real line and that the increments of the chain are in $S = \{0, \pm h, \dots, \pm Kh\}$. What really matters for us now is that the cardinality of $\{s \in S \mid P(X_1 = s \mid X_0 = s') > 0\} = d$ for every $s' \in S$. If we set $T_1 = \min\{n : X_n \neq X_0\}$ then the following are well known results

$$P^s(T_1 = k) = p_{ss}^{k-1}(1 - p_{ss}), \quad P^s(T_1 > 1) = p_{ss}$$

and

$$P^s(T_1 > n + k \mid T_1 > k) = P^s(T_1 > n).$$

For $a \neq 0$ consider the following compensated sum of jumps

$$J_n^a = \sum_{k=1}^n \{I_{\{X_n = X_{n-1} + a\}} - p(X_{n-1}, X_{n-1} + a)\}, \quad J_0^a = 0$$

where for notational convenience we use $p(s, s')$ instead of $p_{s,s'}$. Since for any $s \in S$, $E^s[(I_{\{X_n = X_{n-1} + a\}} - p(X_{n-1}, X_{n-1} + a)) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$, clearly $\{J_n^a \mid 1 \leq n \leq N\}$ is a P^s -martingale for every a . But since we are in discrete time we have for $s \in S$

$$E^s[(\Delta J_n^a)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = p(X_{n-1}, X_{n-1} + a)(1 - p(X_{n-1}, X_{n-1} + a))\sigma^2(X_{n-1}, a).$$

Therefore, if we set

$$M_0^a = 0 \quad \text{and} \quad M_n^a = \sum_{k=1}^n \sigma^{-1}(X_{n-1}, a)\Delta J_k^a$$

then $\{M_n^a \mid 1 \leq n \leq N\}$ is a P^s -martingale for any $s \in S$ such that $E^s[(\Delta M_n^a)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 1$. Regretfully in discrete time the M^a are not orthogonal, but nevertheless we have

Proposition 4.1 *With the notations introduced above, for every $a \in S$, the collection*

$\{J_n^a \mid a \neq 0, 1 \leq n \leq N\}$ is linearly independent.

Proof It suffices to verify that if the real numbers $\{\alpha_a \mid a \neq 0\}$ are such that $\sum_{a \neq 0} \alpha_a \Delta J_n^a = 0$ then $\alpha_a = 0$ for each $a \neq 0$. Think of α_a as the values of a function $A(X_n)$ (just set $A(X_n) = \alpha_a$ on $\{X_n = X_{n-1} + a\}$) and rewrite the last identity as $A(X_n) - E^s[A(X_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$. This means that the random variable $A(X_n)$ is constant $= \alpha_0$. To find the constant note that

$$\alpha_0 = \alpha_0 \sum_{a \neq 0} P^s[X_n = X_{n-1} + a \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \alpha_0(1 - p(X_{n-1}, X_{n-1}))$$

which, due to our assumption, implies that $\alpha_0 = 0$.

Comment. This shows that when $p(s, s) = 0$ for all s , then $\sum_{a \neq 0} \Delta J_n^a = I_{\{X_n = X_{n-1}\}} = 0$, that is the martingales J^a are not linearly independent.

Let us now examine some discrete time stochastic difference equations satisfied by X . Let $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded Borel-measurable function (but we shall only need the values of g at a finite set of points), then observe that

$$\begin{aligned} g(X_n) - g(X_{n-1}) &= g(X_n) - g(X_{n-1}) - E^s[g(X_n) - g(X_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\quad + E^s[g(X_n) - g(X_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \sum_{a \neq 0} L_a g(X_{n-1}) \Delta M_n^a + A g(X_{n-1}) \end{aligned}$$

where the new symbols are defined by

$$L_a g(x) = \sigma(x, a)(g(x+a) - g(x)) \quad \text{and} \quad A g(x) = \sum_{a \neq 0} p(x, x+a)(g(x+a) - g(x)).$$

Even though the operator A coincides with that considered by Biane, the operator L_a does not. This is because we work in discrete time.

Consider now, for every $n \leq N$, the process $\{Y_k = P_{n-k}(X_k) \mid k \leq n\}$. Use the Markov property to rewrite it as $Y_k = E^{X_k}[g(X_{n-k})] = E^s[g(X_n) \mid \mathcal{F}_k]$ which specifies P as an operator and clearly shows that Y is a P^s -martingale for every s , and certainly $Y_n - Y_0 = \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1})$. Note now that for any $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} Y_k - Y_{k-1} &= P_{n-k} g(X_k) - P(P_{n-k} g)(X_{k-1}) \\ &= P_{n-k} g(X_k) - P_{n-k} g(X_{k-1}) - \\ &\quad \{P(P_{n-k} g)(X_{k-1}) - P_{n-k} g(X_{k-1})\} \\ &= \sum_{a \neq 0} (P_{n-k} g)(X_{k-1}) \Delta J_k^a \\ &= \sum_{a \neq 0} L_a (P_{n-k} g)(X_{k-1}) \Delta M_n^a \end{aligned}$$

from which we finally obtain

$$Y_n = g(X_n) = P_n(X_0) + \sum_{a \neq 0} \sum_{k=1}^n L_a(P_{n-k}g)(X_{k-1}) \Delta M_n^a.$$

This is the basic relationship from which Biane obtains the chaos representation property for M . To relate this to what we did in section 2, we should express the M^a 's in terms of the Z^a 's, but we shall not pursue this here.

5 Rota-Wallstrom combinatorial approach to stochastic integration

Even though Rota and Wallstrom do not bother about discrete chaos in [RW], that is, they do not verify which of their examples of iterated stochastic integrals provide a basis for the corresponding $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, they do present a very powerful and general theory of iterated stochastic integrals. Here we shall recall a few of their results worded as closely as possible to our setup.

We have considered iterated integrals in a very simple set: $[1, N] = \{1, \dots, N\}$ whereas they consider iterated integrals in very general sets (S, Σ) . To consider k -iterated integrals begin with the set $[1, N]^{[1, k]}$ on which the obvious σ -algebra is placed. What before we called ΔZ_k we shall now denote by ζ_k , that is, we will be given a process $\{\zeta_k \mid 1 \leq k \leq N\}$, which we use to define a measure on $[1, N]$ by setting $\zeta(A) = \sum_{k \in A} \zeta_k$. This certainly is both a stochastic integral on $[1, N]$ and a random measure (on $\mathcal{P}([1, N])$).

We also need to recall that to every $A \subset [1, N]^{[1, k]}$ and to every partition π of $[1, k]$ we have

$$\begin{aligned} A_{\geq \pi} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(n_1, \dots, n_k) \mid n_i = n_j \text{ if } i \sim_{\pi} j\} \\ A_{\pi} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(n_1, \dots, n_k) \mid n_i = n_j \text{ if and only if } i \sim_{\pi} j\} \end{aligned}$$

Now [RW] define the following two measures on $[1, N]^{[1, k]}$:

$$\begin{aligned} \zeta_{\pi}^k(A) &\stackrel{\text{def}}{=} (\otimes \zeta_{i \leq k})(A_{\geq \pi}) \\ \text{St}_{\pi}^k(A) &\stackrel{\text{def}}{=} (\otimes \zeta_{i \leq k})(A_{\pi}) \end{aligned}$$

which are related according to the fundamental (Proposition 1 in [RW])

Proposition 5.1 *The measures ζ_{π}^k and St_{π}^k are related as follows*

$$\begin{aligned} \zeta_{\pi}^k(A) &= \sum_{(\sigma \geq \pi)} \text{St}_{\pi}^k(A_{\geq \sigma}) \\ \text{St}_{\pi}^k(A) &= \sum_{\sigma \geq \pi} \mu(\pi, \sigma) \zeta_{\sigma}^k. \end{aligned}$$

Here $\sigma \geq \pi$ for two partitions means that every block of π is contained in some block of σ (or π is finer than σ) and μ denotes the Möbius function of the lattice of partitions of $[1, k]$. (The reader can check with Rota's [R] for the basics about Möbius functions.) When $\pi = \hat{0}$ is the finest partition (all of its blocks are the one point subsets of $[1, k]$), we have

Theorem 5.1 *With the notations introduced above*

$$\text{St}_{\hat{0}}^k(A) = \sum_{\sigma \geq \pi} \mu(\hat{0}, \sigma) \zeta_{\sigma}^k.$$

Comments. The measure $\text{St}_{\hat{0}}^k$ is called the stochastic measure of degree k , or the stochastic measure associated to $\{\zeta_k\}$. If $f : [1, N]^{[1, k]} \rightarrow \mathbb{R}$ is any function

$$\int f(n_1, \dots, n_k) \text{St}_{\hat{0}}^k(n_1, \dots, n_k)$$

is said to be the k -th iterated integral of f with respect to $\text{St}_{\hat{0}}^k$. This measure is easily seen to be symmetric. That is, if $\alpha : [1, k] \rightarrow [1, k]$ is any permutation of $[1, k]$, and we set

$$\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{(n_{\alpha(1)}, \dots, n_{\alpha(k)}) \mid (n_1, \dots, n_k) \in A\}$$

then $\text{St}_{\hat{0}}^k(\alpha(A)) = \text{St}_{\hat{0}}^k(A)$.

Comments. Consider a finite set $S = \{s_1, \dots, s_d\}$ of cardinality d , and let $\{\psi_s \mid s \in S\}$ be any collection of random variables indexed by S . Define a random measure on S by $\zeta(A) = \sum_{s \in A} \psi_s$. Then

$$\text{St}_{\hat{0}}^k(A^k) = \sum_{\{s_1, \dots, s_k\}} \prod_{j=1}^k \psi_{s_j}$$

the summation being over all subsets of S of size k , is the k -th iterated integral of ζ . Notice that for $k > d$, the integral should be set equal to zero, for there are no subsets of S of cardinality larger than d .

To understand $\text{St}_{\hat{0}}^k$ better, we recall that a set $A_1 \times \dots \times A_k$ is a triangular set whenever the A_i 's are pairwise disjoint sets. For any (and only for) triangular set $A_1 \times \dots \times A_k$, we put

$$\text{perm}(A_1, \dots, A_k) = \bigcup_{\alpha} \alpha(A_1 \times \dots \times A_k)$$

where the union turns out to be disjoint and obviously $\text{perm}(A_1, \dots, A_k)$ is symmetric.

Actually, these sets generate the σ -algebra of symmetric subsets of $[1, N]^{[1, k]}$. We have (Theorem 5 in [RW])

Theorem 5.2 *Given a measure associated to $\{\zeta_k\}$ on $[1, N]$ there is one and only one measure St_0^k on the symmetric sets of $[1, N]^{[1, k]}$ such that*

$$\text{St}_0^k(\text{perm}(A_1, \dots, A_k)) = k! \zeta(A_1) \dots \zeta(A_k).$$

Two other set functions associated to $\{\zeta_k\}$ and St_π^k introduced in [RW] are

Definition 5.1 *For every positive integer k , the k -th diagonal measure Δ_k associated to ζ , is the measure on $[1, N]$ given by*

$$\Delta_k(A) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_{\hat{1}}^k(A^{[1, k]}) = \text{St}_{\hat{1}}^k(A^{[1, k]})$$

where $\hat{1}$ is the partition of $[1, k]$ having only one block.

Comment. It is clear that the Δ_k are measures.

Definition 5.2 *With the notations introduced above, define the stochastic sequence of binomial type ψ_k to be the sequence of random set functions*

$$\psi_k(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{St}_0^k(A^{[1, k]}).$$

We complete this short tour through [RW] with two interesting results.

Theorem 5.3 *Let ψ_k be the sequence of binomial type associated to the process $\{\zeta_k\}$. If A and B are disjoint subsets of $[1, N]$, then*

$$\psi_k(A \cup B) = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \psi_j(A) \psi_{k-j}(B).$$

Theorem 5.4 *With the notations introduced above, we have, for $A \subset [1, N]$,*

$$\psi_n(A) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{(k-1)} \Delta_k(A) \psi_{n-k}(A).$$

A point of connection with the results of section 2 appears in Example K of [RW]. Consider now the random measure on $[1, N]$ associated to $\{\zeta_k - E[\zeta_1]\}$. If we put $\zeta(A) = \sum_{k \in A} (\zeta_k - e[\zeta_1])$ then $\psi_n(A) = K_n(A)$, the Krawtchouk polynomials mentioned in section 2. An easy way to see this was provided there as well. Consider

$$\prod_{k \in A} (1 + \tau(\zeta_k - e[\zeta_1])) = \sum_{n=0}^{|A|} \tau^n \sum_{\{i_j < \dots < i_n\}} \prod_{j=1}^n (\zeta_{i_j} - e[\zeta_1]) = \sum_{n=0}^{|A|} \tau^n K_n(\zeta - E[\zeta])$$

which displays $\psi_n(A)$ explicitly.

Comment. The $\psi_n(A)$ are, except for an $n!$ factor, the Wick products of the $\phi(A) = \psi_1(A)$.

6 Gradient, divergence and the Clark-Ocone formula: a variation on the theme

In this section we provide variations on the theme of discrete stochastic calculus. Something in between the presentations of [L-M] and [PS], but before that, let us settle some notational issues. We introduced in section 2 the basis vectors $H(k_1, j_1; \dots; k_n, j_n)$ for $L_2(\Omega, \mathcal{F}P)$, where $A = \{k_1 < \dots < k_n\}$ denotes some non-empty subset of $[1, N]$ and $(j_1, \dots, j_d) \in [1, d-1]^n$. Throughout this section we shall shorten this to $H(A, \mathbf{j}_A)$. We shall have to take out or add an element k from or to A , that is to form $A - \{k\}$ or $A \cup \{k\}$ which we simply denote $A - k$ and $A \cup k$. In these cases \mathbf{j}_{A-k} or (\mathbf{j}_{A-k}, i) will denote the tuple with an entry deleted or added at the obvious position. Let $e_k : [1, N] \rightarrow \{0, 1\}$ denote the basis vectors for the set $V \stackrel{\text{def}}{=} \{f : [1, N] \rightarrow \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^N$, by c the counting measure on $[1, N]$ and by $e_k \otimes H(A, \mathbf{j}_A)$ the standard basis for $L_2([1, N] \times \Omega, c \otimes P)$. With all these notations we state

Definition 6.1 For $1 \leq k \leq N$, $1 \leq j \leq d-1$, define $D_{k,j} : L_2(\Omega, P) \rightarrow L_2([1, N] \times \Omega, c \otimes P)$ by its action on basis vectors $H(A, \mathbf{j}_A)$

$$D_{k,j}(H(A, \mathbf{j}_A)) = \chi_{\{k \in A\}} \chi_{\{j_k = j\}} e_k \otimes H(A - k, \mathbf{j}_{A-k}), \quad \text{and } D_{k,j}(1) = 0 .$$

With this we define the mapping $D : L_2(\Omega, P) \rightarrow L_2([1, N] \times \Omega, c \otimes P)$ by linearity, that is, if $X = E[X] + \sum_{A, \mathbf{j}_A} X(A, \mathbf{j}_A) H(A, \mathbf{j}_A)$, then

$$D(X) = \sum_{k,j} \sum_{A, \mathbf{j}_A} X(A, \mathbf{j}_A) D_{k,j}(H(A, \mathbf{j}_A)) .$$

In the proof of Proposition 6.1 below we shall need the following computation expressing the action of $D_{k,j}$ on the coefficients of the expansion of X :

$$\begin{aligned} D_{k,j}(X) &= \sum_{A, \mathbf{j}_A} X(A, \mathbf{j}_A) \chi_{\{k \in A\}} \chi_{\{j_k = j\}} H(A - k, \mathbf{j}_{A-k}) \\ &= \sum_{A \cap \{k\} = \emptyset} \sum_{\mathbf{j}_A} X(A \cup k, (\mathbf{j}_A, j)) H(A, \mathbf{j}_A) . \end{aligned}$$

Comment. Formally speaking, this (and in the proof of Proposition 6.1) should be considered as the projection of $e_k \otimes L_2(\Omega) \subset L_2([1, N] \times \Omega)$ onto $L_2(\Omega, P)$. But adding more precision would make the statement of Proposition 6.1 needlessly cumbersome.

In our finite, discrete time setting there is no problem in identifying $V \in L_2([1, N] \times \Omega, c \otimes P)$ with a sequence $\{V_k \in L_2(\Omega, P) \mid k \in [1, N]\}$, and if V, W are two such vectors, their scalar product is $(V, W)_{L_2([1, N] \times \Omega)} = \sum_k (V_k, W_k)_{L_2(\Omega)}$. If we set

Definition 6.2 Define the divergence $\delta : L_2([1, N] \times \Omega, c \otimes P) \rightarrow L_2(\Omega)$ by its action on the basis elements by

$$\delta(e_k \otimes H(A, \mathbf{j}_A)) = \chi_{\{k \notin A\}} \sum_{i=1}^{d-1} H(A \cup k, (\mathbf{j}_A, i)) .$$

With these definitions and notations, we leave for the reader to verify that

Proposition 6.1 The operators D and δ are adjoint to each other, that is for any $X \in L_2(\Omega)$ and $V \in L_2([1, N] \times \Omega)$ we have

$$(D(X), W)_{L_2([1, N] \times \Omega)} = (X, \delta(W))_{L_2(\Omega)} .$$

But a more interesting result is the following version of the Clark-Ocone identity:

Proposition 6.2 Let $X \in L_2(\Omega)$. Then

$$X = E[X] + \sum_{k,j} E[D_{k,j}(X) | \mathcal{F}_k] \phi_k^j$$

where by ϕ_k^j we mean either $\phi_{X_{k-1}}^j(X_k)$ or $\phi_k(\xi_k)$.

Proof Proceeds very much along the lines of the same proof in [L-M]. Notice that according to Corollary 2.2

$$E[D_{k,j}(X) | \mathcal{F}_k] = \sum_{A \subset [1, k]} \sum_{\mathbf{j}_A} X(A \cup k, (\mathbf{j}_A, j)) H(A, \mathbf{j}_A)$$

therefore,

$$\begin{aligned} \sum_{k,j} E[D_{k,j}(X) | \mathcal{F}_k] \phi_k^j &= \sum_{A \subset [1, k]} \sum_{\mathbf{j}_A} X(A \cup k, (\mathbf{j}_A, j)) H(A \cup k, (\mathbf{j}_A, j)) \\ &= \sum_{A, \mathbf{j}_A} X(A \cup k, (\mathbf{j}_A, j)) H(A \cup k, (\mathbf{j}_A, j)) = X - E[X]. \end{aligned}$$

To finish we direct the reader to still another version of the Clark-Ocone formula that appeared in Lindström's [L].

7 Extended H-systems

After Proposition 2.3 we mentioned the particular case in which the underlying i.i.d collection consists of random variables ξ_k taking values in $\{-1, 1\}$ with equal probability. This collection generates the orthonormal set $\{H(A) =$

$\prod_{k \in A} \xi_k | A \subset [1, N]$, which according to Proposition 2.2 is a basis for $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. That is, for any random variable X we have

$$X = \sum_{A \subset [1, N]} X(A)H(A) \quad \text{with} \quad X(A) = E[AH(A)]. \quad (8)$$

In this section we present a variation on the theme of Gundy's ([Gu]) and we shall see that the Walsh functions $H(A)$ determine a Haar system. Let us begin with

Definition 7.1 *An orthonormal system $\{H(A) | A \subset [1, N]\}$ is an extended H -system whenever*

- i) each $H(A)$ takes at most two values with positive probability,*
- ii) the σ -algebra $\mathcal{F}_A := \{H(B) | B \subset A\}$ consists of exactly $2^{|A|}$ atoms*
- iii) $E[H(C) | \mathcal{F}_A] = 0$ for $C \neq A$.*

Definition 7.2 *The complete orthonormal system $\{H(A) | A \subset [1, N]\}$ is an extended H -system whenever for any $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and any $A \subset [1, N]$ we have*

$$E[X | \mathcal{F}_A] = \sum_B X(B)H(B)$$

where the $X(B)$ are the Fourier coefficients of X appearing in (8).

Proposition 7.1 *With the notations introduced above, we have $\{H(A) | A \subset [1, N]\}$ is an extended H -system according to Definition 7.1 if and only if it is an extended H -system according to Definition 7.2.*

Proof We repeat Gundy's proof almost verbatim. Assume $\{H(A)\}$ is an extended H -system according to the first definition, that X is a random variable and $A \subset [1, N]$. Then $E[X | \mathcal{F}] = \sum_i x_i I_{B_i}$ where B_i are the $2^{|A|}$ blocks generating \mathcal{F}_A . Since $\mathcal{V}_A := \{\sum_{B \subset A} c(B)H(B)\}$ is a $2^{|A|}$ dimensional vector space, $E[X | \mathcal{F}_A]$ must coincide with its orthogonal projection on that space, and therefore Definition 7.2 is satisfied.

Let us assume now that $\{H(A)\}$ is an extended H -system according to Definition 7.2. For $A = \emptyset$ we agree to set $H(\emptyset) = 1$ and then $E[X | \mathcal{F}_\emptyset] = E[X]H(\emptyset)$ and \mathcal{F}_\emptyset is generated by one block. Thus (i)-(iii) hold in this case. Assume that we have verified the conditions for any A with $|A| \leq n$. Let $|A| = n$ and $a \notin A$ and put $A' = A \cup \{a\}$. We know that $0 = E[H(A') | \mathcal{F}_A] = \sum b_B(A')H(B)$, or $b_B(A') = 0$ by hypothesis. Therefore, $E[H(A')H(B)] = 0$ for any block B that generates \mathcal{F}_A , and thus $P(\{H(A') > 0\} \cap B) > 0$ and $P(\{H(A') < 0\} \cap B) > 0$. Since the vector space $\mathcal{V}'_A = \{\sum_{B \subset A'} c(B)H(B)\}$ is $2^{|A|+1}$ -dimensional, the orthogonal projection $E[X | \mathcal{F}_{A'}]$ must coincide with the orthogonal projection on \mathcal{V}'_A , or (ii) and (iii) of Definition 7.1 hold. This, and what we observed before, means that every block of \mathcal{F}_A splits into two blocks, on which $H(A')$ must be constant. Thus (i) holds as well.

Definition 7.3 Let \mathcal{I} be a partially-ordered index set and $\{\mathcal{F}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ a collection of sub- σ -algebras of a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) . We shall say that a collection $\{Y_i\}$ of integrable and \mathcal{F}_i -adapted random variables, is a collection of martingale differences whenever $E[Y_j \mid \mathcal{F}_i] = 0$ for $j \succ i$.

Comment. According to lemma 2.2, the collection $\{H(A) \mid A \subset [1, N]\}$ is a collection of martingale differences with respect to $\{\mathcal{F}_A \mid A \subset [1, N]\}$. The following variation on the theme of a result in [Gu] adds a bit to the probabilistic nature of the Walsh functions explored in [HLOU-1] and [L-M].

Proposition 7.2 Assume that $\{H(A) \mid A \subset [1, N]\}$ is a complete orthonormal system and a collection of martingale differences with respect to $\{\mathcal{F}_A \mid A \subset [1, N]\}$. Then it also is an extended H -system.

Proof Let X be a random variable, necessarily in $L_2(P)$ in our finite setting. By assumption $X = \sum_A X(A)H(A)$. Define the random variables $Z_A = E[X \mid \mathcal{F}_A] - \sum_{B \subset A} X(B)H(B)$. From the assumptions, we obtain that the Z_A vanish identically for all $A \subset [1, N]$. Therefore, the condition in Definition 7.2 is satisfied and $\{H(A) \mid A \subset [1, N]\}$ is an extended H -system.

Comment. Even though the connection between Haar, Rademacher, Walsh, and other families of functions has been well studied in many places, take a look at [TMD] for example, the probabilistic nature of these connections seems to be missing.

8 Simple applications

8.1 An application in mathematical finance

We saw above that discrete exponential martingales are true exponential martingales when multiplication is performed with the Wick product. Now we shall examine a situation in which discrete exponential martingales are related to standard exponentials. We assume to be given a sequence of i.i.d. random variables $\{\xi_n \mid n \geq 1\}$ that take values in a finite set S , and we shall need the polynomials $\{\phi(s) \mid j = 0, 1, \dots, d-1 \ s \in S\}$, orthogonal with respect to $p_s = P(\xi_1 = s)$ introduced in Section 2.

Let $\{c_{n,j} \mid n \geq 1; j = 1, \dots, d-1\}$ be any sequence of real numbers such that $\sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{d-1} |c_{n,j}|^2 < \infty$ and let us again set

$$\Delta Z_n = \sum_{j=1}^{d-1} c_{n,j} \phi^j(\xi_n) \text{ for } n \geq 1, \ Z_0 = 0, \text{ and } Z_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n \Delta Z_k .$$

That is, $\{Z_n | n \geq 0\}$ is a martingale with respect to the filtration generated by the $\{\xi_n\}$. We should add that obviously, given that our setup is finite dimensional in all senses, when considering a finite time horizon, there is no real need of the square integrability condition. But some statements can be easily extended to other setups, so let us keep the condition.

Consider now the stochastic difference equation

$$S_n - S_{n-1} = aS_{n-1} + \sigma S_{n-1} \Delta Z_n \quad (9)$$

where $1 + a > 0$ and $\sigma > 0$ are given numbers. Such an equation could perhaps be used to model time changing volatilities. In this regard check work by Bender and Elliott in [BE]. Now multiply both sides of (9) by $(1 + a)^{-n}$ and rewrite it as

$$(1 + a)^{-n} S_n - (1 + a)^{-(n-1)} S_{n-1} = \frac{\sigma}{(1 + a)} (1 + a)^{-(n-1)} S_{n-1} \Delta Z_n.$$

Therefore, the solution to the stochastic difference equation is given by the discrete exponential

$$S_n = (1 + a)^n \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sigma}{1 + a} \Delta Z_k\right)$$

and clearly, if $a = 0$, S_n would be a discrete exponential martingale. An interesting question studied by many authors is:

Given an r such that $1 + r > 0$, can we change our measure in such a way that $S_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_n}{(1 + r)^n}$ is a martingale?

More precisely:

Does there exist a measure $Q \sim P$ on the canonical sample space $(\Omega, \mathcal{F}_{n \leq N})$ on which the $\{\xi_n\}$ are given, such that $\{S_n^* | n \leq N\}$ is an $(\Omega, \mathcal{F}_{n \leq N}, Q)$ -martingale?

This amounts to requiring that $E_Q[S_{n+1}^* | \mathcal{F}_n^*] = S_n^*$, or equivalently that

$$E_Q\left[\left(1 + \frac{\sigma}{1 + a} \Delta Z_{n+1}\right) | \mathcal{F}_n\right] = \frac{1 + r}{1 + a} = 1 + \frac{r - a}{1 + a}$$

or to $E_Q[\Delta Z_{n+1}] = \frac{r - a}{\sigma}$.

In this finite dimensional setup, $Q = \rho P$ with

$$\rho = \frac{\rho}{E[\rho | \mathcal{F}_N]} \frac{E[\rho | \mathcal{F}_N]}{E[\rho | \mathcal{F}_{N-1}]} \cdots E[\rho | \mathcal{F}_1] \stackrel{\text{def}}{=} \rho_N \rho_{N-1} \cdots \rho_1$$

and, as can be easily checked, $\rho^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^n \rho_k$ is an $\{\mathcal{F}_n\}$ -martingale. Actually the maximum entropy candidate for ρ_n is, (see [Gz] for example)

$$\rho_n = \frac{e^{-\lambda \Delta Z_n}}{E[e^{-\lambda \Delta Z_n}]}$$

where the Lagrange multiplier λ is chosen so that

$$\frac{E[e^{-\lambda\Delta Z_n} \Delta Z_n]}{E[e^{-\lambda\Delta Z_n}]} = \frac{r - a}{\sigma}.$$

Whenever r, a, σ are such that $(r - a)/\sigma$ fall in the interior of the convex interval spanned by the values of ΔZ_n , such λ exists. What is of interest for us here is that once λ is found, we can make use of the fact that the $\phi^j(s)$ are an orthogonal system to write

$$\begin{aligned} e^{-\lambda\Delta Z_n} &= \sum_{s,j} e^{-\lambda\zeta(s)} p_s \phi^j(s) \phi^j(\xi_n) \\ &= \sum_s e^{-\lambda\zeta(s)} p_s + \sum_s \sum_{j=1}^{d-1} e^{-\lambda\zeta(s)} p_s \phi^j(s) \phi^j(\xi_n) \\ &= E[e^{-\lambda\Delta Z_n}] + \sum_s \sum_{j=1}^{d-1} e^{-\lambda\zeta(s)} p_s \phi^j(s) \phi^j(\xi_n) \end{aligned}$$

where by $\zeta_n(s)$ we denote the different values that ΔZ_n can assume. The last identity can be rewritten as

$$\frac{E[e^{-\lambda\Delta Z_n} \Delta Z_n]}{E[e^{-\lambda\Delta Z_n}]} = 1 + \sum_{j=1}^{d-1} E_Q[\phi^0(\xi_n) \phi^j(\xi_n)] \phi^j(\xi_n) = 1 + \Delta \hat{Z}_n$$

and we thus exhibit $\rho^{(n)}$ as a discrete exponential martingale, to wit

$$\rho^{(n)} = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta \hat{Z}_k).$$

Now we could bring the results of section 2 to have an explicit expansion of the density $\rho = \frac{dQ}{dP}$ in terms of the discrete chaos determined by the $\{\xi_n\}$.

8.2 Discrete random evolution equations

Let us examine two very simple evolution equations. The gist of the example is to compare ordinary and Wick products. Consider for example the random evolution equation

$$y(n) = \hat{K}y(n-1), \quad y(0) \text{ given} \quad (10)$$

where $K = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and K admits an expansion in Wiener-like chaos. To make it really simple, assume that $K = \sum_A K(A) \chi_A$ as in section 2. The solution to (10) is given by

$$y(n) = \sum_A y(n, A) \chi_A = \hat{K}^n y(0) = y(0) \sum_A E[K^n(A) \chi_A] \chi_A$$

and obviously $y(n, A) = E[K^n \chi_A]$.

Another stochastic evolution equation is

$$y(n) = K \diamond y(n-1), \quad y(0) \text{ given} \quad (11)$$

the solution to which is given by

$$y(n) = \sum_A y(n, A) \chi_A = K^{\diamond n} y(0) = y(0) \sum_{\{A_1, \dots, A_n\}} K(A_1) \dots K(A_n) \chi_{\cup A_j}$$

from which $y(n, A) = \sum_{\{A_1, \dots, A_n\}} K(A_1) \dots K(A_n)$ where the sum is over all partitions of the set A .

Actually, another simple case, which is a particular case of the computations presented in section 3 of [HLOU-2], corresponds to the following discrete random evolution equation

$$y(n) = (I + G)y(n-1) + c y(n-1) \diamond \zeta_n$$

where the ζ_n is short for any of the martingale increments described in section 2. In this equation $y(n)$ can be assumed to be a vector in some finite dimensional space \mathbb{R}^K and G to be a $K \times K$ -matrix representing some discretized operator. Anyway, while we carry out the following computations we assume that $(I + G)^{-1}$ is defined. From what we proved in section 2, if $y(n)$ is adapted to the filtration \mathcal{F}_n , then the Wick product becomes an ordinary product and the equation can be recast as $y(n) = (I + G + c \zeta_n)y(n-1)$, which after iteration and factorization, can be written as

$$y(n) = (I + G)^n \prod_{j=1}^n (I + c \zeta_j (I + G)^{-1}) y(0)$$

and expanding the sum we obtain

$$y(n) = \sum_{k=1}^n c^k \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \prod_{i=1}^k \zeta_{j_i} \right) (I + G)^{n-k} y(0)$$

which exhibits the expansion of $y(n)$ in terms of the chaos associated to ζ .

We direct the reader to [XK] for more on the theme of this subsection and for further references to these techniques.

8.3 A randomly driven binomial model

In this section we shall consider a simple random evolution describing the price of an asset which increases or decreases depending on the state of an environment described by a simple two-state Markov chain.

Let X describe a time homogeneous Markov chain with state space $\{-1, 1\}$ with $p_{s,s'} = p(s, s') = P(X_1 = s' | X_0 = s) > 0$ for all s, s' . Let now $\phi_s^0(s') = 1$ and $\phi_s^1(s') = \frac{s' - E^s[X_1]}{2\sigma(s)}$ be the orthogonal basis determined by the transition matrix as described in section 1. In this basis the function $I_s(X_k)$ can be expanded as

$$I_{\{s\}}(X_k) = p(X_{k-1}, s) + p(X_{k-1}, s)\phi_{X_{k-1}}^1(X_k) \quad (12)$$

with respect to $P(\cdot | \mathcal{F}_{k-1})$.

Denote by $\{g_n | n \geq 1\}$ and $\{b_n | n \geq 1\}$ two independent sequences of i.i.d. Bernoulli random variables such that $1 + g_n > 0$ and $1 + b_n > 0$ for all n . Define now the price process of the asset to be

$$S(n) = \prod_{k=1}^n (1 + g_k)^{I_{\{+\}}(X_k)} (1 + b_k)^{I_{\{-\}}(X_k)} S(0).$$

Clearly at each time n the price change occurs according to whether during the preceding time interval the environment was good or bad. Notice that $a^{I_{\{+\}}(X_k)} = 1 + aI_{\{+\}}(X_k)$, therefore after some calculations, $S(n)$ can be written as

$$S(n) = \prod_{k=1}^n (1 + g_k I_{\{+\}}(X_k) + b_k I_{\{-\}}(X_k)) S(0).$$

If we now bring in (12) and introduce the symbol

$$E^{X_{k-1}}[\Delta S_k] \stackrel{\text{def}}{=} g_k p(X_{k-1}, +) + b_k p(X_{k-1}, -)$$

(which denotes the price change averaged over the possible environmental changes), we can rewrite the price at time n , given the history of the environment up to n , as

$$S(n) = \langle S(n) \rangle \prod_{k=1}^n (1 + \delta_k \phi_{X_{k-1}}^1(X_k)) \quad (13)$$

where $\langle S(n) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^n E^{X_{k-1}}[\Delta S_k]$ and $\delta_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E^{X_{k-1}}[\Delta S_k]}{1 + E^{X_{k-1}}[\Delta S_k]}$. Certainly (13) is the starting point for the expansion of the price process in terms of the chaos associated to X .

Acknowledgements I wish to thank David Nualart and very specially to Philip Feinsilver for their comments on an earlier draft of this paper.

References

- [A] Akahori, J. “*Local time in Parisian walkways*” Preprint.
- [BE] Bender, C. and Elliott, R. “*Binary market models and discrete Wick products*”. Working paper, Nov. 2002.
- [B] Biane, P. “*Chaotic representations for finite Markov chains*”, *Stochastics and Stochastic Reports*, **30**(1990) pp. 6 1-68
- [E-1] Emery, M. “*On the chaotic representation for martingales*” in “*Probability theory and mathematical statistics*”, Gordon-Breach, New York, 1996.
- [E-2] Emery, M. “*A discrete approach to the chaotic representation property*” *Semin. Probab. XXXV, Lect. Notes in Math.* 1775 (2001) pp. 123-138..
- [F] Feinsilver, P. “*Special Functions, probability semigroups and Hamiltonian Flows*” *Lecture Notes* **696**, Springer Verlag, Berlin, 1978.
- [FS-1] Feinsilver, P. and Schott, R. “*Krawtchouk polynomials and finite probability theory*” in “*Probability measure s on groups X*”, Plenum Press, New York, 1991.
- [FS-2] Feinsilver, P. and Schott, R. “*Orthogonal polynomials via Fourier expansion*” *Rapport du Recherche N°1745, INRIA- Lorraine*, 1992.
- [Gu] Gundy, R. “*Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series*” *Trans. Amer. Math. Soc.* **24** (1966) pp.228-248.
- [Gz] Gzyl, H. “*Maxentropic construction of risk neutral measures*” *Applied Math. Finance.*, **7**(2000), pp.229-239.
- [HLOU-1] Holden, H., Lindstrøm, T., Øksendal, B. and Ubøe, J. “*Discrete Wick calculus and stochastic functional equations*” *Potential Analysis*, **1** (1992) pp.291-406.
- [HLOU-2] Holden, H., Lindstrøm, T., Øksendal, B. and Ubøe, J. “*Discrete Wick products*” in Lindstrøm et al, “*Stochastic Analysis and Related Topics*” Gordon and Breach, New York, 19 93, pp 123-148.
- [K] Kroecker, J. “*Wiener analysis of functionals of a Markov chain*” *Biological Cybernetics*, **36** (1980) pp.243-248.
- [L] Lindstrøm, T. “*Hyperfinite Levy processes*” *Stochastics and Stochastic Reports*, **76** (2004) pp.517-548.
- [L-M] Leitz-Martini, M. “*A discrete Clark-Ocone formula*”, *Maphysto Research Rept. N°29*, 2000.

- [M] Meyer, P. “*Un cas de representation chaotique discrete*” *Seminaire de Probabilites* (ed) J. Azéma and P. Meyer, Lecture Notes, **1372**, Springer Verlag, Berlin 1998
- [PS] Privault, N. and Schoutens, W. “*Discrete chaotic calculus and covariance identities*” *Stochastics and Stochastics Reports* 72 (2002), pp. 289-315l.
- [RW] Rota, G-C. and Wallstrom, T. “*Stochastic integrals : a combinatorial approach*”, *Annals of Probability*, **25** (1997), pp. 1257-1283.
- [TMD] Thornton, M. A., Miller, D. and Drechsler, R.. “*Computing Walsh, Arithmetic and Reed-Muller Spectral Decision Diagrams Using Graph Transformations*” GLVLSI 2002.
- [XK] Xiu, D. and Karnidiakis, G. “*Modeling uncertainty in the steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos*”, *Comp. Methods Appl. Mech. Engr.*, **191** (2002) pp. 4927-4948.

HENRYK GZYL
DEPTO. ESTADÍSTICA,
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, SPAIN
hgzyl@est-econ.uc3m.es; hgzyl@reacciun.ve

Intuitionistic Fuzzy θ -Closure Operator

I. M. Hanafy, A. M. Abd El-Aziz & T. M. Salman

Abstract

The concepts of fuzzy θ -open (θ -closed)sets and fuzzy θ -closure operator are introduced and discussed in intuitionistic fuzzy topological spaces. As applications of these concepts, certain functions are characterized in terms of intuitionistic fuzzy θ -closure operator.

Keywords: Intuitionistic fuzzy θ -closed set, intuitionistic fuzzy θ -closure, intuitionistic fuzzy strongly θ -continuous, intuitionistic fuzzy θ -continuous, intuitionistic fuzzy weakly continuous, intuitionistic fuzzy $\lambda\theta$ -continuous.

1. Introduction

Fuzzy sets were introduced by Zadeh[10] in 1965. A fuzzy set U in a universe X is a mapping from X to the unit interval $[0, 1]$. For any $x \in X$, the number $U(x)$ is called the membership degree of x in U . As a generalization of this notion, Atanassov[1] introduced the fundamental concept of intuitionistic fuzzy sets. While fuzzy sets give a degree of membership of an element in a given set, intuitionistic fuzzy sets give both a degree of membership and of non-membership. Both degrees belong to the interval $[0, 1]$, and their sum should not exceed 1 (we will, formally, define the intuitionistic fuzzy set in section 2). Coker[2-4] and Hanafy[6] introduced the notion of intuitionistic fuzzy topological space, fuzzy continuity and some other related concepts. The concept of θ -closure operator in a fuzzy topological spaces is introduced in [9]. In the present paper our aim is to introduce and study the concept of θ -closure operator in intuitionistic fuzzy topological spaces. In section 3 of this paper we develop the concept of intuitionistic fuzzy θ -closure operators. Intuitionistic fuzzy regular space is introduced and characterized in terms of intuitionistic fuzzy θ -closure. The functions of fuzzy strongly θ -continuous[8], fuzzy θ -continuous[9], fuzzy weakly continuous[9] and fuzzy $\lambda\theta$ -continuous[7] were introduced in fuzzy topological spaces. Section 4 is devoted to introduce these functions in intuitionistic fuzzy topological spaces and also includes the characterizations of these functions with the help of the notion of intuitionistic fuzzy

θ -closures. For definitions and results not explained in this paper, we refer to the papers [1, 2, 4].

2. Preliminaries

Definition 2.1[1]. Let X be a nonempty fixed set. An intuitionistic fuzzy set (IFS, for short) U is an object having the form $U = \{\langle x, \mu_U(x), \gamma_U(x) \rangle : x \in X\}$ where the functions $\mu_U : X \rightarrow I$ and $\gamma_U : X \rightarrow I$ denote respectively the degree of membership (namely $\mu_U(x)$) and the degree of nonmembership (namely $\gamma_U(x)$) of each element $x \in X$ to the set U , and $0 \leq \mu_U(x) + \gamma_U(x) \leq 1$ for each $x \in X$.

For the sake of simplicity, we shall frequently use the symbol $U = \langle x, \mu_U(x), \gamma_U(x) \rangle$ for the IFS $U = \{\langle x, \mu_U(x), \gamma_U(x) \rangle : x \in X\}$. Every fuzzy set U on a nonempty set X is obviously an IFS having the form $U = \langle x, \mu_U(x), 1 - \mu_U(x) \rangle$.

Definition 2.2[1]. Let X be a nonempty set and let the IFS's U and V be in the form $U = \langle x, \mu_U(x), \gamma_U(x) \rangle$, $V = \langle x, \mu_V(x), \gamma_V(x) \rangle$ and let $\{U_j : j \in J\}$ be an arbitrary family of IFS's in X . Then

- (i) $U \leq V$ iff $\mu_U(x) \leq \mu_V(x)$ and $\gamma_U(x) \geq \gamma_V(x), \forall x \in X$;
- (ii) $\bar{U} = \{\langle x, \gamma_U(x), \mu_U(x) \rangle : x \in X\}$;
- (iii) $\cap U_j = \{\langle x, \wedge \mu_{U_j}(x), \vee \gamma_{U_j}(x) \rangle : x \in X\}$;
- (iv) $\cup U_j = \{\langle x, \vee \mu_{U_j}(x), \wedge \gamma_{U_j}(x) \rangle : x \in X\}$;
- (v) $\underline{1} = \{\langle x, \underline{1}, \underline{0} \rangle : x \in X\}$ and $\underline{0} = \{\langle x, \underline{0}, \underline{1} \rangle : x \in X\}$;
- (vi) $\overline{\bar{U}} = U, \underline{\underline{0}} = \underline{1}$ and $\underline{\underline{1}} = \underline{0}$.

Definition 2.3[2]. An intuitionistic fuzzy topology (*IFT*, for short) on a nonempty set X is a family Ψ of IFS's in X satisfying the following axioms:

- (i) $\underline{0}, \underline{1} \in \Psi$;
- (ii) $U_1 \cap U_2 \in \Psi$ for any $U_1, U_2 \in \Psi$;
- (iii) $\cup U_j \in \Psi$ for any $\{U_j : j \in J\} \subseteq \Psi$.

In this case the pair (X, Ψ) is called an intuitionistic fuzzy topological space (IFTS, for short) and each IFS in Ψ is known as an intuitionistic fuzzy open set (IFOS, for short) in X . The complement \bar{U} of IFOS U in IFTS (X, Ψ) is called an intuitionistic fuzzy closed set (IFCS, for short).

Definition 2.4[2]. Let X and Y be two nonempty sets and $f : X \rightarrow Y$ a function.

(i) If $V = \{\langle y, \mu_V(y), \gamma_V(y) \rangle : y \in Y\}$ is an IFS in Y , then the preimage of V under f is denoted and defined by

$$f^{-1}(V) = \{\langle x, f^{-1}(\mu_V)(x), f^{-1}(\gamma_V)(x) \rangle : x \in X\}$$

where $f^{-1}(\mu_V)(x) = \mu_V(f(x))$ and $f^{-1}(\gamma_V)(x) = \gamma_V(f(x))$.

(ii) If $U = \langle x, \lambda_U(x), \delta_U(x) \rangle : x \in X$ is an IFS in X , then the image of U under f is denoted and defined by

$$f(U) = \langle y, f(\lambda_U)(y), f_-(\delta_U)(y) \rangle : y \in Y$$

where

$$f(\lambda_U)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \lambda_U(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and

$$f_-(\delta_U)(y) = 1 - f(1 - \delta_U)(y) = \begin{cases} \inf_{x \in f^{-1}(y)} \delta_U(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Corollary 2.5.[5]. Let $U, U_j (j \in J)$ IFS's in X , $V, V_j (j \in J)$ IFS's in Y and $f : X \rightarrow Y$ a function. Then:

- (i) $U_1 \leq U_2 \Rightarrow f(U_1) \leq f(U_2)$.
- (ii) $V_1 \leq V_2 \Rightarrow f^{-1}(V_1) \leq f^{-1}(V_2)$.
- (iii) $U \leq f^{-1}f(U)$ (If f is injective, then $U = f^{-1}f(U)$).
- (iv) $ff^{-1}(V) \leq V$ (If f is surjective, then $ff^{-1}(V) = V$).
- (v) $f^{-1}(\cup V_j) = \cup f^{-1}(V_j)$ and $f^{-1}(\cap V_j) = \cap f^{-1}(V_j)$.
- (vi) $f(\cup V_j) = \cup f(V_j)$.
- (vii) $f(\cap U_j) \leq \cap f(U_j)$, (If f is injective, then $f(\cap U_j) = \cap f(U_j)$).
- (viii) $f^{-1}(\overline{V}) = \overline{f^{-1}(V)}$.

Definition 2.6[2]. Let (X, Ψ) be an IFTS and $U = \langle x, \mu_U(x), \gamma_U(x) \rangle$ an IFS in X . Then the fuzzy interior and the fuzzy closure of U are defined by:

$$\begin{aligned} cl(U) &= \cap \{K : K \text{ is an IFCS in } X \text{ and } U \leq K\} \quad \text{and} \\ int(U) &= \cup \{G : G \text{ is an IFOS in } X \text{ and } G \leq U\}. \end{aligned}$$

Definition 2.7[5]. An IFS U of an IFTS X is called:

- (i) an intuitionistic fuzzy regular open set (IFROS, for short) of X if $int(cl(U)) = U$;
- (ii) an intuitionistic fuzzy λ -open set (IF λ OS, for short) of X if $U \leq int(cl(int(U)))$.

The complement of IFROS (resp. IFλOS) is called intuitionistic fuzzy regular closed set (resp. λ-closed set)(IFRCS (resp. IFλCS), for short) of X .

Proposition 2.8[2]. For any IFS U in (X, Ψ) we have:

$$(i) \text{ cl}(\bar{U}) = \overline{\text{int}(U)}, \quad (ii) \text{ int}(\bar{U}) = \overline{\text{cl}(U)} .$$

Definition 2.9[4]. Let X be a non empty set and $c \in X$ a fixed element in X . If $a \in (0, 1]$ and $b \in [0, 1)$ are two fixed real numbers such that $a + b \leq 1$, then the IFS $c(a, b) = \langle x, c_a, 1 - c_{1-b} \rangle$ is called an intuitionistic fuzzy point (IFP, for short) in X , where a denotes the degree of membership of $c(a, b)$, b the degree of nonmembership of $c(a, b)$, and $c \in X$ the support of $c(a, b)$.

Definition 2.10[4]. Let $c(a, b)$ be an IFP in X and $U = \langle x, \mu_U, \gamma_U \rangle$ be an IFS in X . Suppose further that $a, b \in (0, 1)$. $c(a, b)$ is said to be properly contained in U ($c(a, b) \in U$, for short) iff $a < \mu_U(c)$ and $b > \gamma_U(c)$.

Definition 2.11[4]. (i) An IFP $c(a, b)$ in X is said to be quasi-coincident with the IFS $U = \langle x, \mu_U, \gamma_U \rangle$, denoted by $c(a, b)qU$, iff $a > \gamma_U(c)$ or $b < \mu_U(c)$.

(ii) Let $U = \langle x, \mu_U, \gamma_U \rangle$ and $V = \langle x, \mu_V, \gamma_V \rangle$ are two IFSs in X . Then, U and V are said to be quasi-coincident, denoted by UqV , iff there exists an element $x \in X$ such that $\mu_U(x) > \gamma_V(x)$ or $\gamma_U(x) < \mu_V(x)$.

The expression ‘not quasi-coincident’ will be abbreviated as \tilde{q} .

Proposition 2.12[4]. Let U and V be two IFS’s and $c(a, b)$ an IFP in X . Then:

$$(i) U \tilde{q} \bar{V} \text{ iff } U \leq V, \quad (ii) U q V \text{ iff } U \not\leq \bar{V}, \\ (iii) c(a, b) \leq U \text{ iff } c(a, b) \tilde{q} \bar{U}, \quad (iv) c(a, b) q U \text{ iff } c(a, b) \not\leq \bar{U}.$$

Definition 2.13[4]. Let $f : X \rightarrow Y$ be a function and $c(a, b)$ an IFP in X . Then the image of $c(a, b)$ under f , denoted by $f(c(a, b))$, is defined by

$$f(c(a, b)) = \langle y, f(c)_a, 1 - f(c)_{1-b} \rangle .$$

Proposition 2.14[6]. Let $f : X \rightarrow Y$ be a function and $c(a, b)$ an IFP in X .

(i) If for IFS V in Y we have $f(c(a, b)) q V$, then $c(a, b) q f^{-1}(V)$.

(ii) If for IFS U in X we have $c(a, b) q U$, then $f(c(a, b)) q f(U)$.

Definition 2.15. Let (X, Ψ) be an IFTS on X and $c(a, b)$ an IFP in X . An IFS A is called $\varepsilon q - nbd(\varepsilon \lambda q - nbd)$ of $c(a, b)$, if there exists an IFOS (IFλOS) U in X such that $c(a, b)qU$ and $U \leq A$.

The family of all $\varepsilon q - nbd(\varepsilon \lambda q - nbd)$ of $c(a, b)$ will be denoted by $N_\varepsilon^q(N_\varepsilon^{\lambda q})(c(a, b))$.

Definition 2.16[6]. An IFTS (X, Ψ) is said to be intuitionistic fuzzy extremely disconnected (IFEDS, for short) iff the intuitionistic fuzzy closure of each IFOS in X is IFOS.

3. θ -closure operator in IFTS's

Definition 3.1. An IFP $c(a, b)$ is said to be intuitionistic fuzzy θ -cluster point (IF θ -cluster point, for short) of an IFS U iff for each $A \in N_\varepsilon^q(c(a, b))$, $cl(A) q U$.

The set of all IF θ -cluster points of U is called the intuitionistic fuzzy θ -closure of U and denoted by $cl_\theta(U)$. An IFS U will be called IF θ -closed (IF θ CS, for short) iff $U = cl_\theta(U)$. The complement of an IF θ -closed set is IF θ -open (IF θ OS, for short). The θ -interior of U is denoted and defined by

$$int_\theta(U) = \overline{1 - cl_\theta(1 - U)}.$$

Definition 3.2. An IFS U of an IFTS X is said to be $\varepsilon \theta q - nbd$ of an IFP $c(a, b)$ if there exists an $\varepsilon q - nbd$ A of $c(a, b)$ such that $cl(A) \tilde{q} \overline{U}$.

The family of all $\varepsilon \theta q - nbd$ of $c(a, b)$ will be denoted by $N_\varepsilon^{\theta q}(c(a, b))$.

Remark 3.3. It is clear that :

- (i) IF θ OS \subseteq IFOS and IFROS \subseteq IFOS
- (ii) For any IFS U in an IFTS X , $cl(U) \leq cl_\theta(U)$.

Example 3.4. Let $X = \{a, b\}$ and $U = \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.5}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}) \rangle$. Then the family $\Psi = \{0, 1, U\}$ of IFS's in X is an IFT on X . Clearly U is an IFOS in X but not IFROS (Indeed $int(cl(U)) = \overline{1} \neq U$).

Example 3.5. Let $X = \{a, b, c\}$ and

$$U = \langle x, (\frac{a}{0.0}, \frac{b}{0.0}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{1.0}, \frac{b}{1.0}, \frac{c}{0.0}) \rangle, V = \langle x, (\frac{a}{1.0}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{0.0}), (\frac{a}{0.0}, \frac{b}{0.5}, \frac{c}{1.0}) \rangle.$$

Then the family $\Psi = \{0, 1, U, V, U \cup V\}$ of IFS's in X is an IFT on X . Clearly U is an IFROS but not IF θ OS.

Theorem 3.6. If U is an IFOS in an IFTS X , then $cl(U) = cl_\theta(U)$.

Proof. It is enough to prove $cl_\theta(U) \leq cl(U)$.

Let $c(a, b)$ be an IFP in X such that $c(a, b) \notin cl(U)$, then there exists $V \in N_\varepsilon^q(c(a, b))$ such that $V \tilde{q} U$ and hence $V \leq \overline{U}$. Then $cl(V) \leq \overline{int(U)} \leq \overline{U}$, since U is an IFOS in X . Hence $cl(V) \tilde{q} U$ which implies $c(a, b) \notin cl_\theta(U)$. Then $cl_\theta(U) \leq cl(U)$. Thus $cl(U) = cl_\theta(U)$. ■

Theorem 3.7. In an IFTS (X, Ψ) , the following hold :

- (i) Finite union and arbitrary intersection of IF θ CS's in X is an IF θ CS.
- (ii) For two IFS's U and V in X , if $U \leq V$, then $cl_\theta(U) \leq cl_\theta(V)$.
- (iii) The IFS's 0 and 1 are IF θ -closed.

Proof. The straightforward proofs are omitted. ■

Remark 3.8. The set of all IF θ OS's in an IFTS (X, Ψ) induce an IFTS (X, Ψ_θ) (say) which is coarser than the IFTS (X, Ψ) .

Remark 3.9. For an IFS U in an IFTS X , $cl_\theta(U)$ is evidently IFCS but not necessarily IF θ CS as is seen in the following example.

Example 3.10. Let $X = \{a, b, c\}$ and $U = \langle x, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.1}) \rangle$, $V = \langle x, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.2}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.6}, \frac{c}{0.3}) \rangle$. Then the family $\Psi = \{0, 1, U, V\}$ of IFS's in X is an IFT on X .

Let $A = \langle x, (\frac{a}{0.3}, \frac{b}{0.3}, \frac{c}{0.0}), (\frac{a}{0.6}, \frac{b}{0.7}, \frac{c}{0.1}) \rangle$ be an IFS in X . Then an IFP $a(0.6, 0.3) \in cl_\theta(A)$ (because $a(0.6, 0.3)qU \leq U$, $cl(U) = 1 qA$), also $a(0.8, 0.1) \notin cl_\theta(A)$ (because $a(0.8, 0.1)qV$, $cl(V) = \bar{V}qA$). But $a(0.8, 0.1) \in cl_\theta(a(0.6, 0.3)) \leq cl_\theta(cl_\theta(A))$. Hence, $cl_\theta(A)$ is not IF θ CS.

Lemma 3.11. If U, V are IFOS's in an IFEDS X , then $cl(V)qU \Rightarrow cl(V)qcl_\theta(U)$.

Proof. Let $cl(V)qU \Rightarrow U \leq \overline{cl(V)} \Rightarrow cl(U) \leq \overline{cl(V)}$ since X is an IFEDS. Hence $cl(V)qU \Rightarrow cl(V)qcl_\theta(U) \Rightarrow cl(V)qcl_\theta(U)$, by Remark 3.3. ■

Theorem 3.12. If U is an IFOS in an IFEDS (X, Ψ) , then $cl_\theta(U)$ is an IF θ CS in X .

Proof. Let $c(a, b)$ be an IFP in X and let $c(a, b) \notin cl_\theta(U)$. Then there is $V \in N_\varepsilon^q(c(a, b))$ such that $cl(V)qU$. By Lemma 3.11, $cl(V)qcl_\theta(U)$ and hence $c(a, b) > cl_\theta(U)$ implies $c(a, b) \notin cl_\theta(cl_\theta(U))$. Then $cl_\theta(cl_\theta(U)) \leq cl_\theta(U)$. But $cl_\theta(U) \leq cl_\theta(cl_\theta(U))$, then $cl_\theta(U) = cl_\theta(cl_\theta(U))$. Thus $cl_\theta(U)$ is an IF θ CS. ■

Theorem 3.13. In an IFEDS (X, Ψ) , every IFROS in X is an IF θ OS.

Proof. Let U be an IFROS in an IFEDS (X, Ψ) . Then $U = int(cl(U)) = cl(U) = int(U)$. Since U is an IFCS, \bar{U} is an IFOS and by Theorem 3.6, $cl(\bar{U}) = cl_\theta(\bar{U})$. Now $\overline{cl(\bar{U})} = \overline{cl_\theta(\bar{U})}$, i.e. $int(U) = int_\theta(U)$ (by Proposition 2.8). Thus $U = int(U) = int_\theta(U)$, and hence U is an IF θ OS in (X, Ψ) . ■

Theorem 3.14. An IFS U in an IFTS X is IF θ O iff for each IFP $c(a, b)$ in X with $c(a, b)qU$, U is an $\varepsilon\theta q$ -nbd of $c(a, b)$.

Proof. Let U be an *IF θ OS* and $c(a, b)$ be an *IFP* in X with $c(a, b)qU$. Then by Proposition 2.12, $c(a, b) \not\leq \bar{U}$. Since \bar{U} is an *IF θ CS*, $c(a, b) \not\leq U = cl_\theta(U)$. Then there exists $\varepsilon q - nbd$ A of $c(a, b)$ such that $cl(A)\tilde{q}\bar{U}$. Hence U is an $\varepsilon\theta q - nbd$ of $c(a, b)$.

Conversely, if $c(a, b) \not\leq \bar{U}$, then by Proposition 2.12, $c(a, b)qU$. Since U is an $\varepsilon\theta q - nbd$ of $c(a, b)$, then there exists $\varepsilon q - nbd$ A of $c(a, b)$ such that $cl(A)\tilde{q}\bar{U}$ and so $c(a, b) \not\leq cl_\theta(\bar{U})$. Hence \bar{U} is an *IF θ CS* and then U is an *IF θ OS*. ■

Theorem 3.15. For any IFS U in an IFTS (X, Ψ) ,
 $cl_\theta(U) = \cap\{cl_\theta(A) : A \in \Psi \text{ and } U \leq A\}$.

Proof. Obviously that $cl_\theta(U) \leq \cap\{cl_\theta(A) : A \in \Psi \text{ and } U \leq A\}$.

Now, let $c(a, b) \in \cap\{cl_\theta(A) : A \in \Psi \text{ and } U \leq A\}$, but $c(a, b) \notin cl_\theta(U)$. Then there exists an $\varepsilon q - nbd$ G of $c(a, b)$ such that $cl(G)\tilde{q}U$ and hence by Proposition 2.12, $U \leq \overline{cl(G)}$. Then $c(a, b) \in cl_\theta(\overline{cl(G)})$ and consequently, $cl(G)q\overline{cl(G)}$ which is not true. Hence the result. ■

Definition 3.16. An IFTS X is said to be intuitionistic fuzzy regular (*IFRS*, for short) iff for each *IFP* $c(a, b)$ in X and each $\varepsilon q - nbd$ U of $c(a, b)$, there exists $\varepsilon q - nbd$ V of $c(a, b)$ such that $cl(V) \leq U$.

Theorem 3.17. An IFTS X is *IFRS* iff for any IFS U in X , $cl(U) = cl_\theta(U)$.

Proof. Let X be an *IFRS*. It is always true that $cl(U) \leq cl_\theta(U)$ for any IFS U . Now, let $c(a, b)$ be an *IFP* in X with $c(a, b) \in cl_\theta(U)$ and let A be an $\varepsilon q - nbd$ of $c(a, b)$. Then by *IFRS* X , there exists $\varepsilon q - nbd$ V of $c(a, b)$ such that $cl(V) \leq A$. Now, $c(a, b) \in cl_\theta(U)$ implies $cl(V)qU$ implies AqU implies $c(a, b) \in cl(U)$. Hence $cl_\theta(U) \leq cl(U)$. Thus $cl_\theta(U) = cl(U)$.

Conversely, let $c(a, b)$ be an *IFP* in X and U an $\varepsilon q - nbd$ of $c(a, b)$. Then $c(a, b) \notin \bar{U} = cl(\bar{U}) = cl_\theta(\bar{U})$. Thus there exists an $\varepsilon q - nbd$ V of $c(a, b)$ such that $cl(V)\tilde{q}\bar{U}$ and then $cl(V) \leq U$. Hence X is *IFRS*. ■

Corollary 3.18 In an *IFRS* (X, Ψ) , an *IFCS* is an *IF θ CS* and hence for any IFS U in X , $cl_\theta(U)$ is an *IF θ CS*.

4. Characterizations for some types of functions in terms of *IF θ -closure*

Definition 4.1. A function $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ is said to be intuitionistic fuzzy strongly θ -continuous (*IFStr- θ* continuous, for short), if for each *IFP* $c(a, b)$ in X and $V \in N_\varepsilon^q(f(c(a, b)))$, there exists $U \in N_\varepsilon^q(c(a, b))$ such that $f(cl(U)) \leq V$.

Theorem 4.2. For a function $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$, the following are equivalent:

- (i) f is *IFStr* – θ continuous.
- (ii) $f(cl_\theta(U)) \leq cl(f(U))$ for each *IFS* U in X .
- (iii) $cl_\theta(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl(V))$ for each *IFCS* V in Y .
- (iv) $f^{-1}(V)$ is an *IF θ CS* in X for each *IFCS* V in Y .
- (v) $f^{-1}(V)$ is an *IF θ OS* in X for each *IFOS* V in Y .

Proof. (i) \implies (ii): Let $c(a, b) \in cl_\theta(U)$ and $B \in N_\varepsilon^q(f(c(a, b)))$. By (i), there exists $A \in N_\varepsilon^q(c(a, b))$ such that $f(cl(A)) \leq B$. Now, using Definition 3.1 and Proposition 2.14, we have $c(a, b) \in cl_\theta(U) \Rightarrow cl(A)qU \Rightarrow f(cl(A))qf(U) \Rightarrow Bqf(U) \Rightarrow f(c(a, b)) \in cl(f(U)) \Rightarrow c(a, b) \in f^{-1}(cl(f(U)))$. Hence $cl_\theta(U) \leq f^{-1}(cl(f(U)))$ and so $f(cl_\theta(U)) \leq cl(f(U))$.

(ii) \implies (iii): Obvious by putting $U = f^{-1}(V)$.

(iii) \implies (iv): Let V be an *IFCS* in Y . By (iii), we have $cl_\theta(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl(V)) = f^{-1}(V)$ which implies that $f^{-1}(V) = cl_\theta(V)$. Hence $f^{-1}(V)$ is an *IF θ CS* in X .

(iv) \implies (v): By taking the complement.

(v) \implies (i): Let $c(a, b)$ be an *IFP* and $B \in N_\varepsilon^q(f(c(a, b)))$. By (v), $f^{-1}(B)$ is an *IF θ OS* in X . Now, using Proposition 2.14, we have $f(c(a, b))qB \Rightarrow c(a, b)qf^{-1}(B) \Rightarrow c(a, b) \notin \overline{f^{-1}(B)}$. Hence $\overline{f^{-1}(B)}$ is an *IF θ CS* such that $c(a, b) \notin \overline{f^{-1}(B)}$. Then there exists $A \in N_\varepsilon^q(c(a, b))$ such that $cl(A) \not\leq \overline{f^{-1}(B)}$ which implies that $f(cl(A)) \leq B$. Hence f is an *IFStr* – θ continuous. ■

Definition 4.3. A function $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ is said to be intuitionistic fuzzy weakly continuous (IFw continuous, for short), iff for each *IFOS* V in Y , $f^{-1}(V) \leq int(f^{-1}(cl(V)))$.

Lemma 4.4. Let $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ be a function. Then for an *IFS* B in Y , $f(\overline{f^{-1}(B)}) \leq \overline{B}$, where equality holds if f is onto.

Proof. Let $B = \{\langle y, \mu_B(y), \gamma_B(y) \rangle : y \in Y\}$ be an *IFS* in Y . From Definition 2.4, if $f^{-1}(y) = \emptyset$, then $(f(\overline{f^{-1}(B)}))(y) = 0 \leq \overline{B}(y)$. But if $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ and since $\overline{f^{-1}(B)} = \langle x, f^{-1}(\mu_B)(x), f^{-1}(\gamma_B)(x) \rangle$ implies $\overline{f^{-1}(B)} = \langle x, f^{-1}(\gamma_B)(x), f^{-1}(\mu_B)(x) \rangle$. Then, we have:

$$f(\overline{f^{-1}(B)})(y) = \langle y, f(f^{-1}(\gamma_B))(y), (1 - f(1 - f^{-1}(\mu_B)))(y) \rangle$$

where

$$f(f^{-1}(\gamma_B))(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} f^{-1}(\gamma_B)(x) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \gamma_B f(x) = \gamma_B(y)$$

and

$$(1 - f(1 - f^{-1}(\mu_B)))(y) = \inf_{x \in f^{-1}(y)} f^{-1}(\mu_B)(y) = \inf_{x \in f^{-1}(y)} \mu_B f(x) = \mu_B(y)$$

i.e.

$$f(\overline{f^{-1}(B)})(y) = \langle y, \gamma_B(y), \mu_B(y) \rangle = \overline{B}(y).$$

If f is onto, then for each $y \in Y$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ and hence we have $f(\overline{f^{-1}(B)}) = \overline{B}$. ■

Lemma 4.5. Let U be an IFS and $c(a, b)$ be IFP in an IFTS (X, Ψ) . Then for a function $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ if $c(a, b) \in U$ then $f(c(a, b)) \in f(U)$.

Proof. Let $c(a, b) \in U = \langle x, \mu_U, \gamma_U \rangle$. Using Definitions 2.10 and 2.13, we have $a < \mu_U(c)$ and $b > \gamma_U(c)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(c)_a(y) < f(\mu_U(U))(y) \quad \text{and} \quad 1 - b < 1 - \gamma_U(c) \\ &\Rightarrow f(c)_a(y) < f(\mu_U(U))(y) \quad \text{and} \quad f(c)_{1-b}(y) < f(1 - \gamma_U(c))(y) \\ &\Rightarrow f(c)_a(y) < f(\mu_U(U))(y) \quad \text{and} \quad (1 - f(c)_{1-b})(y) > (1 - f(1 - \gamma_U(c)))(y) \\ &\Rightarrow f(c(a, b)) \in f(U). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Theorem 4.6. For a function $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$, the following are equivalent:

- (i) f is an IFw continuous.
- (ii) $f(cl(U)) \leq cl_\theta(f(U))$ for each IFS U in X .
- (iii) $cl(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl_\theta(V))$ for each IFS V in Y .
- (iv) $cl(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl(V))$ for each IFOS V in Y .

Proof. (i) \Rightarrow (ii): Let f be an IFw continuous and U any IFS in X . Suppose $c(a, b) \in cl(U)$, then by Lemma 4.5 $f(c(a, b)) \in f(cl(U))$. It is enough to show that $f(c(a, b)) \in cl_\theta(f(U))$. Let $G \in N_\varepsilon^q(f(c(a, b)))$. Then by Proposition 2.14, we have $f^{-1}(G)q c(a, b)$. By IFw continuous of f , $f^{-1}(G) \leq int(f^{-1}(cl(G)))$ and $int(f^{-1}(cl(G))) \in N_\varepsilon^q(c(a, b))$. Since $c(a, b) \in cl(U)$, we have $int(f^{-1}(cl(G))) q U$ and hence $cl(G)q f(U)$. Thus $f(c(a, b)) \in cl_\theta(f(U))$.

(ii) \Rightarrow (iii): Let V be an IFS in Y , then $f^{-1}(V)$ is an IFS in X . By (ii) we have $f(cl(f^{-1}(V))) \leq cl_\theta(f(f^{-1}(V))) \leq cl_\theta(V)$. Hence $cl(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl_\theta(V))$.

(iii) \Rightarrow (iv): Let V be an IFOS in Y . By Theorem 3.6, $cl(V) = cl_\theta(V)$ and by (iii), we have $cl(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl(V))$.

(iv) \Rightarrow (i): Let V be an IFOS in Y , and $cl(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl(V))$. Then from $f^{-1}(V) \leq cl(f^{-1}(V))$ and the fact that V be an IFOS it follows that

$f^{-1}(V) = \text{int}(f^{-1}(V)) \leq \text{int}(cl(f^{-1}(V))) \leq \text{int}(f^{-1}(cl(V)))$. Hence f is an IFw continuous. ■

Theorem 4.7. Let $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ be an IFw continuous function, then:

- (i) $f^{-1}(V)$ is an IFCS in X , for each IF θ CS V in Y .
- (ii) $f^{-1}(V)$ is an IFOS in X , for each IF θ OS V in Y .

Proof. (i) Let V be an IF θ CS in Y , then $V = cl_{\theta}(V)$. By Theorem 4.6(iii), we have $cl(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl_{\theta}(V)) = f^{-1}(V)$. Hence $f^{-1}(V)$ is an IFCS in X .

(i) \Leftrightarrow (ii): Obvious. ■

Definition 4.8. A function $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ is called intuitionistic fuzzy θ -continuous (IF θ -continuous, for short), iff for each IFP $c(a, b)$ in X and each $V \in N_{\varepsilon}^q(f(c(a, b)))$, there exists $U \in N_{\varepsilon}^q(c(a, b))$ such that $f(cl(U)) \leq cl(V)$.

Theorem 4.9. For a function $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$, the following are equivalent:

- (i) f is an IF θ -continuous.
- (ii) $f(cl_{\theta}(U)) \leq cl_{\theta}(f(U))$, for each IFS U in X .
- (iii) $cl_{\theta}(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl_{\theta}(V))$, for each IFS V in Y .
- (iv) $cl_{\theta}(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl(V))$, for each IFOS V in Y .

Proof. (i) \Rightarrow (ii): Let $c(a, b) \in cl_{\theta}(U)$ and $B \in N_{\varepsilon}^q(f(c(a, b)))$. By (i), there is $A \in N_{\varepsilon}^q(c(a, b))$ such that $f(cl(A)) \leq cl(B)$. Now, if $c(a, b) \in cl_{\theta}(U)$ then $cl(A)qU$ so that $f(cl(A))qf(U)$ and hence $cl(B)qf(U)$. Therefore $f(c(a, b)) \in cl_{\theta}(f(U))$ and it follows that $c(a, b) \in f^{-1}(cl_{\theta}(f(U)))$. Thus $cl_{\theta}(U) \leq f^{-1}(cl_{\theta}(f(U)))$ and hence $f(cl_{\theta}(U)) \leq cl_{\theta}(f(U))$.

(ii) \Rightarrow (iii): By (ii), if $f(cl_{\theta}(f^{-1}(V))) \leq cl_{\theta}(f(f^{-1}(V))) \leq cl_{\theta}(V)$, then it follows that $cl_{\theta}(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl_{\theta}(V))$.

(iii) \Rightarrow (iv): Clear by Theorem 3.6.

(iv) \Rightarrow (i): Let $c(a, b)$ be an IFP in X and $V \in N_{\varepsilon}^q(f(c(a, b)))$. Then $f(c(a, b)) \notin cl(\overline{cl(V)})$, and hence $c(a, b) \notin f^{-1}(cl(\overline{cl(V)}))$. By (iv), we have $c(a, b) \notin cl_{\theta}(f^{-1}(\overline{cl(V)}))$ and hence there exists $U \in N_{\varepsilon}^q(c(a, b))$ such that $cl(U) \not\subseteq f^{-1}(cl(V)) = f^{-1}(cl(V))$ which implies $f(cl(U)) \leq cl(V)$. Thus f is an IF θ -continuous. ■

Theorem 4.10. Let $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ be a function. If (X, Ψ) is an IFEDS, then the following are equivalent:

- (i) f is an $IF\theta$ -continuous.
- (ii) $f^{-1}(V)$ is an $IF\theta CS$ in X for each $IF\theta CS$ V in Y .
- (iii) $f^{-1}(V)$ is an $IF\theta OS$ in X for each $IF\theta OS$ V in Y .

Proof. (i) \implies (ii): Let V be an $IF\theta CS$ in Y . Since f is an $IF\theta$ -continuous, then by (iii) in Theorem 4.9 we have $cl_\theta(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl_\theta(V)) = f^{-1}(V)$ which implies that $f^{-1}(V) = cl_\theta(f^{-1}(V))$. Hence $f^{-1}(V)$ is an $IF\theta CS$ in X .

(ii) \Leftrightarrow (iii): Obvious.

(ii) \implies (i): Let V be an $IFOS$ in Y . Then by Theorem 3.6 $cl(V) = cl_\theta(V)$ which is an $IF\theta CS$ by Theorem 3.12. From (ii), $f^{-1}(cl(V)) = f^{-1}(cl_\theta(V))$ is an $IF\theta CS$ in X . Since $f^{-1}(V) \leq f^{-1}(cl(V))$, then $cl_\theta(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl(V))$. Hence f is an $IF\theta$ -continuous. ■

Definition 4.11. A function $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ is said to be intuitionistic fuzzy $\lambda\theta$ -continuous ($IF\lambda\theta$ -continuous, for short), if for each IFP $c(a, b)$ in X and $V \in N_\varepsilon^{\lambda q}(f(c(a, b)))$, there exists $U \in N_\varepsilon^{\theta q}(c(a, b))$ such that $f(U) \leq V$.

Definition 4.12. Let U be an IFS of an IFTS X Then:

(i) The λ -closure of U is denoted and defined by:

$$cl_\lambda(U) = \wedge \{K : K \text{ is } IF\lambda CS \text{ in } X \text{ and } U \leq K\}.$$

(iii) The λ -interior of U is denoted and defined by:

$$int_\lambda(U) = \vee \{G : G \text{ is } IF\lambda OS \text{ in } X \text{ and } G \leq U\}.$$

Theorem 4.13. Let $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ be a function. then the following are equivalent:

- (i) f is an $IF\lambda\theta$ -continuous.
- (ii) $f^{-1}(V)$ is an $IF\theta OS$ in X , for each $IF\lambda OS$ V in Y .
- (iii) $f^{-1}(H)$ is an $IF\theta CS$ in X , for each $IF\lambda CS$ H in Y .
- (iv) $cl_\theta(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl_\lambda(V))$, for each IFS V in Y .
- (v) $f^{-1}(int_\lambda(G)) \leq int_\theta(f^{-1}(G))$, for each IFS G in Y .

Proof. (i) \implies (ii) Let V be an $IF\lambda OS$ in Y and $c(a, b)$ be IFP in X such that $c(a, b)qf^{-1}(V)$. Since f is $IF\lambda\theta$ continuous, there exists an $U \in N_\varepsilon^{\theta q}(c(a, b))$ such that $f(U) \leq V$. Then $c(a, b)qU \leq f^{-1}f(U) \leq f^{-1}(V)$ which shows that $f^{-1}(V) \in N_\varepsilon^{\theta q}(c(a, b))$ and then is an $IF\theta OS$ of X .

(ii) \implies (iii) by taking the complement.

(iii) \implies (iv) Let V be an IFS in Y Since $V \leq cl_\lambda(V)$, then $f^{-1}(V) \leq f^{-1}(cl_\lambda(V))$. Using (iii), $f^{-1}(cl_\lambda(V))$ is an $IF\theta CS$ in X . Thus $cl_\theta(f^{-1}(V)) \leq cl_\theta(f^{-1}(cl_\lambda(V))) = f^{-1}(cl_\lambda(V))$.

(iv) \implies (v) Using (iv) $cl_\theta(f^{-1}(V)) \leq f^{-1}(cl_\lambda(V))$, then

$$cl_\theta(f^{-1}(V)) \geq f^{-1}(cl_\lambda(V)).$$

Hence $int_\theta(f^{-1}(V)) \geq f^{-1}(cl_\lambda(V))$.

Thus $f^{-1}(int_\lambda(\bar{V})) \leq int_\theta(f^{-1}(\bar{V}))$.

Put $G = \bar{V}$, then $f^{-1}(int_\lambda(G)) \leq int_\theta(f^{-1}(G))$

(v) \implies (i) Let V be an $IF\lambda OS$ in Y . Then $int_\lambda(V) = V$. Using (v), $f^{-1}(V) \leq int_\theta(f^{-1}(V))$. Hence $f^{-1}(V) = int_\theta(f^{-1}(V))$ i.e. $f^{-1}(V)$ is an $IF\theta OS$ in X . Let $c(a, b)$ be any IFP in $f^{-1}(V)$. Then $c(a, b)qf^{-1}(V)$, hence $f(c(a, b)qf^{-1}(V)) \leq V$. Thus for any IFP $c(a, b)$ and each $V \in N_\varepsilon^{\lambda q}(f(c(a, b)))$, there exists $U = f^{-1}(V) \in N_\varepsilon^{\theta q}(c(a, b))$ such that $f(U) \leq V$. Thus f is $IF\lambda\theta$ continuous function. ■

Theorem 4.14. Let f be a bijective function from an $IFTS(X, \Psi)$ into an $IFTS(Y, \Phi)$. Then f is an $IF\lambda\theta$ continuous iff $int_\lambda(f(U)) \leq f(int_\theta(U))$, for each IFS U of X .

Proof. (\implies): Let f be an $IF\lambda\theta$ continuous function and U be an IFS in X . Hence $f^{-1}(int_\lambda(f(U)))$ is an $IF\theta OS$ in X . Since f is injective and using Theorem 4.13(v), we have: $f^{-1}(int_\lambda(f(U))) \leq int_\theta(f^{-1}(f(U))) = int_\theta(U)$. Since f is surjective,
 $f f^{-1}(int_\lambda(f(U))) \leq f(int_\theta(U))$. i.e. $int_\lambda(f(U)) \leq f(int_\theta(U))$.

(\impliedby): Let V be an $IF\lambda OS$ in Y . Then $V = int_\lambda(V)$. Using the hypothesis, we have: $V = int_\lambda(V) = int_\lambda(f f^{-1}(V)) \leq f(int_\theta(f^{-1}(V)))$, which implies that $f^{-1}(V) \leq f^{-1}f(int_\theta(f^{-1}(V)))$. From the fact that f is injective, we have: $f^{-1}(V) \leq int_\theta(f^{-1}(V))$. Hence $f^{-1}(V) = int_\theta(f^{-1}(V))$ i.e. $f^{-1}(V)$ is an $IF\theta OS$ in X . Thus f is $IF\lambda\theta$ continuous. ■

Theorem 4.15. Let $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ be a bijective function. Then f is an $IF\lambda\theta$ continuous iff $f(cl_\theta(U)) \leq cl_\lambda(f(U))$, for each IFS U of X .

Proof. Similar to the proof of Theorem 4.14. ■

Remark 4.16. From the above definitions, one can illustrate the following implications:

$$IF\lambda\theta\text{-continuous} \Rightarrow IFstr\theta\text{-continuous} \Rightarrow IF\text{-continuous} \Rightarrow IFw\text{-continuous} \\ \Downarrow \\ IF\theta\text{-continuous}$$

Example 4.17. Let $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ and
 $A = \langle x, (\frac{1}{0.4}, \frac{2}{0.5}, \frac{3}{0.5}), (\frac{1}{0.3}, \frac{2}{0.4}, \frac{3}{0.4}) \rangle$, $B = \langle x, (\frac{1}{0.5}, \frac{2}{0.5}, \frac{3}{0.5}), (\frac{1}{0.2}, \frac{2}{0.3}, \frac{3}{0.1}) \rangle$,
 $U = \langle y, (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.5}), (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.3}) \rangle$, $V = \langle y, (\frac{a}{0.4}, \frac{b}{0.2}, \frac{c}{0.4}), (\frac{a}{0.5}, \frac{b}{0.4}, \frac{c}{0.5}) \rangle$.

Then the family $\Psi = \{0, 1, A, B\}$ of IFS's in X is an IFT on X and the family $\Phi = \{0, 1, U, V\}$ of IFS's in Y is an IFT on Y . Let $f : (X, \Psi) \rightarrow (Y, \Phi)$ be a function defined as follows: $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ and $f(c) = 1$. Then $f^{-1}(U) \subseteq \text{int}(f^{-1}(cl(U))) = 1$ and $f^{-1}(V) \subseteq \text{int}(f^{-1}(cl(V))) = A$. Thus f is an IFw continuous but not IF-continuous.

Remark 4.18. From the above example, one can show that IFw continuous does not implies each of the concepts IF $\lambda\theta$ -continuous, IFstr θ -continuous and IF θ -continuous.

Acknowledgment. The authors remain thankful to the referee for his kind comments leading to the revision of the paper to the present form.

References

[1] Atanassov K., Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 20(1986), 87-96.
 [2] Coker D., An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 88(1997),81-89.
 [3] Coker D. and Demirci M., An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces in Sostak's sense, BUSEFAL, Vol. 67, 1996, 67-76.
 [4] Coker D. and Demirci M., On intuitionistic fuzzy points, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 1(1995), 79-84.
 [5] Gurcay H., Coker D. and Es A.H., On fuzzy continuity in intuitionistic fuzzy topological spaces, J. Fuzzy Math.5(2) (1997), 365-378.
 [6] Hanafy I. M., On fuzzy γ -open sets and fuzzy γ -continuity in intuitionistic fuzzy topological spaces, J.Fuzzy Math. Vol.10 No.1(2002), 9-19.
 [7] Hanafy I. M. and Al-Saadi H. S., Strong forms of continuity in fuzzy topological spaces, Kyungpook Math. J, 41(2001), 137-147.
 [8] Mukherjee M. N. and Ghosh B., Some stronger forms of fuzzy continuous mappings on fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems 38(1990), 375-387.
 [9] Mukherjee M. N.and Sinha S. P., On some near of fuzzy continuous functions between fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems 34(1990), 245-254.
 [10] Zadeh L. A., Fuzzy sets, Inform. and Control 8(1965), 338-353.

I. M. HANAFY, A. M. ABD EL-AZIZ AND T. M. SALMAN
 DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF EDUCATION,
 SUEZ CANAL UNIVERSITY, EL-ARISH, EGYPT.
 e-mail: ihanafy@hotmail.com, tarek00.salman@hotmail.com

A semi-discrete high resolution scheme for nonlinear scalar conservation laws

Yousef Hashem Zahran

Abstract

The purpose of this paper is twofold. Firstly we carry out an extension of the fully discrete third order TVD scheme, for linear case, presented in [8] to nonlinear scalar hyperbolic conservation laws for one and two dimensions. Secondly, we propose a semi-discrete version of the scheme. Time evolution is carried out by the third order TVD Runge-Kutta method. The advantages of the scheme are its simplicity, third order, non-oscillatory and that can be used for large time steps which can save more time. Examples and convergence rates are presented for the Burger equation for one and two dimensions which confirm the high resolution content of the proposed schemes. We use exact solutions and other methods to validate the results.

Key words: Conservation laws, difference methods, TVD schemes, Burger equation, Runge-Kutta method.

1 Introduction

Hyperbolic conservation laws describe a variety of phenomena in several disciplines, such as physics, chemistry, environmental sciences and many others. Analytical solutions of the problems are available under very special circumstances and one thus has to rely on numerical methods for solving problems of practical interest. It is well known that the solutions of hyperbolic equations may develop discontinuities in finite time even if the initial condition is smooth. A major difficulty in the numerical approximation of nonlinear hyperbolic conservation laws is the presence of discontinuities in the solution. Traditional schemes generate spurious oscillations in the numerical solution near these discontinuities. Standard methods based on central differencing together with artificial viscosity have often been replaced, during the last few years, by the so-called total variation diminishing (TVD) schemes. The main property of a TVD scheme is that, unlike monotone schemes, it can be second order accurate (or higher) and oscillation-free across discontinuities (when applied to nonlinear equations).

A third order TVD finite difference scheme is presented in [8], which has so far been applied only to linear systems with constant coefficients. The scheme is conservative, one step, explicit and fully discrete, requiring only the computation of numerical fluxes to advance the solution by a full time step. In this paper we will present a generalization of the scheme for the case of nonlinear scalar case for one and two dimensions by using the technique in [7].

It is well known that the semi-discrete schemes are especially effective when they combine high resolution, non-oscillatory spatial discretisation with high order, large step size ordinary differential equation solvers for their time evolution.

In this paper we propose a semi-discrete version of the scheme with Runge-Kutta method for time discretisation. This scheme has the advantages of simplicity, third order, non-oscillatory and that can be used for large time steps which can save more time.

The paper is organized as follows. In section 2, we give a brief description of the third order TVD scheme for linear equations. In section 3 we describe the extension of the fully discrete scheme for nonlinear equations. In section 4 we construct the semi-discrete version of the scheme with Runge-Kutta method for time discretisation. Extension of the semi discrete scheme for two dimensions problems are presented in section 5. Numerical tests on the nonlinear equation with different initial conditions are performed in section 6. The numerical results are compared with exact solutions and other methods.

2 Third order fully discrete TVD scheme

In this section we review the fully discrete third order difference scheme presented in [8].

The initial value problem (IVP) for the one-dimensional scalar hyperbolic conservation law is considered, namely

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.2a)$$

Here u is the unknown function and $f(u)$ is the physical flux.

First let us consider the linear case $f(u) = au$, so that $f'(u) = a$ is a constant wave propagation speed. If the initial data consists of two constant states,

$$u_0 = \begin{cases} u_L & x < 0 \\ u_R & x > 0 \end{cases} \quad (2.2b)$$

equation (2.1) with (2.2b) is called the usual Riemann problem (RP).

A uniform x - t grid, with mesh size Δx in the x -direction and Δt in the t -direction, is introduced with a fixed ratio $\lambda = \Delta t/\Delta x$. Let u_j^n denote the numerical solution obtained at $(x, t) = (j\Delta x, n\Delta t)$.

The third order conservation numerical scheme introduced in [8] has the form (for constant a)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left[f_{j+1/2} - f_{j-1/2} \right] \quad (2.3)$$

with the numerical flux

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2} (au_j + au_{j+1}) - \frac{1}{2} |a| \Delta_{j+1/2} u + |a| \left\{ A_0 \Delta_{j+1/2} u + A_1 \Delta_{j+L+1/2} u + A_2 \Delta_{j+M+1/2} u \right\} \quad (2.4)$$

where

$$A_0 = \frac{1}{2} - \frac{|c|}{4}, \quad A_1 = -\frac{|c|}{8} - \frac{c^2}{8}, \quad A_2 = -\frac{|c|}{8} + \frac{c^2}{8} \quad (2.5)$$

$L = -1$, $M = 1$ for $c > 0$ and $L = 1$, $M = -1$ for $c < 0$, where $c = \lambda a$ is the Courant number and $\Delta_{j+1/2} u = u_{j+1} - u_j$.

The scheme is stable if and only if $|c| \leq \sqrt{2}$.

This scheme, being third order accurate scheme, is not TVD. It can be made TVD by replacing (2.4) with the more general form

$$f_{j+1/2} = \frac{1}{2} (au_j + au_{j+1}) - \frac{1}{2} |a| \Delta_{j+1/2} u + |a| \left\{ A_0 \Delta_{j+1/2} u + A_1 \Delta_{j+L+1/2} u \right\} \varphi_j + |a| A_2 \Delta_{j+M+1/2} u \phi_{j+M} \quad (2.6)$$

where ϕ_j and ϕ_{j+M} are flux limiter functions.

Theorem: Scheme (2.3) with (2.6) is TVD for $|c| \leq 1$ if the limiter function is determined by

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{(1-|c|)\theta_j}{\eta(A_1\theta_j + A_0 - A_2)} & \text{for } 0 \leq \theta_j \leq \theta^L \\ 1 & \text{for } \theta^L \leq \theta_j \leq \theta^R \\ \frac{1-|c| + \eta A_2 \phi_{j+M} / \theta_j^*}{\eta(A_1\theta_j + A_0)} & \text{for } \theta_j > \theta^R \\ 0 & \text{for } \theta_j < 0 \end{cases} \quad (2.7a)$$

$$\phi_{j+M} = \begin{cases} \eta\theta_{j+M} & \text{for } 0 \leq \theta_{j+M} < 0.5 \\ 1 & \text{for } \theta_{j+M} > 0.5 \\ 0 & \text{for } \theta_j = 0 \end{cases} \quad (2.7b)$$

where $\theta^L = \frac{\eta(A_0 - A_2)}{1 - |c| - \eta A_1}$, $\theta^R = \frac{1 - |c| - \eta(A_0 - A_2 \phi_{j+M} / \theta_j^*)}{\eta A_1}$, and θ_j is called the local flow parameter and is defined by

$$\theta_j = \frac{\Delta_{j+L+1/2} u}{\Delta_{j+1/2} u} \quad (2.7c)$$

and θ_j^* is called the upwind-downward flow parameter and is given by

$$\theta_j^* = \frac{\Delta_{j+L+1/2} u}{\Delta_{j+M+1/2} u} \quad (2.7d)$$

and η is defined by

$$\eta = \begin{cases} 1 - |c| & \text{for } 0 \leq |c| < 1/2 \\ |c| & \text{for } 1/2 \leq |c| \leq 1 \end{cases} \quad (2.7e)$$

Proof : See [4] and [8].

3 Extension to nonlinear scalar hyperbolic conservation laws

In this section we extend the scheme (2.3) with (2.6) to nonlinear scalar problems

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (3.1)$$

For nonlinear equations the TVD procedure is empirical, but in practice it works very well as it will be demonstrated in the next sections. For more details see [4], [6] and [7]. Here we use the technique presented in [7]. Define the wave speed

$$a_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\Delta_{j+\frac{1}{2}} f}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} u} & \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \neq 0 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{u_j} & \Delta_{j+\frac{1}{2}} u = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Now we redefine the θ_j in (2.7c) as

$$\theta_j = \frac{\left| a_{j+L+\frac{1}{2}} \right| \Delta_{j+L+\frac{1}{2}} u}{\left| a_{j+\frac{1}{2}} \right| \Delta_{j+\frac{1}{2}} u} \quad (3.3a)$$

and

$$\theta_j^* = \frac{\left| a_{j+L+1/2} \right| \Delta_{j+L+1/2} u}{\left| a_{j+M+1/2} \right| \Delta_{j+M+1/2} u} \quad (3.3b)$$

Here $c_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{j+\frac{1}{2}}$ is the Courant number.

Unlike the constant coefficient case, $a_{j+\frac{1}{2}}$ and $a_{j-\frac{1}{2}}$ are not always the same sign. Then the numerical flux (2.6) takes the form

$$\begin{aligned} f_{j+1/2} &= \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2} \left| a_{j+\frac{1}{2}} \right| \Delta_{j+1/2} u + \\ &\quad \left| a_{j+\frac{1}{2}} \right| \left\{ A_0 \Delta_{j+1/2} u + A_1 \Delta_{j+L+1/2} u \right\} \phi_j \\ &\quad + \left| a_{j+\frac{1}{2}} \right| A_2 \Delta_{j+M+1/2} u \phi_{j+M} \end{aligned} \quad (3.4)$$

After considering all the possible combinations of the signs of $a_{j+\frac{1}{2}}$ and $a_{j-\frac{1}{2}}$, a set of sufficient conditions on ϕ can still be of the form similar to (2.7) (see [8]) and is given by

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{(1 - |a_{j+\frac{1}{2}}|)\theta_j}{\eta(A_1\theta_j + A_0 - A_2)} & \text{for } 0 \leq \theta_j \leq \theta^L \\ 1 & \text{for } \theta^L \leq \theta_j \leq \theta^R \\ \frac{1 - |a_{j+\frac{1}{2}}| + \eta A_2 \phi_{j+M} / \theta_j^*}{\eta(A_1\theta_j + A_0)} & \text{for } \theta_j > \theta^R \\ 0 & \text{for } \theta_j < 0 \end{cases} \quad (3.5a)$$

where

$$\phi_{j+M} = \begin{cases} \eta\theta_{j+M} & \text{for } 0 \leq \theta_{j+M} < 0.5 \\ 1 & \text{for } \theta_{j+M} > 0.5 \\ 0 & \text{for } \theta_j = 0 \end{cases} \quad (3.5b)$$

$$\text{where } \theta^L = \frac{\eta(A_0 - A_2)}{1 - |a_{j+\frac{1}{2}}| - \eta A_1}, \quad \theta^R = \frac{1 - |a_{j+\frac{1}{2}}| - \eta(A_0 - A_2 \phi_{j+M} / \theta_j^*)}{\eta A_1}$$

where θ_j and θ_j^* are defined in (3.3).

Observe that when $a_{j+\frac{1}{2}} = 0$, the scheme has zero dissipation. One way is to approximate $a_{j+\frac{1}{2}}$ by a Lipschitz continuous function [2]. For example, instead of using (3.4), one can use

$$\begin{aligned} f_{j+1/2} &= \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2}\psi(a_{j+\frac{1}{2}})\Delta_{j+1/2}u \\ &+ \psi(a_{j+\frac{1}{2}})\left\{A_0\Delta_{j+1/2}u + A_1\Delta_{j+L+1/2}u\right\}\phi_j \\ &+ \psi(a_{j+\frac{1}{2}})A_2\Delta_{j+M+1/2}u\phi_{j+M} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Here ψ is a function of $a_{j+\frac{1}{2}}$ and is defined as

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4\varepsilon} + \varepsilon & \text{for } |x| < 2\varepsilon \\ |x| & \text{for } |x| \geq 2\varepsilon \end{cases} \quad \text{where } 0 \leq \varepsilon \leq 0.5.$$

For the third order TVD scheme the linear stability condition reads $CFL \leq 1$. Here CFL denotes the maximum Courant number over all cells at a given time step:

$$CFL = \max(S_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x})$$

where S_j^n is the maximum propagation speed at time level n .

4 Semi-discrete formulation

Another way to discretize (2.1) is to keep the time variable t continuous and consider semi-discrete scheme

$$\frac{d}{dt}(u_j(t)) = -\frac{1}{\Delta x} \left[f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}} \right] = L_j(u) \quad (4.1)$$

where $f_{j+\frac{1}{2}}$ is defined in (3.6).

The time discretisation will be implemented by a third order TVD Runge-Kutta method developed in [1].

This Runge-Kutta method is used to solve a system of initial value of ordinary differential equations written as

$$\frac{du}{dt} = L(u), \quad (4.2)$$

where $L(u)$ is an approximation to the derivative $(-f(u)_x)$ in the differential equation (2.1).

In [1], schemes up to third order were found to satisfy the TVD conditions. The optimal third order TVD Runge-Kutta method is given by

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

In [1], it has been shown that, even with a very nice second order TVD spatial discretization, if the time discretization is by a non-TVD but linearly stable Runge-Kutta method, the result may be oscillatory. Thus it would always be safer to use TVD Runge-Kutta methods for hyperbolic problems.

5 Extension to multidimensional problems

The present schemes can be applied to multidimensional problems by means of space operator splitting. The original idea is attributed to Strang [5]. As an example we consider the two dimensional Burger equation

$$U_t + [F(U)]_x + [G(U)]_y = 0 \quad (5.1)$$

where $F(U) = G(U) = \frac{1}{2}U^2$

There are several versions of space splitting. Here we take the simplest one, whereby the two dimensional problem (5.1) is replaced by the sequence of two one-dimensional problems

$$U_t + [F(U)]_x = 0 \quad (5.2a)$$

$$U_t + [G(U)]_y = 0 \quad (5.2b)$$

If the data U^n at time level n for problem (9.1) are given, the solution U^{n+1} at time level $n+1$ is obtained in the following two steps:

- a) solve equation (5.2a) with data U^n to obtain an intermediate solution \bar{U}^{n+1} (x -sweep);
- b) solve equation (5.2b) with data \bar{U}^{n+1} to obtain the complete solution U^{n+1} (y -sweep);

For three dimensional problems there is an extra z -sweep.

6 Numerical experiments

In this section we present the results of our numerical experiments for the fully discrete third order TVD scheme (2.3) with (3.6) and semi-discrete scheme (4.1). for time evolution we use the third order Runge-Kutta method (4.3) reviewed and developed in the previous section. We compare these methods with the third order finite difference scheme presented in [3].

We compare the following schemes:

1. LT3 : the fully discrete third order presented in [3].
2. TVD3 : the fully discrete third order scheme (2.3) with (3.6).
3. STVD3 : the semi-discrete scheme (4.1) with (4.3).

For each scheme we select a value of CFL that satisfies the stability condition: LT3 scheme has CFL = 0.33 and the other schemes CFL= 0.8.

6.1 Accuracy test

Example 1: We solve the nonlinear scalar Burger equation

$$u_t + \left[\frac{1}{2}u^2\right]_x = 0 \quad (6.1)$$

subject to two periodic initial data

$$u_0(x) = 1 + 0.5 \sin(\pi x) \quad (6.2)$$

on $[-1, 1]$. When $t = \frac{1}{\pi}$ the solution is still smooth, and the errors and numerical orders of accuracy are shown in Table 1. It can be seen that STVD3 scheme is the most accurate and it is less expensive because it enjoys a less restrictive CFL condition ($\lambda = 0.8$ versus $\lambda = 0.33$). Comparing the magnitudes of the errors with the results obtained with LT3 and TVD3, we note that our new scheme STVD3 scheme yields smaller errors than the others.

6.2 Test cases with shocks

Example 2: We solve the Burger equation (5.1) with periodic initial condition

$$u_0(x) = 0.5 + \sin(\pi x) \quad (6.3)$$

We plot the results at time $t = \frac{1.5}{\pi}$ when the shock has already appeared in the solution. In Figure 1 the solutions of LT3 method (a), TVD3 (b) and STVD3 (c) with 100 grid points are shown. The solid line is the exact solution and symbols are the numerical solutions.

Note that the results obtained by LT3 are satisfactory while the results by TVD3 are better. The solutions obtained by STVD3 scheme are almost indistinguishable from exact solutions.

Example 3: We solve (6.1) with initial condition

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1 & |x| \geq 0.5 \\ 2 & |x| < 0.5 \end{cases} \quad (6.4)$$

The breakdown of the initial discontinuity results in a shock wave with speed 0.5 and a rarefaction with a sonic point at $x = 0.5$. The exact solution consists of rarefaction wave (left) and shock wave (right). At $t = 2/3$ the rarefaction hits the shock and then the solution has a rarefaction wave only. Using $x = 0.01$. The numerical solution is displayed at $t = 0.4$ (before collision of the head of the rarefaction with the shock) and $t = 1.1$ (after collision). Results are shown in Figures 2 and 3 respectively, where the numerical solutions, shown by symbols, are compared with the exact solution, shown by a full line. Figure 2 shows the computed results at $t = 0.4$ using LT3, TVD3 and STVD3 schemes and Figure 3 shows the results at $t = 1.1$. Notice that the numerical solution obtained by STVD3 are indistinguishable from exact solutions.

Example 4: We finally show the results obtained with Burger's equation in Figure 4. The initial condition is $U_0(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y)$ on $(0, 1) \times (0, 1)$. We consider periodic boundary conditions. Figure 4 shows the results at $t = 2$ using TVD3 method (left) and STVD3 method (right). Also Figure 5 shows the results at $t = 4$ using TVD3 (left) and STVD3 (right). We note, from the figures 4 and 5, lack of spurious oscillations while the shocks are well resolved.

References

- [1] S. Gottlieb and C.W. Shu, Total variation diminishing Runge-Kutta schemes, *Math.comp.* 67(1998) pp.73-85.
- [2] Harten, A., High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 49(1983) pp 357-393.
- [3] Liu X.D. and Tadmor E. Third order non-oscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws *J. Numer.Math.*, 79(1998) pp. 397-425.
- [4] Shi J. and Toro E.F., Fully discrete high order shock capturing numerical schemes, *Int.J.Numer.Methods fluids*,23(1996) pp 241-269.
- [5] Strang, G. On the construction and comparison of finite difference schemes *SIAM J. Numer. Anal.*5 (1968) pp.506-517.
- [6] Toro E.F. A weighted average flux methods for hyperbolic conservation laws *Proc.R.Soc.Lond.A.*(1989) pp 401-418.
- [7] Yee H.C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications *J. Comput. Phys.* 68 (1987) pp. 151-179.
- [8] Yousef H. Zahran Third order TVD scheme for hyperbolic conservation laws *J. Application of Mathematics* (accepted for publication).

N	LT3		TVD3		STVD3	
	L^1 error	L^1 order	L^1 error	L^1 order	L^1 error	L^1 order
80	0.4281E-4		0.5492E-4		0.1799E-4	
160	0.5282E-5	2.87	0.6908E-5	2.991	0.2229E-5	3.0125
320	0.9049E-6	2.69	0.9820E-6	2.814	0.2774E-6	3.0065
640	0.1591E-6	2.51	0.1621E-6	2.599	0.3463E-7	3.0020

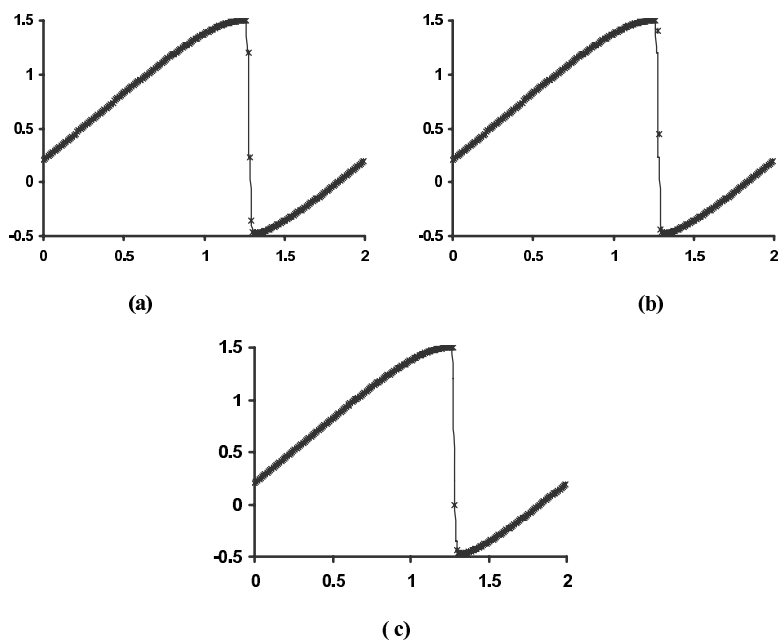


Figure 1: Solution of example 2 by LT3 scheme (a) TVD3 scheme (b) and STVD3 scheme (c).

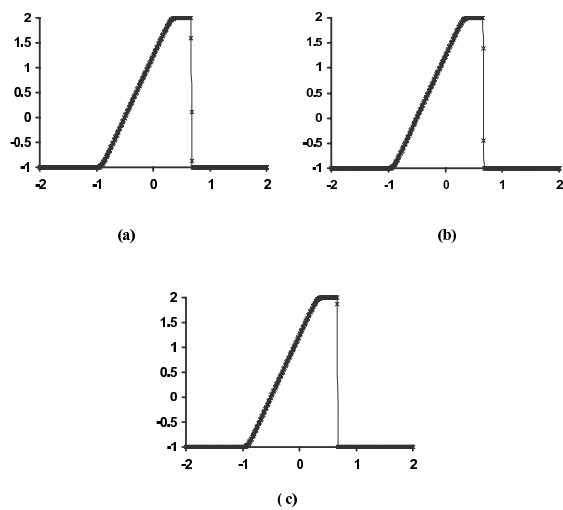


Figure 2: Solution of example 3 at $t = 0.4$ by LT3 scheme (a), TVD3 scheme (b) and STVD3 scheme (c).

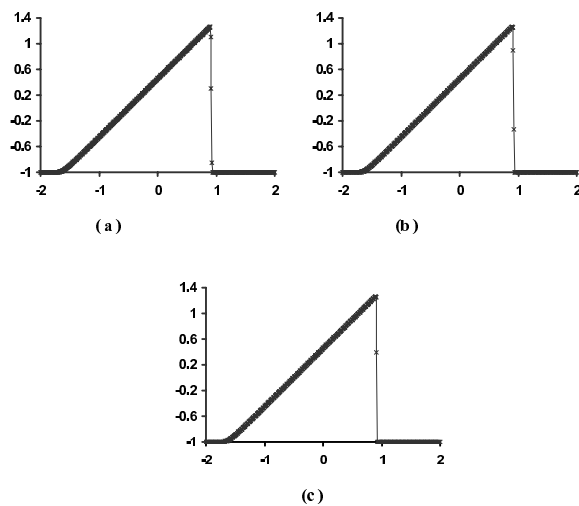


Figure 3: Solution of example 3 at $t = 1.1$ by LT3 scheme (a), TVD3 (b) and STVD3 scheme (c).

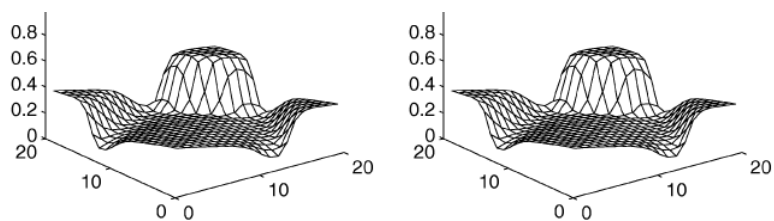


Figure 4: The solution of two dimensional equation at $t = 2$ using TVD3 (left) and STVD3 (right) methods.

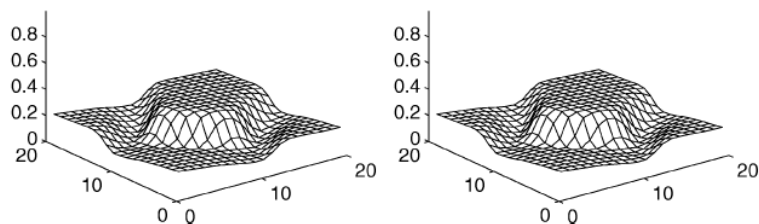


Figure 5: The solution of two dimensional equation at $t = 4$ using TVD3 (left) and STVD3 (right) methods.

YUSEF HASHEM ZAHRAH
PHYSICS AND MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF ENGINEERING, PORT SAID, EGYPT

EDUCACIÓN

La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica

J. M. Sigarreta, J. M. Rodríguez & P. Ruesga

Resumen

Este artículo aborda la evolución de la resolución de problemas matemáticos desde una perspectiva histórico-didáctica, tomando como guía cuatro etapas fundamentales: la Antigüedad, partiendo desde el 2000 a. n. e hasta la caída del Imperio Romano en el siglo V n. e; se sigue con la Edad Media, hasta el siglo XV; luego la Era Moderna, que finaliza con la alborada del siglo XX; y se concluye en la época Contemporánea.

Palabras claves: Solución de Problemas; Historia de la Matemática.

1. Introducción

La resolución de problemas matemáticos siempre ha sido el corazón de la actividad matemática. Su evolución histórica revela la plena relación que ha tenido esta actividad con la enseñanza-aprendizaje de la propia Matemática.

Desde la Antigüedad se ha ido transmitiendo todo el caudal de conocimientos acumulados por la humanidad durante milenios; nuestra ciencia no ha sido ajena a esta transferencia, y se ha matizado por la implementación de diferentes métodos a la hora de realizar tal acción.

En el trabajo se pone de manifiesto que la didáctica de la resolución de problemas matemáticos y en general la Didáctica de la Matemática es una disciplina científica en plena formación. En el estudio de la evolución histórico-didáctica de la resolución de problemas se observa que en sus inicios muchos conceptos fueron manejados de manera intuitiva. Entre estos conceptos figuraron los de Matemática escolar, problemas matemáticos, entre otros. El propio desarrollo de técnicas para la resolución de problemas precisó que dichos conceptos dejaran de ser transparentes y pasaran a ser objeto de estudio en sí mismos.

A continuación se abordará la evolución antes mencionada, tomando como guía cuatro etapas fundamentales: la Antigüedad, partiendo desde el siglo VI a. n. e hasta la caída del Imperio Romano en el siglo V n. e; se sigue con la Edad Media, hasta el siglo XV; luego la Era Moderna, que finaliza con la alborada del siglo XX; y se concluye en la época Contemporánea.

2. La resolución de problemas en la Antigüedad

La aparición de la escuela se remonta a la misma época de la invención de la escritura. Investigaciones históricas demuestran que la enseñanza de la aritmética se iniciaba en una fase temprana en la vida escolar, al mismo tiempo que la lectura y la escritura; se debe aclarar que las Matemáticas eran consideradas elementos importantes en la formación de los escribas y que la escuela respondía a las necesidades de esa sociedad, es decir, a las necesidades del momento histórico concreto, aunque estaba dirigida a grupos muy restringidos.

De la lectura de un documento histórico en que se loa a uno de los reyes del tercer imperio de Ur en Mesopotamia se puede inferir que la finalidad fundamental de los problemas matemáticos propuestos era preparar al hombre para el cálculo. El soberano proclamaba muy orgulloso “Sé sumar y restar a la perfección, soy diestro en cálculo y en contabilidad”. Muchos autores coinciden en plantear que fue el matemático griego Herón, quien vivió en Alejandría aproximadamente entre los siglos II y I a.n.e, el primero en incluir ejercicios con texto en sus trabajos; sin embargo, se conocen, de hecho, algunos textos matemáticos escolares más antiguos. Estos textos son de dos tipos: de tablas y de problemas; estos últimos proponen, por ejemplo, este “problema tipo”, hallado en un papiro egipcio de mediados del segundo milenio: En una pirámide el lado tiene 140 codos y la inclinación es de 5 palmos y 1 dedo por codo. ¿Cuál es la altura?

Tanto en las tablillas de barro, como en los papiros más antiguos, se puede encontrar estos tipos de problemas totalmente “idealizados”, que evidentemente fueron concebidos con el ánimo de enseñar los rudimentos aritméticos elementales. Los textos matemáticos en su generalidad se inician con una exposición del problema matemático que se trata de resolver, y los datos se representan como cifras concretas y no como variables abstractas. Sigue a la exposición del problema la forma de ir solucionándolo paso por paso, para llegar finalmente al resultado. Cada nuevo paso se basa en el resultado de un paso anterior, o bien en uno de los datos facilitados al principio. El “alumno” quedaba así capacitado para resolver cualquier otro problema del mismo tipo que pudiera presentársele. Además, estos problemas solían reagruparse de modo que las técnicas aprendidas pudieran aplicarse inmediatamente en otros casos (entiéndase la misma presentación teórica con otros números). Según Boyer: “los cientos de problemas de tipos muy parecidos que aparecen en las tablillas cuneiformes tienen todo el aspecto de ser ejercicios que debían resolver los escolares siguiendo ciertos métodos conocidos o reglas generales.” (Boyer, C. B. 1986, p. 66).

El objetivo didáctico que se persigue con la utilización de los problemas resulta evidente con la explicación anterior. Además, la estructura de los textos de los problemas y las tablas permiten abordar desde otra óptica la cuestión de la abstracción y la generalización en las Matemáticas. En conclusión el planteamiento de los egipcios y babilonios consiste en crear una cadena de ejemplos

típicos gracias a la cual es posible, por interpolación, establecer una relación entre un problema nuevo y los ya conocidos (principio de analogía).

Al penetrar en la Grecia se conoce que, aunque el cálculo se enseñaba en la escuela elemental, la sociedad griega se mostraba, realmente, poco interesada por la formación intelectual y técnica de los niños y jóvenes. Al igual que los textos babilonios o egipcios, los problemas planteados se refieren explícitamente a una situación concreta, incluso esta es muchas veces un artificio con fines pedagógicos. Se puede plantear que la aparición de escuelas, algunas de las cuales llegaron a ser famosas, se debieron a iniciativas individuales; así, los dos grandes filósofos atenienses de fines del siglo V y primera mitad del IV antes de nuestra era, Sócrates (470-399 a.n.e) y Platón (428-347 a.n.e), fundan sus propias escuelas. El primero, de retórica, que era el arte de persuadir al otro por medio de un discurso muy adornado y elaborado y el segundo, en el año 387, fundó en Atenas su escuela de Filosofía la “Academia”, institución a menudo considerada como la primera universidad europea, la cual ofrecía un amplio plan de estudios que incluía temas de Astronomía, Biología, Matemática, Teoría Política y Filosofía.

Sócrates veía las Matemática como instrumento indispensable de la formación intelectual. Esta ciencia, en términos de Sócrates, al igual que los debates contradictorios que tanto atraían a la juventud, debían servir para formar mentes “bien hechas”, aunque su contenido resultara inútil para el ciudadano cuyo ideal consistía en dedicarse a la vida política. Para Platón, dicha ciencia cumple una función propedéutica de magnitud distintiva, pues deben servir de introducción al estudio de la Filosofía, mientras que a la vez pretendía que esos conocimientos matemáticos sirvieran como base a un proyecto de reformas políticas. Según

Schoenfeld (1987), el filósofo griego Sócrates fue capaz de aislar la noción de “resolver problemas” para someterla a estudios; a pesar de su idea de que solamente podemos conocernos a nosotros mismos, hay que destacar en él ciertos elementos metacognitivos importantes, y estudiados en la actualidad, como factores que intervienen en la solución de problemas. De todos es conocida la importancia que concedió Platón al estudio de las Matemáticas, en especial a la enseñanza de la Geometría, y cómo la utiliza desde su posición de idealista objetivo. A él se le debe la concepción actual de los objetos matemáticos al señalar: “los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas absolutas que ellas representan.” (Boyer, C. B. 1986, P.125). También aprecia la importancia de la resolución de problemas, así, en su obra “La República” plantea que si se quiere desarrollar la inteligencia es preciso proceder como se hace en Geometría, por medio de problemas.

El término “heurística” surgió entre los más destacados matemáticos y pensadores de la antigüedad, posteriores a Sócrates y Platón. Tal era el nombre de una rama del saber bastante mal definida y que se relacionaba tanto con la

lógica, como con la Filosofía o la Psicología. En los trabajos llegados hasta la actualidad se observa la exposición frecuente de métodos geométricos, pero raras veces sus detalles; todo ello tenía como objeto de estudio las reglas y métodos del descubrimiento e invención.

En resumen, en la Antigüedad, partiendo de los puntos de vistas explicados y, en virtud de la finalidad didáctica del proceso de resolución de problemas matemáticos en esta época, se percibe un sentido utilitario de la matemática prehelénica frente a una óptica cosmológica de la griega, donde en ésta la instrumentación de las concepciones giran en torno a la comprensión de los elementos que componen el orden existencial del hombre y su medio, aspecto que responde a las características propias del desarrollo de la ciencia y de la cosmovisión humana en relación con la existencia. Es, en estos casos, la resolución de problemas matemáticos un vehículo socioclasista de dominación en manos de los que ostentaban el poder.

3. La resolución de problemas en la Edad Media

En la Edad Media, en la India, entre los siglos V-VII, las Matemáticas alcanzan un gran esplendor y su desarrollo estuvo ligado íntimamente con matemáticos de relieve como Aryabhata, Brahmagupta y Bháskara. Los principales aportes de estos notables científicos se pueden exponer en la resolución completa de la ecuación de segundo grado, la resolución de las ecuaciones indeterminadas y su aplicación a la solución de problemas prácticos. Además, al igual que los “Elementos” del griego Euclides, en el que se sintetizó gran parte de la matemática de su época, los conocimientos de esta etapa fueron recogidos por Bháskara en el siglo VII en su obra capital titulada “Sindhanta Ciromani”.

El desarrollo matemático adquirió gran relevancia en el Mundo Árabe. Una de las principales escuelas de este período fue la de Bagdad, en lo fundamental, por la utilización de los recursos algebraicos en la solución de problemas matemáticos prácticos; entre los principales representantes se encuentra Al Juarisme (nombre que sirve como base al término actual algoritmo), que vivió en el siglo IX. A este estudioso le corresponde el honor de haber escrito el primer texto de Álgebra, que nominalizó esta disciplina científica. Otro representante de esta escuela fue Al Batani (858-929), que elaboró métodos prácticos e indicaciones para la resolución de problemas; muchos de estos resultados aparecen en un tratado de Álgebra escrito por Omar Khayyan en el siglo XII.

En la Edad Media en Europa, el objetivo de la enseñanza era conocer el orden del universo y la esencia de las cosas, sin importarles la preparación del hombre para la vida en la sociedad. Con el surgimiento de las universidades, los procedimientos seguidos por los profesores en casi todas partes eran los mismos; no se acudía a las fuentes originales, el docente leía un manual y luego se centraba en su discusión y debate. En esos tiempos ya existían grupos de graduados

de las diferentes universidades que compartían el ejercicio de las Matemáticas: por un lado, los agrimensores, ingenieros y contables y, por otro, los médicos y astrólogos, que gozaban de una situación social superior; los del primer grupo, dentro de sus enseñanzas, enfatizaban en la resolución de problemas prácticos, ofreciendo determinados modelos para algunas situaciones específicas.

En el siglo XIV, en Europa, los cambios económicos así como el desarrollo de las ciudades y el comercio van a favorecer el ascenso social de los matemáticos prácticos. Los intercambios comerciales cada vez más complejos exigían técnicas idóneas de cálculo y contabilidad. Existían en esos momentos tratados donde se exponían reglas para la solución de problemas específicos relacionados principalmente con las tasas de interés, los cambios, la circulación y el peso de las monedas, o la repartición de los beneficios. En los tratados estos métodos solían presentarse en forma de casos concretos, integrándose en un contexto totalmente práctico.

La influencia de las interpretaciones escolásticas como instrumento para la generalización de la fe, durante la Edad Media, hacen que la dirección formativa de la resolución de problemas matemáticos evidencie una concepción teológica donde los procedimientos matemáticos constituyen un elemento básico en la multiplicidad existencial del hombre, evidenciando el rigor de un ordenamiento que, independientemente de la multiplicidad factorial que lo compone, confluyen en la existencia de una causa universal que descansa en la idea de Dios.

4. La resolución de problemas en la Época Moderna

En la Época Moderna, con el desarrollo del capitalismo, impera el espíritu utilitario y desde ese punto de vista fue puesta en práctica toda la enseñanza. Este proceso se inicia con el humanismo renacentista, incluyéndose en esta denominación aquellos que se apasionaron por las letras y las artes clásicas. Es atinado aclarar que en el siglo XVII comienza la decadencia de la enseñanza humanística y la sociedad pide a la escuela que provea a sus hijos de conductas y conocimientos teórico-prácticos, que les permitan actuar y desarrollarse en ella.

El hito fundamental, en esta época en la actividad matemática, fue marcado por el filósofo y matemático R. Descartes (1596-1650). Este genio francés fue el fundador del racionalismo, que se formó como resultado de interpretar de manera unilateral el carácter lógico del conocimiento matemático, dado que la naturaleza universal y necesaria de este conocimiento le parecía a Descartes derivada de la naturaleza del intelecto mismo. El matemático asignó dentro del proceso de conocimiento un papel extraordinario a la deducción, basada en axiomas, alcanzables por vía intuitiva. Para obtener el conocimiento, él creía necesario ponerlo todo en duda, salvo la cognoscibilidad misma; este principio se manifiesta en su máxima: “pienso, luego existo”.

En el ámbito de la resolución de problemas, la trascendencia más especial se centra en dos de sus principales tratados: “Discours de la Méthode” (Discurso del Método, publicado por primera vez en Leyden, en 1637) y “Regulae ad Directionem Ingenii” (Reglas para la Dirección del Espíritu, publicado post mortem en “Obras Póstumas”, Amsterdam, 1701). En 1627 comenzó a redactar sus Reglas en tres tomos, con una docena de ellas cada uno; pero después de arribar a la mitad del segundo volumen, solo alcanzó a poner el título de tres reglas más, ya que la muerte vino a sorprenderlo en febrero de 1650. En esta obra el gran pensador explica a los “mortales corrientes cómo ellos podrían pensar como él, y cómo, siguiendo su método, podrían resolver problemas tal y como él lo hizo.

Considera Polya que las palabras siguientes de Descartes describen el origen de las Reglas: “Cuando, en mi juventud, oí hablar de invenciones ingeniosas, trataba de saber si no podría inventarlas yo mismo, sin incluso leer al autor, así advertí que me conformaba a ciertas reglas.” (Polya, G. 1945, p. 109).

La utopía de su gran proyecto descansaba sobre un plan muy simple: Fase I: reducir cualquier problema algebraico a la resolución de una ecuación simple. Fase II: Reducir cualquier problema matemático a un problema algebraico. Fase III: Reducir cualquier problema a un problema matemático. El primer libro culmina con las reglas IX-XII, que ayudan a consolidar el conocimiento. Enfatiza la necesidad de profundizar en las cuestiones más simples; en la importancia de la ejercitación; en la búsqueda de relaciones entre proposiciones simples; y en el empleo óptimo de cuatro facultades: la inteligencia, la imaginación, los sentidos y la memoria. Respecto a las facultades empleadas en el conocimiento, Descartes destaca que sólo la inteligencia puede percibir la verdad, pero no debe dejar de ayudarse del resto de las facultades señaladas.

En el segundo libro se examinan cuestiones más complicadas. Veamos las reglas más significativas: Regla XIII: Cuando se comprende perfectamente una cuestión es necesario abstraerla de toda concepción superflua, reducirla a sus más simples elementos y subdividirlas en tantas partes como sea posible por medio de la enumeración. Regla XIV: La misma regla debe ser aplicada a la extensión real de los cuerpos y es necesario representarla completa a la imaginación por medio de figuras claras; de este modo sería mucho mejor comprendida por la inteligencia. Regla XV: Es de gran utilidad trazar estas figuras y representarlas a los sentidos externos a fin de conservar la atención del espíritu. Como se puede apreciar, estas reglas son muy adecuadas para emprender la solución de un problema. En el primer caso se incita a descomponer el problema en otros más sencillos, poniéndose al descubierto los procesos de análisis y síntesis; en el resto se sugiere la construcción de una figura de análisis, con énfasis en la visualización de los elementos que interviene en el problema.

En el siglo XVIII resulta necesario destacar al suizo L. Euler (1707-1783). Este eminente científico no llegó a plantear explícitamente, como Descartes, un conjunto de reglas para abordar los problemas. El mérito fundamental radica en

la educación heurística manifestada en su praxis pedagógica. Según testimonios de Condorcet (matemático contemporáneo con Euler): “Euler prefería instruir a sus alumnos con la pequeña satisfacción de sorprenderlos. Él pensaba no haber hecho bastante por la ciencia si no hubiese añadido a los descubrimientos la íntegra exposición de las ideas que le llevaron a ellos.” (Polya, G. 1976, p. 66)

En la obra euleriana, no solamente los descubrimientos por analogías son dignos de mencionar, es importante decir que su capacidad de análisis era sorprendente, pero fundamentalmente se distinguió como: “el matemático más hábil para la creación de algoritmos y estrategias generales para la solución de problemas, que jamás haya existido” (Castro, I. 1996, p.3). También tiene un lugar preponderante la creación de nuevas teorías basadas en los métodos con los que resolvió grandes problemas matemáticos; un ejemplo de su prodigiosa capacidad para la resolución de problemas y su facilidad para la generalización de métodos de solución, se pone de manifiesto en uno de los problemas más populares que resolvió este genio, el de los siete puentes de Königsberg. La estrategia que empleó para su solución sirvió para desarrollar una rama de la matemática llamada Topología combinatoria.

Otro matemático no menos importante a tener en cuenta en la historia de la resolución de problemas el cual, si bien desarrolló su mayor actividad en el siglo XVIII murió en el XIX, es al francés J. L. Lagrange (1736-1813); su mayor contribución en esta dirección aparece en las memorias que escribió en Berlín en 1767, sobre la resolución de las ecuaciones numéricas, en la cual se exponen dos estrategias para la resolución de problemas utilizando como recurso las ecuaciones numéricas simples. No se debe pasar por alto, en el análisis de la época, al notable matemático B. Bolzano (1781-1848), que también incursionó sobre la forma de abordar aquellos problemas para los cuales no se poseía un procedimiento de resolución; en su libro *Wissenschaftslehre* dirigido a la Lógica, dedicó una extensa parte a la heurística. Modestamente relata: “No pretendo en lo absoluto presentar aquí ningún procedimiento de investigación que no sea conocido desde hace tiempo por los hombres de talento, no creo que encuentren aquí nada nuevo en la materia. Pero voy a esmerarme en asentar, en términos claros, las reglas y los caminos de la investigación seguidos por todo hombre capaz, aunque en la mayoría de los casos lo sigue sin tener plena conciencia de ello. Si bien ignoro si he tenido o no pleno éxito en esta empresa, guardo al menos la ilusión que mi modesta contribución sea del gusto de algunos y tenga aplicaciones más tarde”. (Bernel, R. 1982, p. 73).

El verdadero valor de su obra está en proponerse hacer una recopilación y divulgar esos modos de actuación de los “hombres de talento”. El trabajo tiene un valor educacional excepcional, por cuanto de todos es conocido que muchos científicos e investigadores destacados basan su actividad en recursos obtenidos de una larga experiencia o a veces instrumentados magistralmente por ellos mismos, pero que pocas veces son explicitados, saliendo a la luz sólo

la exposición formal y rigurosa del resultado obtenido.

La resolución de problemas en el ámbito de la modernidad condiciona una perspectiva logológica, donde el hombre y su personalidad, constituyen el centro de la problemática. La propia perspectiva humanista de la ciencia advierte la necesidad de acrecentar la preocupación por el hombre en la relación con sus similares y la sociedad, donde los procedimientos matemáticos constituyen alternativas para satisfacer las demandas humanas e incrementar el éxito de la humanidad en el proceso de adaptación secular, social y cultural.

5. La resolución de problemas en la Época Contemporánea

En la alborada del siglo XX aparecen los aportes de H. Poincaré (1854-1912), matemático francés que se ocupó sobremedida de la metodología general de la ciencia. Poincaré consideraba que las leyes de la ciencia no pertenecen al mundo real, sino que constituyen acuerdos convencionales para hacer más cómoda y útil la descripción de los fenómenos correspondientes.

En su “*Foundations of Science*” (1913), Poincaré dedica un apartado al análisis de la creación de los conceptos matemáticos. Esta sección recibió el título de Creación Matemática, y había aparecido originalmente en una publicación francesa de 1908 (“*Science et Méthode*”). Lo más plausible en esta obra es la distinción que su autor hace respecto al acto creativo, destacando cuatro fases: Saturación (actividad consciente que implica trabajar en el problema hasta donde sea posible); Incubación (el subconsciente es el que trabaja); Inspiración (la idea surge repentinamente, “como un flash” según Poincaré) y Verificación (chequear la respuesta hasta asegurarse de su veracidad).

Otra importante contribución fue realizada por J. Hadamard (1865-1963) en su libro “*An essay on the psychology of invention in the mathematical field*”, publicado en 1945. Hadamard prosigue y profundiza el punto de vista de Poincaré, resaltando la actividad consciente, la reflexión y el trabajo inconsciente. De manera similar, este matemático propone un esquema algo más exhaustivo para explicar el proceso de creación matemática. Sus fases son las siguientes: Documentación (informarse, leer previamente, escuchar, discutir); Preparación (realizar un proceso de ensayo-error sobre diferentes vías e hipótesis, considerando un cambio eventual de actividad en caso de no obtener ningún progreso); Incubación (al cambiar de actividad); Iluminación (ocurre la idea repentina); Verificación (la idea debe someterse al análisis y comprobación, al juicio crítico); Conclusión (ordenación y formulación de los resultados).

Salvando sus limitaciones idealistas estas ideas son bastante progresistas. Por primera vez se intentaba explorar los fenómenos que ocurren en el cerebro humano, durante la resolución de problemas. Ya no se trataba de describir ciertas reglas para conducir el pensamiento, sino de estudiar el pensamiento

mismo. Resulta atinado plantear que ya Hadamard comprendió la necesidad de encarar el proceso de resolución de problemas desde la perspectiva matemática y psicológica cuando expresó:

“... este asunto envuelve dos disciplinas, Psicología y Matemática, y requerirá ser tratada adecuadamente en ese orden, por ambos, tanto por el psicólogo como por el matemático. Por la falta de esta composición, el asunto ha sido investigado por los matemáticos por un lado y por los psicólogos por el otro...” (Hadamard, J. 1945, p. 1).

En materia de resolución de problemas es corriente que los historiadores y estudiosos escindan sus análisis en dos etapas, claramente delimitadas por el año 1945. La razón es simple: en ese año salió a la luz “How to Solve It”, del matemático y pedagogo húngaro G. Polya. La obra didáctica de Polya nace en el prefacio del trabajo “Aufgaben und Lehrstze auf der Analysis” del cual fue coautor. En las indicaciones sobre el uso de este libro los autores revelan una breve recomendación, a fin de lograr un pensamiento productivo. Ellos señalan:

“Reglas generales, capaces de prescribir detalladamente la más útil disciplina del pensamiento, no son conocidas por nosotros. Sin embargo, si tales reglas pudieran ser formuladas, ellas no serían muy útiles; uno tiene que asumirlas en carne y hueso y tenerlas listas para un uso inminente. La resolución independiente de problemas difíciles ayudará al estudiante mucho más que los aforismos que él sigue, aunque para un comienzo estos puedan no dañarlo”. (Polya, G. y Szegő, G. 1925, p. 11).

Schoenfeld (1987) señala que en “How to Solve It” Polya no se contenta con este simple aforismo, así que realiza un estudio introspectivo del método cartesiano. Aunque su alcance se vio limitado al modesto enfoque de la heurística, hay que destacar un aporte fundamental: el aislamiento de cuatro fases claramente identificables durante el proceso de resolución de problemas: Comprensión del problema; Concepción de un plan; Ejecución del plan; y Visión retrospectiva. En cada una Polya propone una serie de reglas heurísticas bastante sugerentes, pero lo más notorio, en primer lugar, consiste en que la mayoría de ellas van dirigidas a la segunda fase. El propio Polya señala: “De hecho, lo esencial de la solución de un problema es concebir la idea de un plan.” (Polya, G. 1976, p.30).

El mismo autor analiza la diferencia entre “heurística” y “heurística moderna” y expone, en lo fundamental, que en la segunda se trata de: comprender el método que conduce a la solución del problema, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico como psicológico”. (Polya, G. 1945, pp. 113-114).

A pesar de que “How to Solve It” marcó un hito en el campo de la Didáctica de la Matemática, en su fecha de aparición no causó gran impacto, ya que los currículos escolares estaban fuertemente influenciados por los asociacionistas, los cuales propugnaban un aprendizaje por repetición. Aún así, Polya continuó su

empresarial obra y en 1954 publicó en la misma dirección “Mathematics and Plausible Reasoning”. Sin embargo, no es hasta la década de los ochenta que se toman en cuenta, en los EE.UU., para su instrumentación en el contexto del aula las ideas de Polya, sobre todo lo concerniente a las etapas en el proceso de resolución de problemas.

Es importante resaltar que los trabajos de Polya y Hadamard aparecieron en el mismo año y que abrieron el camino para la formalización de conceptos utilizados en la enseñanza de las Matemáticas. Por ejemplo el concepto problema.

Inspirado en las ideas de Hadamard psicólogos de la talla de Shaldon (1954) y Rubinstein (1965) estudian el concepto problema y plantean que: en todo verdadero problema el sujeto desconoce la vía de solución y al posicionarse frente al problema mismo adopta un carácter activo.

En el campo de la Didáctica de la Matemática aparecieron diferentes criterios en relación con lo que es un problema, al aparecer, en muchos casos, por la interferencia semántica mezclado con el término de ejercicio. La escuela de Didáctica de las Matemáticas de la antigua R.D.A elaboró una clasificación de los ejercicios, tomando como base el grado de abstracción en el reflejo de los elementos y relaciones. Como concepto superior tomó los ejercicios matemáticos propuestos a los alumnos, los cuales se subdividen en dos conceptos subordinados: ejercicios de aplicación (los que tienen su origen en la práctica) y ejercicios contruidos (aquellos que se conciben con fines didácticos, o sea, para ejercitar, profundizar, aplicar, asegurar las condiciones previas, entre otros).

En 1981 Kantowski deja clara la diferencia entre ejercicio y problema cuando asevera: “ un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que lo conducirá con certeza a la solución.” (Kantowski, M. 1981, p. 111). A partir de este momento se pueden encontrar en la literatura múltiples definiciones, pero las mismas no se contradicen y permiten delimitar dos importantes elementos.

1. La vía de pasar de la situación inicial a la nueva situación debe de ser desconocida; estableciendo diferencias esenciales entre ejercicio y problema.

2. La persona quiere realizar esa transformación, poniendo bien en claro que lo que constituye un problema para uno puede no serlo para otro.

Cabe señalar que desde el punto de vista didáctico, no hay un marco teórico explicativo completo sobre cómo se relacionan los variados aspectos del pensamiento matemático en el proceso de resolución de problemas. No obstante en este contexto, parece un acuerdo general sobre la importancia de los siguientes aspectos dados por Schoenfeld(1992):

- El conocimiento de base.
- Las estrategias específicas de resolución de problemas.
- Los aspectos metacognitivos.

- Los aspectos afectivos y el sistema de creencias.
- La comunidad donde se desarrolla la práctica.

Lester(1994) examinó 25 años de investigación publicada sobre la solución de problema en matemáticas, en función de estudiar los cambios evolutivos y la coherencia en la investigación sobre esta línea. Él concluyó que aunque hubo progresos significativos todavía se necesitaba trabajar en direcciones tales como:

- El papel del profesor en el tratamiento de los problemas en el aula.
- Estudiar la verdadera realidad de lo ocurre en el aulas.
- Profundizar en la resolución de problemas en grupo.

Otro elemento asociado al trabajo anteriormente citado es que en el mismo se enfatiza y explica la importancia para la resolución de problemas de integrar de manera coordinada la experiencia previa, los conocimientos y la intuición de los estudiantes. Es importante resaltar que Lester(1994) corrobora la importancia de los aspectos metacognitivos desarrollado en los trabajos de schoenfeld.

A partir de estas formalizaciones aparecieron aportes muy concretos respecto a la resolución de problemas por la ya mencionada escuela de Didáctica de la Matemática de la desaparecida R.D.A., en lo fundamental, las ideas y técnicas desarrolladas en relación con la instrucción heurística en el contexto de las Matemáticas escolares. La escuela alemana concebía un sistema de procedimientos heurísticos, clasificados en principios, reglas y estrategias (generales y particulares) que debía ser objeto de enseñanza a los estudiantes, durante el proceso de resolución de problemas.

Los trabajos realizados por la escuela alemana se proponían formular un Programa General Heurístico (PGH), que abarcara todo el proceso de resolución de ejercicios y problemas y, además, que estuvieran presentes todos los demás programas como subprogramas o en forma de casos especiales.

El primero de los modelos que se presenta es el más conocido por los profesores en la actualidad y de sus fases; la segunda es la de mayor importancia desde el punto de vista metodológico, pues en el proceso de la resolución de problemas buscar la idea y la vía de solución resulta lo más complejo para cualquier resolutor. Pues como afirma Polya:

“Poner en pie un plan, concebir la idea de la solución, ello no tiene nada de fácil. Hace falta, para lograrlo, el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, y lo que es más, buena suerte.” (Polya, G. 1976, p. 33).

Las ideas centrales de los principales modelos, son:

Polya:(Comprender el problema, Concebir el plan, Ejecutar el plan y Vista retrospectiva.)

Schoenfeld:(Análisis y comprensión del problema, Diseñar y planificar la solución, Explorar soluciones y Verificar las soluciones.)

Müller:(Orientación, Elaboración, Realización y Evaluación.)

Jungk:(Orientación hacia el problema, Trabajo en el problema, Solución del problema y Evaluación de la solución.)

Es importante resaltar que en el PHG de Polya los elementos de sus fases no aparecen detallados; por lo tanto, su aplicación de manera directa resulta difícil. La estrategia desarrollada por Schoenfeld, aunque dirigida a alumnos talentos, es más explícita y aplicativa y pudiera aplicarse parcialmente, con adaptaciones, a los estudiantes de nuestras aulas. El de Müller y el de Jungk son similares y más completos que los anteriores; estos últimos plantean un PHG aplicable a cualquier tipo de problema.

A modo de resumen, en todo el universo de la contemporaneidad perpetua la asunción logológica constituyendo el elemento directriz de las pretensiones formativas cimentadas en la resolución de los problemas matemáticos, pero esta vez las asunciones didácticas tienden al análisis del rol dinámico y activo de los sujetos cognoscentes como resolutores de problemas, a partir de la preocupación, no solo por problemas relacionados con la enseñanza, sino, y esto es de suma importancia, por cuestiones que abordan el fenómeno del aprendizaje y su significación; factores estos devenidos en un conjunto de modelos que, aunque no resuelven en su totalidad los problemas existentes, condicionan una mayor racionalidad a las intenciones formativas y didácticas de la Matemática. En tal dirección cabe mencionar los trabajos de Zilmer(1989) y Sigarreta et al (2003,2004,2005).

Referencias

- [1] Bernel, R., *Problem solving and mathematics*, Seymour publishers, Palo Alto, 1982.
- [2] Boyer, C. B., *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1986.
- [3] Castro, I., *Leonhard Euler*, Prinomex, México D. F, 1996.
- [4] Hadamard, J., *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*, Ed Princenton University Press, Princenton, 1945.
- [5] Jungk, W., *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1979.
- [6] Kantowski, M. G., *Mathematics Educations Research Implications for the 80's*. *Problem solving(USA)*4, 111-126, 1981.

-
- [7] Lester, F. K., Musings about mathematical problems solving research:1970-1994, *Journal for Research in Mathematics Education* **25(6)** (1994),660-675.
- [8] Müller, H., *Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la Enseñanza de la Matemática*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1987.
- [9] Platón, *Obras completas*, Ediciones Aguilar, Madrid, 1996.
- [10] Polya, G., *How to solve it*, Editorial Princenton University press, Princenton, 1945.
- [11] Polya, G., *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*, Editorial Combined edition, New York, 1976.
- [12] Polya, G. y Szegő, G., *Aufgaben und Lehrstze auf der Analysis I*, Published by Springer. New York. 1925.
- [13] Rubinstein, S. L., *El proceso de pensamiento*, Editora Nacional, La Habana, 1965.
- [14] Shaldon, J., *Psicología y Matemáticas*, Editora Alianza, Madrid, 1954.
- [15] Schoenfeld, A. H., *A brief and biased history of problem solving*, Ed University of California, Berkeley, 1987.
- [16] Schoenfeld, A. H., *Learning to think mathematically*, In handbook for Research on mathematical teaching and learning. Macmillan, New York,1992
- [17] Sigarreta, J. M. y J. Torres, Utilización de los problemas matemáticos en la formación de valores, *Edu. Matemática* **8** (2003),32-44.
- [18] Sigarreta, J. M. y Ruesga, P, Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para interacción sociocultural, *PREMISA* **20** (2004),15-29.
- [19] Sigarreta, J. M. y Arias, L, La resolución de problemas: Un recurso para la formación de la personalidad, *SOAREM* **17** (2003),13-23.
- [20] Zilmer, W., *Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

J. M. SIGARRETA

J. M. RODRÍGUEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, ESPAÑA

jsigarre@math.uc3m.es. jomaro@math.uc3m.es

P. RUESGA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

UNIVERSIDAD DE BURGOS, ESPAÑA.

pruesga@ubu.es

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

La integral de Lebesgue un poco más de cien años después

Diomedes Bárcenas

Resumen

Este es un artículo divulgativo donde pretendemos exponer algunos aspectos de la influencia de la integral de Lebesgue en el desarrollo de algunas disciplinas matemáticas como el análisis de Fourier, teoría general de la medida, teoría de las probabilidades, cálculo de primitivas y análisis funcional.

El nacimiento de la integral de Lebesgue ocurrió en un momento en que tres problemas fundamentales ocupaban el ambiente de los matemáticos

- i) El problema de la medida.
- ii) El cálculo de primitivas.
- iii) Convergencia de series trigonométricas.

La aparición de la integral de Lebesgue contribuyó enormemente al esclarecimiento y posterior desarrollo en la dirección de cada uno de estos problemas.

La integral de Lebesgue desde su aparición se enseñoreó como la integral de la investigación matemática del siglo **XX** con un surtido inmenso de posibilidades, entre las que es digno de destacarse su importancia en el análisis funcional, teoría de las probabilidades, análisis de Fourier e incluso un error afortunado cuya corrección permitió la introducción de nuevas teorías matemáticas.

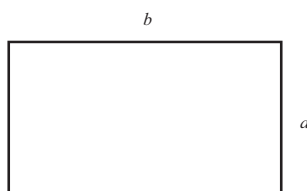
Esta integral apareció en escena con una nota enviada a Comptes Rendu por Lebesgue la cual fue publicada en 1901 [33]. Esta nota que llevaba por título “Sur une généralisation de l’intégrale définie”, sería desarrollada completamente por el autor en 1902 en su tesis doctoral.

Para esa época, la integral de Riemann colmaba la escena de forma que, para ese entonces, hablar de funciones integrables era referirse a la integral de Riemann; una muy buena razón para que Lebesgue llamase funciones sumables a las que hoy conocemos como funciones Lebesgue integrables; gracias a que, según nos cuenta J. P. Kahane [26], Hardy y Littlewood acuñaran el término. La notación L^1 para designar el espacio de las funciones Lebesgue integrables fue un tributo de Banach a Lebesgue.

i) **El problema de la medida**

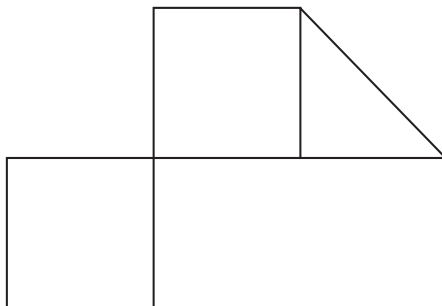
Hemos leído alguna vez que los griegos no rehuyeron ningún problema por difícil que éste fuera y el tema que nos ocupa no parece ser la excepción que confirme la regla. Partiendo del cálculo de áreas desarrollaremos la idea de medida usando algunos hechos primitivos conocidos por los griegos.

- El área de un rectángulo de lados a y b es igual a ab .
- El área de un rectángulo es invariante por traslaciones.



Definición *Un conjunto se llama **elemental** si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos.*

Cualquier polígono es un buen ejemplo de un conjunto elemental.

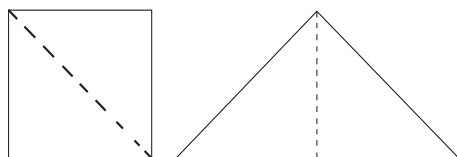


Axioma: *El área de un conjunto elemental es aditiva.*

Si A y B son conjuntos elementales tal que $A \cap B$ es vacío, un punto o un segmento, entonces el área de $A \cup B$ es igual a la suma del área de A más el área de B .

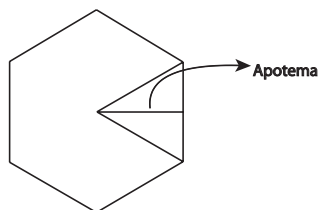
Esta axiomatización fue suficiente para que los griegos calcularan el área de las figuras elementales como por ejemplo:

El área de un triángulo es $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$



En general, el área de un polígono regular es

$$\frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$



El método de exhaustión (agotamiento) permitió a Arquímedes calcular el área de un círculo mediante aproximaciones sucesivas por polígonos inscritos y circunscritos, que como sabemos consiste en inscribir y circunscribir en la circunferencia polígonos regulares del mismo número de lados y observar que cuando el número de lados tiende a infinito, tanto las áreas de los polígonos circunscrito como la de los inscritos tienden a un mismo límite, al cual definimos como *área del círculo*.

Mediante el método de exhaustión, Arquímedes fue capaz también de calcular el área de un arco de parábola.

Con la matemática griega, no hay problemas en demostrar que el área de una figura (si existe) es invariante por movimientos. Queda pendiente el problema de si toda figura en el plano es **medible**; es decir, si toda figura geométrica tiene área.

Resumiendo, con los griegos estamos en la siguiente situación: Si \mathcal{M} son los conjuntos medibles del plano, tenemos una función de área

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longrightarrow \alpha(A) \end{aligned}$$

que satisface $\alpha(A \cup B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$; α es invariante por movimientos y si A es un rectángulo de lados a y b , entonces $\alpha(A) = ab$, quedando pendiente el problema de si todo conjunto del plano será medible.

En términos modernos, con los griegos se introduce la necesidad de una medida finitamente aditiva e invariante por movimientos.

Los orígenes de la integral de Riemann pueden rastrearse hasta encontrar un precursor en Arquímedes; pues, tratándose de esa integral, si observamos cuidadosamente la cobertura de la circunferencia en consideración mediante polígonos regulares, no nos será difícil persuadirnos de que ello antecede a las sumas inferior y superior de Darboux.

Dejemos de lado, por ahora, el problema del área de una figura geométrica llamando a esta área **medida** y estableciendo que las propiedades y definición de área se pueden extender hasta \mathbb{R}^n y queda pendiente también la pregunta de si será posible asignar a cada subconjunto A de \mathbb{R}^n una medida α que sea finitamente aditiva, invariante por movimientos y satisfaga

$$\alpha A = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

para cada rectángulo $A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

La integral de Riemann permite ampliar el conocimiento de los conjuntos medibles ya que si f es una función integrable en el sentido de Riemann, la integral de $|f|$ representa el área de la figura encerrada por la gráfica de $|f|$ y el eje de las abscisas, una noción que puede extenderse hasta el espacio de n dimensiones.

Mediante la integración de Riemann, la longitud de un conjunto elemental de la recta (aquellos que se expresan como la unión finita de intervalos) se puede obtener integrando su función característica.

- ii) Aunque nuestra costumbre es motivar la enseñanza del cálculo integral mediante el cálculo de áreas, ésta también puede motivarse mediante la búsqueda de soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(x)$, algo posible y hasta natural en el estudio de la evolución de un fenómeno físico, un hecho que interesó sobremedida a Isaac Newton. Se trata del problema del cálculo de primitivas; es decir, se trata de hallar una función y tal que $y' = f(x)$.

El cálculo de primitivas resultó ser una herramienta espectacular gracias al Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann, el cual enunciamos y demostramos en los siguientes términos:

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con f' integrable. Entonces $\forall t \in [a, b]$, se tiene que

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(s) ds.$$

Demostración. Sea $\{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, t]$. Entonces

$$\begin{aligned} f(t) - f(a) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) \\ &\stackrel{\text{T.V.M de Lagrange}}{=} \sum_{i=1}^n f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \rightarrow \int_a^t f'(s) ds \end{aligned}$$

□

El Teorema Fundamental del Cálculo representa una gran ventaja porque establece una estrecha relación entre el cálculo de áreas y el cálculo de primitivas, pero deja huecos en este último hecho como demostrara Vito Volterra en 1885 al construir una función derivable en $[a, b]$ con derivada acotada pero no integrable en el sentido de Riemann; un hecho sin duda interesante.

Ignoramos la demostración original de Volterra, pues la que ha llegado a quien esto escribe ([18], [40]), usa la caracterización de Lebesgue de las funciones Riemann integrables como aquellas cuyos puntos de discontinuidades tienen medida de Lebesgue igual a cero; una demostración que no pudo ser la originalmente dada por Volterra porque el ejemplo antecede en casi dos décadas a la teoría de Lebesgue.

- iii) Series Trigonómicas. Los orígenes de las series trigonométricas se pueden trazar hasta llegar a Euler y Daniel Bernoulli; éste último propuso series trigonométricas de la forma

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{l} \right)$$

como solución a la ecuación de la cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

ya que cualquier curva tomada como valor inicial en el intervalo $[0, l]$ puede ser representada en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

Bajo la influencia de la invención de la máquina de vapor, Fourier desarrolló un modelo matemático exitoso para entender y predecir la difusión del calor, expresándolo en la siguiente ecuación en derivadas parciales para el caso de una dimensión:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

para cuya solución pretendió que toda función se expresase como una serie trigonométrica.

En términos generales, los problemas generados por los trabajos de Fourier son los siguientes:

(A) Si f es una función acotada en un intervalo $(-a, a)$, entonces f ¿Puede expresarse como una serie trigonométrica en los siguientes términos:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)?$$

(B) ¿Bajo cuáles condiciones es una función representable como una serie trigonométrica integrable término a término?

En otras palabras:

$$\text{si } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

¿Cuándo es permisible la operación

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-a}^a U_n dx ?$$

Fourier vivió convencido de la respuesta afirmativa a cada uno de estos problemas aunque sin precisar el sentido de la integración aludida. Un gran avance en esta dirección se obtiene mediante la integral de Lebesgue.

Si la respuesta a la pregunta (B) es afirmativa cuando cada $U_n \geq 0$ entonces ella es válida cuando

$$f = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$$

donde los conjuntos E_n son conjuntos disjuntos dos a dos y por lo tanto, la medida tendría que ser numerablemente aditiva. En efecto, si

$$f = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n},$$

entonces si los conjuntos E_i son disjuntos dos a dos, se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)$$

y en este caso,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n);$$

lo cual nos dice que cualquier medida que nos permita acercarnos a la solución del problema **(B)** tiene que ser numerablemente aditiva; un hecho que satisface la medida de Lebesgue.

Mediante teoremas de convergencia se resuelve positivamente el problema **(B)** cuando

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n; \quad U_n \geq 0.$$

El problema se resuelve positivamente usando el Teorema de la Convergencia Monótona, mientras que si $\exists g \in L^1(\mu)$ tal que $|\sum_{i=1}^n f_i| \leq g \forall n \in \mathbb{N}$, entonces el Teorema de la Convergencia Dominada nos permite concluir que

$$\int_{-a}^a \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-a}^a f_n.$$

En este marco teórico aparece la integral de Lebesgue y en estas notas pretendemos hablar sobre el legado para la posteridad de la integral de Lebesgue en diversas ramas de la matemática como

1. Análisis de Fourier.
2. Teoría General de la Medida.
3. Teoría de Probabilidades.
4. Cálculo de Primitivas.
5. Análisis Funcional.
6. Conjuntos Analíticos.

1. Análisis de Fourier

Como hemos visto, la aparición de la integral de Lebesgue con sus teoremas de convergencia dió ímpetu al análisis de Fourier, el cual consiste en responder, en los términos más clásicos, dos preguntas estrechamente relacionadas:

¿Es $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos \pi x}{a} + b_n \sin \frac{\pi x}{a}$, donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f ?

Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuándo es f integrable término a término?. Este problema está relacionado íntimamente con la integral de Lebesgue y hoy día el análisis de Fourier se describe en términos de dicha integral; por ejemplo, el teorema de Plancherel que afirma que existe una única transformación lineal y acotada

$$\begin{aligned} T : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longrightarrow \hat{f} \end{aligned}$$

para todo $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ con $\|Tf\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_2 \forall f \in L_2(\mathbb{R})$ donde \hat{f} denota la transformada de Fourier de f , nos dice que L_2 es uno de los espacios de funciones más adecuados para el análisis de Fourier.

Las investigaciones de Wiener contribuyeron al conocimiento de las propiedades del análisis de Fourier, al demostrarse que $L_1(\mathbb{R})$ es un álgebra con la multiplicación definida como la convolución.

Para poner las cosas en su contexto, Fourier vivió convencido de que toda función converge a su serie de Fourier, pero en 1873 P. G. Du Bois Reymond probó la existencia de funciones continuas cuya serie de Fourier no converge en un punto y en 1966 J. P. Kahane y I. Katznelson probaron que el conjunto de puntos donde diverge la serie de Fourier de una función continua tiene medida de Lebesgue cero; mientras que ya antes, en 1936, Kolmogorov había demostrado que existe $f \in L^1[-\pi, \pi]$ cuya serie de Fourier no converge en ningún punto; y en 1966, Carleson demostró que en $L^2[-\pi, \pi]$, la serie de Fourier de una función converge casi en todas partes.

El problema de la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función $f \in L^p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$, quedó resuelto en forma definitiva por R. Hunt quien demostró en 1967 que la serie de Fourier de una función $f \in L^p[-\pi, \pi]$ casi en todas partes.

Los resultados precedentes sobre la divergencia admiten importantes generalizaciones en términos de categoría [25], [27]: una propiedad se llama **genérica** o **cuasi segura**, si dicha propiedad es válida sobre un G_δ denso. En este caso, decimos que la propiedad es válida **cuasi siempre** o cuasi en todas partes. Con

esta terminología se obtiene lo siguiente:

En $[0, 2\pi]$ cuasi toda función continua tiene la propiedad de que su serie de Fourier diverge cuasi en todas partes.

Dado un conjunto $E \subset [0, 2\pi]$, F_σ de medida cero, entonces cuasi todas las series de Fourier de funciones continuas divergen sobre E .

En términos de categoría de Baire el teorema de Kolmogorov se generaliza como sigue:

Cuasi todas las series de Fourier en L^1 divergen casi siempre.

Finalizamos estos comentarios sobre el análisis de Fourier haciendo la observación de que en el año 2003, J. Alexopoulos y E. Sprague [1] demostraron el siguiente resultado en el marco de el Análisis Armónico Diádico.

Si φ es una N -función, f pertenece al espacio de Orlicz $L^\varphi[0, 1]$ y

$$S_n f = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

con $a_i = \int_0^1 f w_i$, entonces si $S_n f$ converge se tiene que $f \in E^\varphi[0, 1]$, donde $E^\varphi[0, 1]$ denota la clausura de las funciones continuas en $L^\varphi[0, 1]$ con la norma de Orlicz y w_i denota i -ésima función de Walsh.

2. Teoría General de La Medida

Para Lebesgue la medida exterior de un conjunto A se define como

$$\inf \sum l(I_i) = m^*(A)$$

donde $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con los $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ intervalos abiertos y la medida interior se define como

$$m_*(A) = \sup m^*(B); \quad B \subset A, B \text{ cerrado}$$

y un conjunto A es *medible* si y sólo si $m^*(A) = m_*(A)$.

La definición de Lebesgue es sustituida por la siguiente por Caratheodory:

Un conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ es medible si y sólo si para cada $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$ se cumple que $m^*(\mathbf{E}) = m^*(\mathbf{A} \cap \mathbf{E}) + m^*(\mathbf{A}^c \cap \mathbf{E})$

El concepto de conjunto medible según Caratheodory conduce a métodos de mensurabilidad de conjuntos conocidos como métodos I y II de Caratheodory, los cuales a su vez conducen al importante concepto de medidas de Hausdorff, las cuales han adquirido importancia desde el descubrimiento de los conjuntos fractales.

El método I tiene la dificultad, de que medidas exteriores construidas mediante este método no garantiza que los borelianos sean medibles ver Edgar [17].

Las medidas de Hausdorff construidas mediante el método II de Caratheodory evitan esta anomalía y permiten la construcción de las medidas de Hausdorff como una generalización de la medida n -dimensional de Lebesgue; es de observar que la medida n -dimensional de Hausdorff es un múltiplo K_n de la medida n -dimensional de Lebesgue [41]: Si A es un boreliano de \mathbb{R}^n , m_n la medida n -dimensional de Lebesgue y μ_n la medida n -dimensional de Hausdorff, entonces

$$\mu_n(A) = K_n m_n(A),$$

donde

$$K_n = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right).$$

Es de observar también que las medidas de Hausdorff permiten generalizar el concepto de dimensión hasta espacios métricos; así, por ejemplo, tenemos que la dimensión del conjunto de Cantor es $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

La invariabilidad por traslaciones de la integral de Lebesgue fue extendida por Alfred Haar hasta grupos topológicos localmente compactos, lo que muestra que el álgebra y en particular la teoría de grupos no ha sido insensible a la teoría de Lebesgue.

Las ideas de Haar se pueden extender hasta espacios homogéneos.

Sea G un grupo topológico compacto y Ω un espacio de Hausdorff compacto. Decimos que G **actúa transitivamente sobre** Ω si existe una aplicación continua

$$\begin{aligned} G \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (g, \omega) &\longrightarrow g(\omega) \end{aligned}$$

que satisface

- (i) $e(\omega) = \omega$, donde $\omega \in \Omega$ y e es la identidad en G .
- (ii) $g_1 g_2(\omega) = g_1(g_2(\omega))$, $(g_1, g_2 \in G, \omega \in \Omega)$
- (iii) $\omega_1, \omega_2 \in \Omega \Rightarrow \exists g \in G : g(\omega_1) = \omega_2$.

Es importante observar que si G actúa transitivamente sobre Ω , cada $g \in G$ es un homeomorfismo sobre Ω : $\omega \rightarrow g(\omega)$ es continua con inversa $g^{-1}(\omega)$.

Teorema 2.1. (A. Weil) *Supongamos que G actúa transitivamente sobre Ω . Entonces existe un subgrupo cerrado $H \subset G$ tal que G/H y Ω son homeomorfismos bajo la acción de G .*

Un bosquejo de la prueba es éste:

Fijemos $\omega_o \in \Omega$. $H = \{g \in G : g(\omega_1) = \omega_o\}$ es un subgrupo cerrado de G y $\varphi(gH) = g(\omega_o)$ es el isomorfismo buscado.

Teorema 2.2. *Supongamos que el grupo compacto G actúa transitivamente sobre el compacto Ω . Existe una única medida de probabilidad η G -invariante y definida sobre Ω .*

Demostración. Sea $G \times \Omega \rightarrow \Omega$. $H \subset G$ y $G/H \cong \Omega$. G tiene la medida de Haar normalizada μ . En $G|H$, definimos $\nu(E) = \mu(q^{-1}(E))$, q es la aplicación cociente ν es una medida de Haar normalizada en $G|H$.

Pongamos $\eta(E) = \nu(\varphi^{-1}(E))$. □

3. Probabilidades

Para la época de la aparición de la integral de Lebesgue, Borel estaba trabajando en la búsqueda de una medida de probabilidad en $[0, 1]$ que a cada intervalo abierto le asignase su longitud. Es la época del nacimiento de la σ -álgebra de Borel como la mínima σ -álgebra que contiene los intervalos de $[0, 1]$; por otra parte, la regularidad de la medida de Lebesgue implica que cualquier conjunto medible Lebesgue es un conjunto medible Borel unido con un conjunto de medida cero. Por esta razón, Borel opinó que el aporte de Lebesgue a la teoría de la medida fue introducir los conjuntos nulos. Esto molestó mucho a Lebesgue quien reaccionó con acrimonia y Kahane [26] al respecto trata de entender a Lebesgue porque además de padecer para el momento problemas familiares y financieros, estaba agobiado en un liceo de Nancy con una abrumadora carga docente de 21 horas semanales.

Según cuenta Kahane, [26], [24], la influencia de Lebesgue sobre la teoría de probabilidades sigue dos vías; la de Hugo Steinhauss, y la de Norbert Wiener en la misma década de los años 20 y 30. Por ejemplo, según Kahane, la idea de Steinhauss es la de fundamentar la teoría de probabilidades en el intervalo $(0, 1)$, para quien un evento sera un conjunto medible, una variable aleatoria una función medible cuya esperanza es la integral de Lebesgue de esa función, en caso que dicha integral exista.

El punto de vista adoptado por Kolmogorov es el aceptado por los probabilistas; Kolmogorov sustituye el espacio $[0, 1]$ de Steinhauss por la tripleta Ω, Σ, P donde Σ es una σ -álgebra de subconjuntos de Ω y P una medida con $P(\Omega) = 1$.

Hay cierto consenso en que el gran éxito de la **teoría de medida** fue su uso en la **axiomatización de la teoría de las probabilidades**.

El programa de Wiener consistió en la búsqueda de una teoría matemática para explicar el movimiento Browniano, donde las trayectorias son continuas casi siempre pero no diferenciables. Hoy día el movimiento browniano encuentra aplicaciones en matemáticas financieras a través de la teoría de martingalas y la integral de Ito [30].

Las martingalas nacen en probabilidades y ha jugado un papel unificador en las diferentes teorías aquí mencionadas; ya que el teorema de Doob que establece que toda martingala uniformemente integrable en $L_1(P)$, (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad, es convergente en norma, es equivalente al teorema de Radon-Nikodym, el cual es uno de los resultados más importantes de la teoría general de la medida, y a su vez es equivalente al teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue, gracias a las martingalas en análisis funcional la propiedad de Radon-Nikodym en espacios de Banach se ha convertido en una propiedad geométrica.

Para mencionar un hecho relativamente reciente en análisis de Fourier, el teorema de Doob ha sido utilizado por Alexopoulos y Sprague en [1], para caracterizar las series de Walsh que son series de Walsh-Fourier en $L^1[0, 1]$.

4. Cálculo de Primitivas

La integral de Lebesgue proporcionó un gran avance en la solución al problema de la Primitiva en los términos siguientes:

Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y sólo si f es derivable casi en todas partes de $[a, b]$, f' es integrable y para cada $t \in [a, b]$,

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(s) ds.$$

Lebesgue demostró que toda derivada acotada es integrable pero que existen derivadas no acotadas que no son integrables.

El teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue tiene su contraparte en la teoría general de la medida: El teorema de Radon Nikodym, el cual admite una formulación probabilística en términos de martingalas ([2] [11] [36] [45]).

El teorema de Radon Nikodym implica la existencia y la convergencia de martingalas uniformemente integrales pero hay más: El teorema de Radon Nikodym es equivalente al teorema de convergencia de martingalas uniformemente integrables.

El problema de la primitiva, el cual consiste en resolver el problema de Newton, lo resolvieron en 1912 Denjoy y en 1923 Perron, construyendo sendas integrales que a la postre resultaron ser equivalentes y donde toda derivada es integrable. De manera sorprendente en la segunda mitad del siglo XX; Henstock [21] y Kurzweil [32] en forma independiente definieron una integral que generaliza las integrales de Riemann y Lebesgue y es más fácil de definir que la integral de Lebesgue porque no usa el aparataje de la teoría de medida. Otra sorpresa es que esta integral coincide con la de Denjoy y en consecuencia, toda derivada es integrable.

En 1996 Benedetto Bongiorno [7] construyó una integral, que llamó C -integral, y, que resuelve el problema de la primitiva. Más tarde en el año 2000, Bongiorno, Luisa Piazza y David Preiss [9] demostraron que la integral de Bongiorno, la C -integral, es la más pequeña que resuelve el problema de la primitiva y contiene a la integral de Lebesgue, en el sentido de que cualquier integral que resuelva el problema de la primitiva y contenga a la integral de Lebesgue, también contiene a la de Bongiorno.

Para dar una idea del dinamismo de la investigación en esta área del análisis, reportamos que en 1966, Rudin [42] expresó que la integral de Denjoy carecía de interés en análisis por no ser una integral absolutamente convergente; mientras que 30 años más tarde (en 1996) [3] Bartle afirma que la integral de Lebesgue se había oficializado como la integral de la investigación matemática, pero que ya era tiempo de ser sustituida en la enseñanza por la integral generalizada de Riemann, refiriéndose a la integral de Henstock-Kurzweil; más general y más fácil de definir que la integral de Lebesgue.

En su apología a la integral de Henstock-Kurzweil en 2001 expresa Bartle [4] que aunque para esta integral no es válido el Lema de Riemann Lebesgue, se han obtenido resultados interesantes en análisis armónico.

Una buena exposición histórica de esta integral se encuentra en [8], mientras que [4] resulta un excelente texto sobre el tema.

5. Análisis Funcional

El aporte de la teoría de Lebesgue al análisis funcional es inmenso. Los espacios l_2 anteceden a dicha integral, pero cuando Riesz y Fisher caracterizan los coeficientes de Fourier de una función en $L^2[0, 2\pi]$ como aquellas sucesiones tales que el cuadrado de sus valores absolutos forman una serie convergente, estableciendo que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2,$$

donde c_n son los coeficientes de Fourier de f , lo que establecen es que la transformada de Fourier es un isomorfismo entre los espacios de Hilbert l_2 y $L^2[0, 2\pi]$

dos espacios que, como es sabido, son espacios de Lebesgue.

Una vez que tenemos los espacios de Banach a nuestra disposición (en particular los espacios de Lebesgue) es posible intentar generalizaciones de la integral de Lebesgue hasta estos espacios; tal es el caso de la integral de Bochner, para la cual no es válido el **Teorema Fundamental del Cálculo**. Al tratar de resolver este problema, Clarkson, según leemos en Diestel y Uhl [13], introdujo los espacios uniformemente convexos, los cuales han sido fuente de inspiración para muchos estudiosos de la geometría de los espacios de Banach.

Hoy sabemos que los espacios de Banach para los cuales es válido el teorema fundamental del cálculo son aquellos que tienen la propiedad de Radon Nikodym; los cuales han proporcionado una amplia gama de problemas de investigación y entre ellos no escapa el análisis convexo: **Dado un espacio de Banach real X , toda función convexa y continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un G_δ denso si y sólo si X^* tiene la propiedad de Radon Nikodym.**

Un retículo de Banach se llama **L -espacio** si para cada par de vectores x, y en X se cumple que

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Es válido el siguiente resultado:

Todo L -espacio es isomorfo a un espacio de Lebesgue.

Pero no todo espacio de Banach es un L -espacio, como por ejemplo el caso de M -espacio. **Un M -espacio** es un retículo de Banach X que satisface, $x, y \in X$ con

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|.$$

Ejemplos de M -espacios son los espacios $C(K)$, con K compacto; y hay un inverso parcial que afirma que todo M -espacio separable es un espacio de tipo $C(K)$ (El inverso en general no es cierto [5],[6]). Aunque los M -espacios no son L -espacios, hay una bella relación de dualidad entre ellos, puesta de manifiesto por Kakutani.

El dual de un L espacio es un M -espacio

El dual de un M espacio es un L -espacio

Particularmente importante es el caso del teorema de representación de Riesz: El dual de $C(K)$ es $M(K)$, donde $M(K)$ denota las medidas de Borel sobre $C(K)$; y en el caso en que el compacto K es el intervalo cerrado $[a, b]$, el Teorema de Representación de Riesz expresa que $C[a, b]^*$ son las medidas de Lebesgue-Stieltjes.

La dualidad entre $C[a, b]$ y las medidas de Lebesgue-Stieltjes la expresamos en los términos siguientes:

Sea $\wedge \in C[a, b]^*$. $\exists g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada tal que $\wedge(f) = \int_a^b f dg$.

La dualidad recién mencionada la usó Bourbaki para la siguiente definición de integral en $[a, b]$.

Una **integral** en $[a, b]$ es una función $\wedge : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. El valor $\wedge(f)$ se llama la **integral de f** entre a y b .

Según narra Kahane [26] L. Schwartz se inspiró en la integral de Bourbaki para la teoría de distribuciones, que más tarde le valiera la medalla field, una teoría de gran importancia en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales y análisis funcional.

La teoría de Lebesgue ofrece un marco teórico importante para el estudio de los espacios de Sobolev, que en cierta forma son un caso especial de distribución.

Unos de los resultado más relevantes del análisis funcional lo constituye el teorema Dvoretzki–Rogers:

Sea X un espacio de Banach. Toda serie incondicionalmente convergente en X es absolutamente convergente si y sólo si X tiene dimensión finita.

En la demostración del teorema se usan argumentos de teoría de la medida ([19], [39]) el cual a su vez se usa para probar que la coincidencia de la integral de Bochner con la integral de Pettis caracteriza a los espacios de dimensión finita ([44])

6. El error afortunado de Lebesgue

Finalizamos hablando del error afortunado de Lebesgue. En una de sus publicaciones Lebesgue afirmó que la imagen mediante una función continua de un conjunto de Borel es un conjunto de Borel; particularmente, la proyección de un boreliano de \mathbb{R}^2 , es un boreliano de la recta.

El matemático ruso M. Y. Souslin mostró mediante un ejemplo la falsedad de esta aseveración y definió la familia de los conjuntos analíticos, una familia comprendida entre los conjuntos de Lebesgue y los conjuntos de Borel; la familia de los conjuntos analíticos no forman una σ -álgebra porque existen conjuntos analíticos cuyo complemento no es analítico.

En concreto tenemos que un conjunto es **analítico** si es imagen continua de un espacio polaco; es decir, un subconjunto A de un espacio topológico Y es analítico si existe un espacio topológico metrizable y completo X tal que $f(X) = A$. Si denotamos por \mathcal{N} al conjunto de todas las sucesiones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y por I al conjunto de todos los números irracionales contenidos en $[0, 1]$ tenemos la siguiente caracterización de los conjuntos analíticos [29].

- i) A es analítico

- ii) A es la imagen continua de I
- iii) A es la imagen continua de \mathcal{N}

para los interesados en los conjuntos analíticos [29] es una buena referencia.

En cuanto al título de esta sección, proviene de un comentario –según Dudley [14]– hecho por Lebesgue en el prólogo de un libro sobre conjuntos analíticos escrito por Luzin en 1930; donde escribió Lebesgue que el origen de la teoría fue producto de un grosero error . . . un error fructífero cometido por él mismo.

Agradecemos a los árbitros las sugerencias que permitieron mejorar la presentación de este artículo.

Referencias

- [1] J. Alexopolus and E. Sprague, Some Criteria to determine when a Walsh series is a Walsh-Fourier Series, *Q. M.* 26, 3 (2003) 267-278.
- [2] D. Bárcenas, The Fundamental Theorem of Calculus for Lebesgue Integral, *Divulgaciones Matemáticas*, 8, 1 (2000) 75-85.
- [3] R. G. Bartle, Return to the Riemann Integral, *Amer. Mathematical Monthly*, 103, 8 (1996) 625-632.
- [4] R. G. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, GSM, 32, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).
- [5] Y. Benyamini, Separable G-Space are Isomorphic to $C(K)$ Spaces, *Israel J. Math.*, 14 (1973) 287-293.
- [6] Y. Benyamini, An M-Space which is not Isomorphic to $C(K)$ Spaces, *Israel J. Math.*, 28 (1977) 98-102.
- [7] B. Bongiorno, Un Nuovo Integrale per il Problema delle Primitive, *Le Matematiche*, 7, 2, (1997), 299-313
- [8] B. Bongiorno, The Henstock-Kurzweil Integral, *Handbook of Measure Theory*, Edited By E. Pap., Elsevier, Amsterdam (2002) 587-615.
- [9] B. Bongiorno, L. Piazza and D. Preis, Constructive Minimal Integral which Includes Lebesgue Integrable Functions and Derivatives, *London Math. Soc.*, 2, 62, (2000), 117-129.
- [10] N. Bourbaki, *Intégration*, Hermann Paris, (1965) chs 1-4. (1967) chs 5-6.

-
- [11] R. C. Bradley, An Elementary Treatment of the Radon Nikodym Derivative, Amer. Math. Monthly, 96, 5 (1989) 437-440.
 - [12] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, Absolutely summing Operators, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
 - [13] J. Diestel and J. Uhl, Vector Measures, Math. Surveys Num. 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1977).
 - [14] R. Dudley, Real Analysis and Probability, Wadsworth and Brooks, Pacific Grove, California, 1989.
 - [15] D. van Dulst, The Geometry of Banach Spaces with the Radon Nikodym Property, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1985).
 - [16] A. Dvoretzki and C. A. Rogers, Absolute and Unconditional X Convergence in Normed Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., USA (1950) 192-197.
 - [17] G. Edgard, Measure, Topology and Fractal Geometry, UTM, Springer-Verlag, New York (1990).
 - [18] R. Gordon, The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock, GSM, Vol 4, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1994).
 - [19] P. Habala, P. Hajek, and V. Zizler, Introduction to Banach Spaces, Vol. I, II, Matfypress, Prague (1996).
 - [20] T Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration, Chelsea Publishing Company, New York (1975).
 - [21] R. Henstock, Theory of Integration, Butterworths, London (1963).
 - [22] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, GTM, Springer-Verlag, New York (1965).
 - [23] S. Igari, Real Analysis with an Introduction to Wavelet Theory, Translations of Mathematical Monographs, vol 177, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
 - [24] J. P Kahane, L'intégrale de Lebesgue au Cours du Vingtième Siècle, Panoramas et Synthèses, 18 (2004) 1-16.
 - [25] J. P Kahane, Probabilities and Baire's Theory in Harmonic Analysis, J. S. Bynes (ed) Twentieth Century Harmonic Analysis a Celebration, Kluwer, Netherlands (2001) 57-72.
 - [26] J. P. Kahane, Naissance et postérité de l'Intégrale de Lebesgue, Gaz. Math. 89, (2001) 5-20.

- [27] J. P. Kahane, Baire's Category Theorem and Trigonometric Series, *Journal D'Analyse Mathématique*, 80, (2000) 143-182.
- [28] J. P. Kahane and P. Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets, Studies in the Development of Modern Mathematics*, Vol. 3, Gordon and Breach (1995).
- [29] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer Verlag, Berlin, (1995).
- [30] R. Korn and E. Korn, *Option Pricing and Portfolio Optimization*, GTM, vol 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [31] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (reprinted) 1993.
- [32] K. J. Kurzweil, Generalized Ordinary Diferntial Equation and Continuous Dependence on a Parameter, *Czechoslovak Math. J.* 7, (1957) 418-446.
- [33] H. Lebesgue, Sur une Généralization de l'Integrale Définie, (1901) Paris, Ac. Sci., C.R., 1025-1028.
- [34] H. Lebesgue, *Measure and the Integral*, Holden-Day, San Francisco (1966).
- [35] Lindstrauss and L.-Tzafriri, *Clasical Banach Spaces I, II*, Springer-Verlag (1977).
- [36] P. A. Meyer, *Probabilités et Potential*, Herman Paris (1966).
- [37] D. Paunié, *History of Measure Theory*, *Handbook of Measure Theory*, Edited by E. Pap., Elsevier, Amsterdam (2002), 3-28.
- [38] T. De Pauw, Autour Du Théorième de la Divergence, *Panoramas et Synthéses*, 18 (2004) 85-121.
- [39] A. Pietsch, Absolut-p nummeriende Abbildunger in Normierten Räumen, *Studia Math.* 28 (1967) 333-356.
- [40] I. K Rana, *An Introduction To Measure and Integration*, Narosa Publishing House, India (1997).
- [41] C. A Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge University, Press, Cambridge (1970).
- [42] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York (1966).
- [43] H. H. Schaefer, *Banach Latices and Positive Operators*, Springer Verlag (1974).

- [44] Schwabik, S. and Guoju, Y, Topics in Banach Space Integration, Series in Real Analysis-Volume 10, World Scientific Pub Co Inc, Singapore (2005).
- [45] C. Williamson, Probability with Martingales, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [46] L. P. Yee, Lanzou lectures on Henstock Integration, Scientific World, Singapore (1989).

DIOMEDES BÁRCENAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE CIENCIAS,
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, MÉRIDA, 5101, VENEZUELA.
`barcenas@ula.ve`

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo?

Douglas Jiménez

Logos frente a álogos

Se atribuye a los pitagóricos la expresión “*Todo es número*”. La escuela pitagórica fue la primera escuela matemática griega. Antes de ellos se había acumulado una buena cantidad de conocimiento matemático debido a culturas como la egipcia y la babilónica; conocimiento con el que entran en contacto los griegos por medio de los viajes de Tales de Mileto y, luego, del propio Pitágoras. Este contacto significa para la matemática de la época un enorme salto conceptual pues, de una matemática dedicada en lo esencial a la solución de problemas de tipo práctico, se pasa a una matemática interesada en los conceptos y las relaciones que ellos ocultan, es decir una matemática teórica. A partir de Tales y Pitágoras, la matemática griega evoluciona por caminos de alta complejidad que, paradójicamente, se estructuran alrededor de una disciplina común: la geometría.

Es así como en el siglo III a.C., más de doscientos años después de Tales y Pitágoras, aparece un texto de importancia capital para la historia de la matemática: los *Elementos* de Euclides, esfuerzo totalitario de recolección del saber matemático acumulado hasta la época; dotado de un enorme sentido pedagógico que llevó desde su creación a separarlo en trece volúmenes^[1]. En esencia se trata de un texto de geometría, pero con frecuencia oímos hablar del segundo libro como un libro de álgebra, del libro séptimo como un tratado de aritmética o teoría de números y del libro décimo como un texto de análisis infinitesimal. ¿Cómo congeniamos estas ideas, aparentemente dispersas, en una sola disciplina conceptual?

Podemos dar un ejemplo si retomamos la idea pitagórica original “*Todo es número*”, idea que para los propios pitagóricos tenía un sentido tan profundo que adquiría características sagradas. En este sentido, Pitágoras viene a ser el predecesor original de Leopold Kronecker, el matemático que afirmó que “*Dios creó los números naturales, lo demás lo hizo el Hombre*”, porque cuando un pitagórico hablaba de *número* lo que tenía en mente específicamente era *número*

^[1]Es posible que, en lo referente a traducciones, los *Elementos* de Euclides sólo sean superados por la Biblia. Nuestras transcripciones están tomadas de la traducción al español de María Luisa Puertas Castaños, Edit. Gredos, 1994.

natural y no otra cosa. Esto lo podemos ver claramente en Euclides Def. VII.1 y Def. VII.2^[2]. La primera dice “Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una.” y la segunda afirma “Un número es una pluralidad compuesta de unidades”. Definiciones lo suficientemente restrictivas para separar el concepto de unidad del concepto mismo de número: *una unidad no es un número, es el ente que constituye a los números*.

La visión pitagórica del número como la sustancia constitutiva del Universo, condujo a otra creencia que juega un papel importante en el desarrollo del tema que nos ocupa: la absoluta conmensurabilidad de los segmentos, es decir



Figura 1: ¿Tienen A y B medida común?

la existencia de medida común para dos segmentos distintos cualesquiera, como por ejemplo los segmentos A y B de la figura 1. ¿Qué quiere decir que ellos dos tienen una medida común?

En primer lugar obsérvese que el segmento B es de menor tamaño que el segmento A , por lo cual (ver figura 2) podemos incluir el primero dentro de éste tantas veces como quepa. Este caso particular muestra que B cabe dos veces dentro de A , pero deja un restante: un pequeño segmento C que, como es natural, es menor que B . Podemos, por lo tanto, incluir a C dentro de B , tantas veces como quepa (en este caso, una) lo que deja un remanente, un segmento D menor que C . Repetimos el procedimiento colocando D dentro de C las veces que sea posible (en este caso, cuatro) y vemos que ya no queda remanente ninguno. En consecuencia, el segmento D es medida común de los segmentos A y B pues está contenido un número entero de veces en cada uno de ellos: 14 veces en el primero y 5 en el segundo.

Construcciones como la anterior condujeron a dos conceptos de importancia fundamental para la matemática clásica griega: los conceptos de razón ($\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$, logos) y proporción ($\alpha\nu\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$, análogos). Así, concebimos a los segmentos A y B en una razón, pero esta razón es idéntica a la que hay entre los números 14 y 5, por lo que hay una proporción que se expresa en la forma “ A es a B como 14 es a 5”^[3]. En un principio, los pitagóricos estaban seguros de la posibilidad de este procedimiento independientemente de los segmentos en cuestión; es decir, sin importar cuántos pasos fuera necesario dar, dos segmentos cualesquiera siempre

^[2]Se refiere a las definiciones 1 y 2 del libro séptimo. Otro ejemplo de notación puede ser Prop. I.47, que se refiere a la proposición 47 del libro primero, en este caso el teorema de Pitágoras.

^[3]Una forma simbólica clásica de expresar la idea es $A : B :: 14 : 5$.

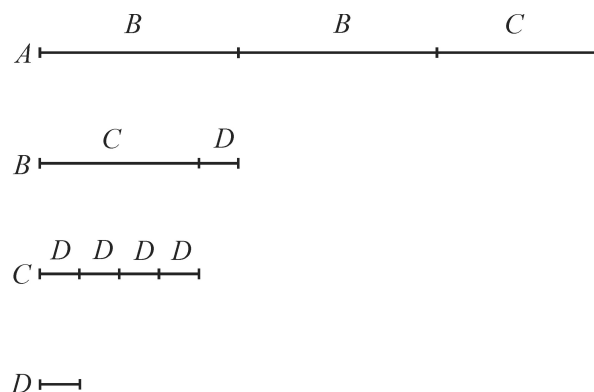


Figura 2: A y B están en la razón $14 : 5$

se rendirían a una medida común, lo que permitiría establecer con ellos una proporción expresable al final como razón de números enteros.

Pero también se asigna a Pitágoras el descubrimiento del teorema que lleva su nombre^[4] el cual, entre otras muchas cosas, conduce a una importante proporción: *el cuadrado construido sobre la diagonal de un cuadrado es al cuadrado original como 2 es a 1*. Ahora bien, esta proporción trae como consecuencia inmediata una interrogante: ¿Cuál es la proporción que se establece al comparar la diagonal del cuadrado y el lado del mismo?

La respuesta demolió la convicción pitagórica de la conmensurabilidad de los segmentos: *ambos segmentos resultaron ser inconmensurables, no era posible conseguir un segmento medida común para ellos*. A la distancia resulta difícil valorar la magnitud de un descubrimiento de esta naturaleza, pero cuando una visión epistemológica —e incluso ontológica— se sustenta sobre un supuesto determinado, la ruptura con ese supuesto significa en consecuencia un cambio de visión, vale decir, una revolución del pensamiento. Tendremos oportunidad de ver como este cambio se manifiesta en la redacción de los *Elementos* pero, por ahora, nos concentraremos en el descubrimiento mismo.

La escuela pitagórica, debido quizás a su hermetismo, no dejó obra escrita. Los descubrimientos que le asignamos provienen de una tradición que fue recogida por pensadores como Aristóteles. Por ejemplo, en *Analíticos primeros*, éste afirma: “Todo el que lleva a cabo una argumentación por reducción al absurdo infiere silogísticamente una falsedad, y prueba hipotéticamente la conclusión original al resultar su contradictoria algo imposible de suponer; por

^[4]No siempre que un resultado matemático lleve el nombre de alguien significa que ese alguien lo descubriera. Hay incontables ejemplos de ello. Quizá uno de los más notables es el principio de Arquímedes, descubierto por Eudoxo, dos siglos antes de que naciera el primero.

ejemplo, que la diagonal es inconmensurable con el lado del cuadrado, porque si se supone su conmensurabilidad se deriva que números pares e impares son iguales^[5]. Al inferirse silogísticamente la igualdad de pares e impares, se prueba hipotéticamente la inconmensurabilidad de la diagonal, ya que de contradecirse esto resulta una falsedad.”^[6]

La afirmación aristotélica es interesante pues contiene más de lo que esperábamos: la demostración de la inconmensurabilidad se realizó por reducción al absurdo, una técnica de demostración nada trivial o, incluso, intuitiva. Pero, ¿cómo se expresó tal demostración? Es difícil decirlo con precisión. De hecho, dentro del marco teórico que se conforma en los *Elementos* de Euclides sería un corolario de proposiciones de mayor generalidad. Sin embargo, existe una proposición, la X.117, que contiene una demostración concordante con los comentarios aristotélicos anteriores. Esta proposición es —según las autoridades en materia euclidiana, como Heiberg, por ejemplo— una *interpolación*, es decir, un texto añadido, con fines didácticos o de complementación, por los copistas que transcribían el legado euclidiano a sus futuras generaciones. Veámosla entonces^[7].

Proposición X.117. Se nos propone demostrar que en las figuras cuadradas el diámetro es inconmensurable en longitud con el lado.

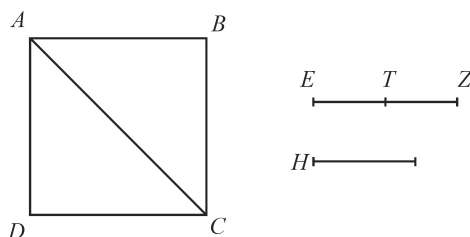


Figura 3: Inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado.

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrado, con diámetro AC . Digo que CA , AB son inconmensurables en longitud.

Porque supóngase, si es posible, que sean conmensurables. Digo entonces que el mismo número sería par e impar. Porque es claro que el cuadrado en AC es dos veces aquel en AB . Como CA , AB son conmensurables, tienen la razón

^[5]Las cursivas son mías. D. J.

^[6]Agradezco profundamente al Prof. Roberto Bravo, de la UCV, su traducción del inglés de este texto aristotélico.

^[7]Por las razones expuestas, la proposición X.117 no aparece en todas las traducciones de Euclides. Lo que se leerá a continuación es mi traducción al español de una traducción al inglés de la versión griega, ya clásica, de Heiberg. Esta última me la hizo llegar amablemente el Prof. William C. Waterhouse de Penn State University, mediante la lista Historia Matematica.

de un número a un número. Digamos que CA es a AB como EZ es a H , y supongamos que EZ y H son los más pequeños de aquellos que tienen la misma razón.

Entonces EZ no es la unidad. Porque si lo fuera, y EZ es a H como AC es a AB , y AC es mayor que AB , entonces EZ es mayor que H , la unidad mayor que un número, lo cual es absurdo. Así, EZ no es la unidad y, por lo tanto, es un número.

Puesto que CA es a AB como EZ es a H , entonces también el cuadrado en CA es al cuadrado en AB como el cuadrado en EZ es al cuadrado en H . Pero el cuadrado en CA es dos veces el cuadrado en AB , así el cuadrado en EZ es dos veces el cuadrado en H . Por lo tanto, el cuadrado en EZ es par. En consecuencia, EZ es también par; porque si fuera impar, su cuadrado también sería impar, puesto que cuando se combina un número impar de sumandos impares, el total es impar. Así, EZ es par.

Divídase (EZ) en dos partes iguales en T . Puesto que EZ y H son los menores con la misma razón, son primos entre sí. Pero EZ es par, así H es impar. En realidad, si fuera par, 2 mediría a EZ y a H , puesto que todo número par tiene una mitad; esto es imposible para números primos entre sí y así H no es par. Por lo tanto es impar.

Dado que EZ es dos veces ET , el cuadrado en EZ será cuatro veces aquel en ET . Pero el cuadrado en EZ es dos veces aquel en H , así que el cuadrado en H es doble del cuadrado en ET . Luego el cuadrado en H es par. Por lo antes dicho, H es par. Pero también es impar, lo que es imposible. Así, CA y AB no son conmensurables en longitud, QED.

(Esta demostración sólo es posible si se dispone de los conceptos de número par e impar y números primos entre sí, definiciones que Euclides provee en el libro séptimo^[8].)

El $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ (logos), la *razón*, pasa así a dar paso al $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ (álogos), la *no razón*. Pero la no conmensurabilidad es terrible para los pitagóricos porque los enfrenta a uno de sus más temidos fantasmas: el *horror infiniti*, vale decir el miedo al infinito, actitud que penetró toda la matemática griega clásica y, sin duda, contaminó toda la posteridad hasta Cantor. Porque si la diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables, intentar con ellos el proceso de inserción y extracción de segmentos que se ilustra en la figura 2 es un proceso que, a diferencia del ilustrado, puede repetirse todas las veces que se desee sin llegar a un fin en ninguna de ellas. A este *horror infiniti* presta un invaluable soporte el método de demostración por reducción al absurdo, puesto que la contradicción conseguida dispensa al razonador de apoyarse en un procedimiento que exija una repetición tras otra sin término. Pero los griegos no eran hombres de dejar

^[8]Def. VII.6: *Un número par es el que se divide en dos partes iguales*, Def. VII.7: *Un número impar es el que no se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad* y Def. VII.13: *Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común*.

al pensamiento a su libre arbitrio, por lo cual vale la pena detenerse un tanto a analizar otra posible demostración basada esta vez en la figura 4.

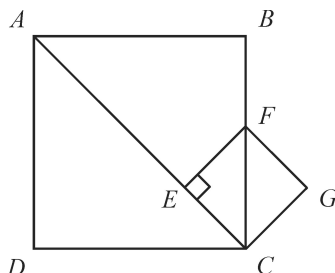


Figura 4: Inconmensurabilidad de la diagonal por antifairesis.

Sea $ABCD$ un cuadrado con diagonal AC y sea E el punto de esta diagonal tal que $AE = AD$, es decir, E es el punto donde cortamos el lado del cuadrado sobre la diagonal. Desde E dibujemos una perpendicular a la diagonal que corte el lado opuesto en F . Por consideraciones angulares es claro que EC y EF son lados de un cuadrado $FECG$ cuya diagonal es FC . Ahora bien, tomando en cuenta que FE y FB son segmentos tangentes desde un mismo punto F a la circunferencia que pasa por D , E y B , entonces $FB = FE = EC$, por lo cual $FC = BC - BF = AD - EC$. Es decir, la diagonal del cuadrado pequeño es el lado del cuadrado original menos el restante de quitar a la diagonal del cuadrado grande el lado del mismo.

Ahora bien, EC , el lado del cuadrado menor, es menor que la mitad de AB , el lado del cuadrado mayor. Por esta razón, FC , la diagonal del cuadrado menor, será menor que la mitad de AC , la diagonal del cuadrado mayor. Pero la igualdad $EC = AC - AD$ implica que si la diagonal y el lado del cuadrado original son conmensurables, también lo será EC que se medirá con la misma medida común a ambos, razonamiento que, en función de la igualdad $FC = AD - EC$ también puede aplicarse a FC ; es decir, FC se mide con la medida común a AC y AD .

Una construcción similar sobre el cuadrado $FECG$ muestra que hay un cuadrado más pequeño, cuya diagonal es menor que la mitad de la diagonal FC y que se mide con la medida común a AC y AD . Pero el procedimiento puede repetirse haciendo aparecer nuevos cuadrados cuyas diagonales son menores que las mitades de las diagonales de los cuadrados anteriores. Tal repetición producirá eventualmente una diagonal menor que la medida común a AC y AD , lo cual es absurdo pues un segmento no puede ser menor que el segmento que lo mida, QED

De nuevo tenemos un razonamiento por reducción al absurdo, pero su naturaleza es esencialmente distinta del anterior, por cuanto este último procede por

sustracciones sucesivas de unos segmentos sobre otros siempre que en cada paso se sustraiga más de la mitad, lo que debe llevar a estar por debajo de cierto límite a partir de un punto determinado. Estas sustracciones sucesivas fueron llamadas antifairesis (antanairesis, por Aristóteles) y se convirtieron en un método predilecto de constatación de inconmensurabilidad. Sin embargo, están basadas en un supuesto nada trivial: que su repetición nos colocará siempre por debajo de cualquier segmento predeterminado. En los *Elementos*, Euclides arregla las cosas de forma que este supuesto necesario aparezca como la proposición X.1: *Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.*

División en extrema y media razón

En este sentido, un problema cuya solución se asigna históricamente al pitagorismo está relacionado con el pentágono regular: se trata de construir dicho pentágono a partir de un triángulo isósceles cuyos ángulos en la base son cada uno el doble del ángulo en el tercer vértice. La presencia del pentágono y el trazo

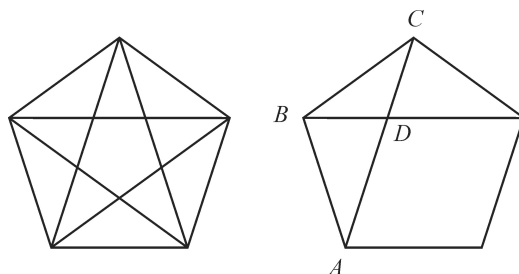


Figura 5: La estrella pitagórica y la sección áurea.

de sus diagonales hizo aparecer la estrella de cinco puntas (ver figura 5), que fue usada como un símbolo de pertenencia a la escuela. Ahora bien, las relaciones de tamaño establecidas entre las diagonales y los lados del pentágono pudieron conducir a la interrogante acerca de la razón existente entre el segmento mayor y el menor de los generados por el corte de las diagonales. La respuesta a esta interrogante conduce a lo que la posteridad conoció como *división áurea* o *división en extrema y media razón*: un segmento está dividido por uno de sus puntos en extrema y media razón cuando el segmento total es al segmento mayor como dicho segmento mayor es al menor. Las diagonales del pentágono

regular se cortan en extrema y media razón^[9], es decir que en la figura 5 se tiene que

$$AC : AD :: AD : DC.$$

Pero no terminan allí las interrogantes pues ahora cabe indagar acerca de la commensurabilidad de los segmentos generados por el corte. Sea entonces el segmento AC cortado por D en extrema y media razón y llevemos el segmento



Figura 6: Incommensurabilidad en la sección áurea.

DC (el menor) sobre el segmento AD (el mayor), lo que genera un punto E en este último, tal que $AE = DC$. La proporción anterior se puede interpretar, entonces, en la forma

$$(AD + DC) : AD :: (AE + ED) : AE,$$

lo que equivale a

$$DC : AD :: ED : AE,$$

de donde

$$AD : DC :: AE : ED,$$

y finalmente^[10]

$$AD : AE :: AE : ED,$$

lo que significa que llevar el segmento menor sobre el mayor reproduce nuevamente la división en extrema y media razón.

Si los segmentos de la división tuvieran una medida común, cada uno de los segmentos menores que aparecen en cada superposición se mediría con esa medida común. Pero como en una división en extrema y media razón el segmento mayor es más grande que la mitad del segmento total, las superposiciones consecutivas llevarán eventualmente a un segmento menor más pequeño que la medida común, lo cual es imposible. *Los segmentos de la división en extrema y media razón son incommensurables.*

Es punto para la polémica determinar si los pitagóricos podrían llevar adelante demostraciones como éstas. De hacerlo, estaban en posesión de estructuras antifairéticas de razonamiento, pero la evidencia histórica parece indicar que tales estructuras fueron usadas por vez primera por el platónico Eudoxo y

^[9]Para la demostración, trace la diagonal que falta desde C y observe que aparecen triángulos isósceles semejantes entre sí.

^[10]Estas equivalencias entre proporciones están debidamente justificadas en los Elementos en la definiciones V.13 a V.15.

se piensa, quizás con base en la enorme influencia de Arquímedes, que su uso en los *Elementos* no es más que una modificación, en el estilo de Euclides, de la herencia eudoxiana. Eudoxo apareció en escena alrededor de siglo y medio después de Pitágoras. Sea como fuere, vale la pena destacar la tremenda paradoja histórica que significó el que los símbolos pitagóricos más destacados —el teorema de Pitágoras y la estrella de cinco puntas— fueran los instrumentos de demolición de su creencia más sagrada: la inexcelso comensurabilidad de los segmentos.

Razón y proporción: las definiciones

Pero la incommensurabilidad produce al pensamiento griego problemas que van más allá de lo meramente religioso. En principio existía la esperanza de que el *λογος* abarcara todo par de segmentos mas, como veremos dentro de poco, vale establecer relaciones de proporcionalidad entre segmentos incommensurables, lo que coloca en revisión crítica el concepto mismo de razón, base de la proporción; en otras palabras, había que reconcebir el *logos*... reconceptualizar la idea. El nuevo concepto debía abarcar tanto a los commensurables como a los incommensurables. En lo que sigue podemos obtener una ganancia pedagógica de valor incalculable, pues en una época como la nuestra, con una matemática tan imbuida de lo formal —en la que a veces el estudiante siente que los conceptos nacen con su definición y, por tanto, dirige sus esfuerzos más a la formalización que a la propia comprensión— entender o, al menos, intentar descifrar las motivaciones de una definición nada intuitiva en su expresión final, es un ejercicio de acercamiento total a la creación matemática en su esencia más íntima.

Si la definición de razón se adecuía a lo que tenemos en mente, debe llevarnos a las proporciones correctas entre las razones que, a priori, sabemos las mismas. Por ejemplo, si tenemos dos cuadrados de lados distintos L y l , cuyas diagonales

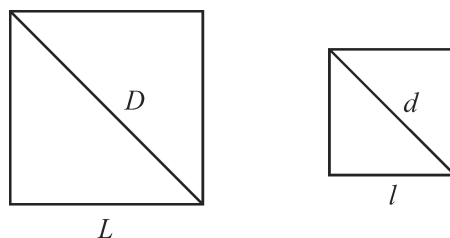


Figura 7: $D : L :: d : l$.

respectivas son D y d (ver figura 7), entonces ha de cumplirse que $D : L :: d : l$,

independientemente de la inconmensurabilidad de los segmentos involucrados. Un primer intento está resumido en la definición V.3: *Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas*. Ahora bien, ni siquiera a quien realiza un trabajo fundacional como el que analizamos, se le escapa el carácter vago de una definición como ésta. De hecho, entre los expertos se considera que tal “definición” no es euclidiana en absoluto, sino que se trata de una interpolación para algunos (como Simson) lamentable.

Ahora bien, ya Eudoxo antes de Euclides había previsto este problema y anticipado la solución de manera magistral. Tratemos de aclarar con un sencillo ejemplo. Supóngase que tenemos dos segmentos D y L y a partir de un punto O marquemos en una recta cualquiera una serie de puntos consecutivos A_1, A_2, A_3 , etc. cada uno separado de su antecesor por la longitud de D . En otra recta paralela a la anterior y a partir de un punto o situado en la perpendicular a ambas que pasa por O , marquemos una serie de puntos a_1, a_2, a_3 , etc. separados dos consecutivos cualesquiera por una distancia L , tal como se muestra en la figura 8. Supongamos en principio que D y L son commensurables, como

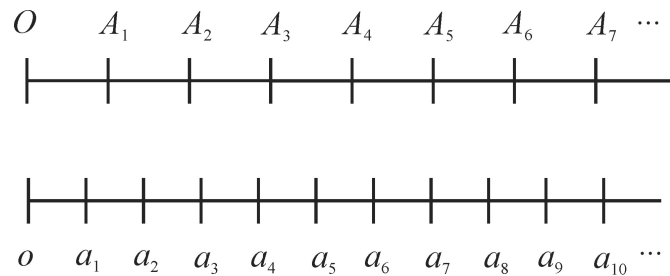


Figura 8: Construcción del concepto de razón.

por ejemplo $D : L :: 7 : 5$. En este caso, cada $5D$ se tiene una coincidencia con alguna $7L$, es decir, coincidirán A_5 con a_7 , A_{10} con a_{14} , A_{15} con a_{21} , etc. Recíprocamente, si encontramos una coincidencia entre alguna de las A con alguna de las a , supongamos A_m con a_n , es claro entonces que cada mD se corresponde con una nL , por lo que se tiene la conclusión de que $D : L :: n : m$, de donde se sigue que los segmentos en cuestión serían commensurables.

El razonamiento anterior expone por tanto una condición suficiente y necesaria, a partir de la cual es evidente que si D y L son segmentos inconmensurables, como por ejemplo la diagonal y el lado de un cuadrado, entonces es imposible que coincida alguna A con alguna a ; de manera que entonces toda A se encontrará situada entre dos a consecutivas.

En cualquiera de los dos casos, siempre existirá una A que sobrepase a alguna a escogida y, viceversa, toda A que se seleccione será sobrepasada por alguna a . En términos de D y L se puede afirmar que algún múltiplo de L

será mayor que cualquier múltiplo particular de D o viceversa. Esta es la clave de la observación de Eudoxo^[11], que sería recogida por Euclides en la Def. V.4: *Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra*. Esta definición completa la Def. V.3 y, además, resuelve el problema de su vaguedad. Hay otras interpretaciones al respecto, pero no es éste el trabajo indicado para analizarlas.

Aún no estamos listos. Sigue pendiente qué significa la proporción cuando las razones no pueden expresarse en términos de números; es decir, la explica-

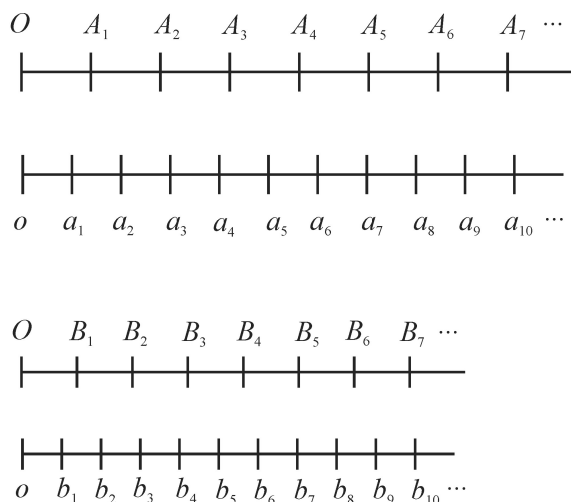


Figura 9: Concepto general de proporción.

ción de la proporcionalidad expresada en la figura 7. Pero esta es una labor que, en sí misma, significa nada menos que la propia reelaboración (y consiguiente reformulación) del concepto de proporción. Es aquí donde Euclides arranca los mejores frutos (al menos los mejores para su época) del árbol que sembró Eudoxo. Supongamos que a la construcción mostrada en la figura 8 la acompañamos con una construcción similar, en la que identificamos puntos B separados por segmentos congruentes d y puntos b separados por segmentos congruentes l , tal como se muestra en la figura 9. Añadamos la suposición de que los pares D, L y d, l son, diagonales y lados respectivos de dos cuadrados distintos como, digamos, los de la figura 7. Como ya hicimos ver, a priori hemos afirmado que $D : L :: d : l$, de manera que las dos líneas identificadas con los puntos B, b representan un modelo a escala de las dos identificadas con los puntos A, a . Esto

^[11]Que luego se llamaría *principio de Arquímedes* por las importantes aplicaciones que este último le encontraría.

no puede significar otra cosa que el hecho de esperar que las posiciones relativas entre cualquier par A, a se correspondan en idéntica forma con el par similar B, b . Así, del hecho de que A_3 esté entre a_4 y a_5 esperamos que B_3 esté entre b_4 y b_5 ; nos parecería un completo contrasentido —dentro del concepto cuya definición esperamos alcanzar— que B_3 estuviera antes de b_4 o después de b_5 . En resumen, las posiciones relativas de dos múltiplos distintos de D y L se corresponden a las posiciones relativas de los mismos múltiplos de d y l . Pero incluso esto sería verdadero en el caso de que D y L (y, por supuesto, d y l) fueran conmensurables, con la ventaja adicional en este caso de que las posiciones relativas pueden incluir la coincidencia.

Ahora bien, cabe la pregunta siguiente: ¿llevará la relación entre múltiplos expresada en el párrafo anterior a la idea intuitiva que tenemos de proporción? Observemos que esta pregunta tiene un carácter nada matemático, sino exclusivamente epistemológico: no se puede exigir a quien define, el demostrar que su definición es la adecuada para el término definido. Tal como hace ver Heath —siguiendo a Barrow— es como pedir a alguien que demuestre que la palabra *circunferencia* sólo es aplicable a las curvas que contienen a los puntos equidistantes de un punto fijo. Pero nótese que si tuviéramos cuatro segmentos D, L, d y l' , de forma que l' tuviera alguna diferencia, por pequeña que fuera, con l y construyéramos con ellos la figura 9, esto bastaría para destruir nuestro modelo a escala. En efecto, supongamos que l' es menor que l en una diferencia igual a la décima parte de l ; en términos clásicos, esta idea la expresamos en la forma $(l - l') : l :: 1 : 10$. Esta pequeña perturbación del modelo empuja cada b a su izquierda en una décima parte de su situación original, lo que traería como consecuencia que b_{10} se localice en la posición que anteriormente tenía b_9 . A partir de aquí, ya nada será como antes en términos de posiciones relativas de los múltiplos de los pares D, L y d, l' .

Aclarado el aspecto epistemológico, podemos por fin entrar en la definición euclidiana del concepto de “misma razón”^[12] recogida como Def. V.5: *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.* Así, la proporción $D : L :: d : l$, significa —apelando a la moderna simbología— que, para todo par de números m, n , si $mD >, =$ o $< nL$ entonces ha de tenerse que $md >, =$ o $< nl$, correlativamente. Como punto de culminación, Euclides completa su marco teórico con la definición V.6: *Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón*; con la cual se domina de manera definitiva el concepto de proporción.

^[12]No decimos “igual razón”. A la distancia histórica parece una sutileza inútil; sin embargo, va más allá de esto. En inglés, De Morgan (citado por Heath) habla de “sameness of ratios”, no de “equality of ratios”. Difícilmente el uso castellano sancione el adjetivo “mismidad”.

Para finalizar la consideración pedagógica, vale la pena hacer notar que la proposición X.5 de Euclides dice: *Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número*. Lo que significa que Euclides retorna a la visión histórica original (muy particular) del concepto de proporción, cinco libros después de haber resuelto el problema de manera general. Exposiciones metódicas como éstas sólo son posibles si vienen precedidas de un largo proceso, teóricamente doloroso, compuesto de pocos aciertos y muchos errores, en los que el expositor se presenta casi como un prodigioso armador de un difícil rompecabezas histórico, que le llegó con todas o casi todas las piezas incluidas. De hecho, cualquier libro de matemática actual no es más que una instancia de un proceso de esta naturaleza, algunos no más que simples reconstrucciones de rompecabezas ya armados. Todo profesor de matemática haría bien informando de esto a sus discípulos.

Orden y aproximaciones

Queda un aspecto del problema por analizar; aspecto que se inscribe en lo más rancio de la tradición pitagórica, a pesar de lo cual no aparece como materia de estudio en los *Elementos*, pero fue explotado hasta extremos magistrales por Arquímedes. Se trata de conseguir razones numéricas que expresen de la mejor forma posible las razones entre inconmensurables. Aspecto que involucra dos subproblemas distintos: el primero: ¿qué significa “la mejor forma posible”?; el segundo, ¿qué método (o métodos) lleva a conseguir tales razones numéricas?

A nuestros objetivos le interesan fundamentalmente el primero de los subproblemas mencionados, es decir, el criterio para dar una razón numérica que pueda considerarse buena, hasta cierto grado, para representar una razón entre inconmensurables. Volvamos a la figura 8 y supongamos nuevamente que D y L son diagonal y lado respectivos de un cuadrado. Supongamos además que hemos continuado el dibujo hasta los extremos que comentaremos líneas adelante y solicitamos indulgencia con algunas afirmaciones que haremos sin prueba en ese momento.

Por ejemplo, A_5 está colocada (vuelva a la figura 8) entre a_7 y a_8 ; es decir $5D$ es más que $7L$, pero menos que $8L$. Si, por el contrario, $5D$ coincidiera con $7L$ tendríamos que decir que $D : L :: 7 : 5$; mas si coincidiera con $8L$ afirmaríamos que $D : L :: 8 : 5$. En cierto sentido, es como si la razón $7 : 5$ apareciera *antes* de la razón $D : L$ pero, a su vez, $8 : 5$ aparece *después* de $D : L$. Esta consideración muestra la necesidad de introducir el concepto de orden entre las razones: tendremos que decir que la razón $D : L$ es mayor que la razón $7 : 5$, pero menor que la razón $8 : 5$. Euclides resuelve esta necesidad con la definición V.7: *Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la*

tercera con la cuarta^[13].

Continuando de la manera indicada la exploración de la recta, y esperando la indulgencia solicitada en lo relativo a afirmaciones nada triviales, encontraremos nuevas posiciones relativas que nos permitirán expresar nuevas relaciones de orden del tipo que acabamos de describir. Así A_{10} se encuentra situada entre a_{14} y a_{15} , por lo cual $D : L$ es mayor que $14 : 10$ y menor que $15 : 10$; A_{100} se encuentra entre a_{141} y a_{142} , de donde $D : L$ es mayor que $141 : 100$ y menor que $142 : 100$; $A_{1000000}$ se localiza entre $a_{1414213}$ y $a_{1414214}$, de forma que $D : L$ es mayor que $1414213 : 1000000$ y menor que $1414214 : 1000000$.

Aplicaciones sucesivas del criterio establecido por la Def. V.7 mostrarán que las razones anteriores (incluyendo a $D : L$) se pueden organizar, de mayor a menor, de acuerdo a la siguiente lista:

$$\begin{array}{c} 8 : 5 \\ 15 : 10 \\ 142 : 100 \\ 1414214 : 1000000 \\ D : L \\ 1414213 : 1000000 \\ 141 : 100 \\ 14 : 10 \\ 7 : 5 \end{array}$$

(las dos últimas son, de hecho, la misma razón) de forma que las razones que hemos colocado en las líneas más cercanas a $D : L$ se pueden considerar “mejores” para representarla que aquellas que están en líneas más alejadas. Hoy utilizamos para expresar esta idea la palabra *aproximación*. El maestro griego de las aproximaciones fue Arquímedes; de hecho, la razón *circunferencia : diámetro*, que los griegos no pudieron demostrar inconmensurable, fue aproximada por Arquímedes situándola entre las razones $223 : 71$ y $22 : 7$. En el camino nos sorprendió con otras, de las que ni siquiera nos dio explicación, pero que nos asombran por su finura.

De los griegos a Dedekind

En las consideraciones anteriores hemos tratado de evitar, hasta donde nos ha sido posible, el uso de nomenclatura moderna. Al lector, por supuesto, no se le ha escapado que, salvo por la alusión al número áureo, no hemos hablado de otra cosa que no sea la raíz cuadrada de 2, y la seguridad que mostramos respecto a las razones aproximadas expresadas en los párrafos anteriores provienen de

^[13]María Luisa Puertas Castaño opina que, más allá de la deuda que la definición V.5 pudiera tener con Eudoxo, la V.7 es completamente euclidiana.

nuestro conocimiento de las aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$. Está claro que para los griegos la cosa no era tan fácil y lo que hasta este momento hemos querido hacer patente es, precisamente, el cúmulo de dificultades que hubieron de remontar para expresar unas ideas que hoy, dos mil trescientos años después, podemos hacer comprender, al menos operacionalmente, a un escolar. A ellos les llevó por lo menos dos siglos superar esta cuesta; pero maravilla que en la actualidad sólo repetimos su legado y lo único que hemos hecho es añadirle economía de pensamiento, en forma de notaciones que facilitan la expresión de las ideas con mayor rapidez.

De esta manera, las *razones* pasaron a ser *cocientes* y las *proporciones* se convirtieron en *igualdades numéricas*. Aún más, las razones entre conmensurables sufrieron la metamorfosis que las llevó a números *racionales* y aquellas entre inconmensurables pasaron a ser números *irracionales*. Simbólicamente, la idea

$$D : L :: d : l,$$

se transformó en

$$\frac{D}{L} = \frac{d}{l},$$

y el componente operacional de esta última trajo como consecuencia un componente estructural —siempre presente, aún no siendo evidente— el cual contribuyó a simplificar los esquemas de razonamiento, a costa de hacer menos elemental la idea original.

La nomenclatura moderna convierte entonces el concepto de “misma razón” (Def. V.5) en lo siguiente:

$$\frac{D}{L} = \frac{d}{l}$$

si y sólo si dados dos enteros cualesquiera m, n se tiene que

$$\begin{cases} mD < nL & \text{implica que} & md < nl \\ mD = nL & \text{implica que} & md = nl \\ mD > nL & \text{implica que} & md > nl \end{cases}$$

mientras que “razón mayor” (Def. V.7) se transforma en:

$$\frac{D}{L} > \frac{d}{l}$$

si y sólo si cuando dos enteros m, n hacen que $mD > nL$ entonces se cumple que $md \leq nl$.

Cada una de estas definiciones es en sí misma un test que procede de manera exclusiva con números enteros o con múltiplos enteros de las magnitudes involucradas; he allí su dificultad. Al transformarlas en relaciones numéricas abstractas, que incluyan el concepto de número racional con su carga operacional, facilitamos su manejo pues se nos hace claro que la afirmación $mD < nL$

es totalmente equivalente a $\frac{D}{L} < \frac{n}{m}$ y si queremos que $\frac{D}{L} = \frac{d}{l}$, no queda otra posibilidad que $\frac{d}{l} < \frac{n}{m}$, a su vez equivalente a $md < nl$.

Entonces, cualquier razón $D : L$ separará a todo el conjunto de las razones de enteros $n : m$ en dos partes distintas: (a) aquella parte Y en la cual $D : L$ es mayor que toda $n : m$ y (b) aquella parte X en la cual $D : L$ no es mayor que ninguna $n : m$. Si tuviéramos otra razón $d : l$ que fuera *la misma* que $D : L$ ésta nos daría una separación similar en dos partes que, correlativamente, llamaremos y y x .

Si tomamos una razón $n : m$ de la parte Y se cumplirá que $mD > nL$ pero, por la definición euclídea de “misma razón” es claro que $md > nl$ y, por tanto $n : m$ estará también en la parte y . El razonamiento anterior es completamente simétrico respecto a las ternas Y, D, L y y, d, l , por lo cual es claro que toda razón $n : m$ de la parte y será también una razón de la parte Y . En otras palabras, las partes Y y y son exactamente la misma. A partir de aquí, no debe ser difícil probar que también X y x son una y la misma cosa.

De manera que, entonces, cualquier razón $D : L$ y todas aquellas razones $d : l$ que sean las mismas que ella, separan al conjunto de las razones de enteros en las dos partes X y Y que acabamos de comentar. Obsérvese que si D y L son conmensurables entonces $D : L :: n : m$, para alguna razón $n : m$ de la parte X ; es más $n : m$ es la mayor de las razones contenidas en la parte X ; pero si no son conmensurables entonces no podría establecerse una proporción como la señalada para ninguna razón de enteros $n : m$.

En el año de 1872, el matemático alemán Richard Dedekind (1831–1916) publicó un artículo denominado “*Continuidad y números irracionales*” en el que demuestra que el conjunto de los números racionales puede separarse, de infinitas maneras, en dos conjuntos, de forma que los elementos de uno de ellos sean todos mayores que cualquiera de los elementos del otro conjunto. A esta separación, Dedekind la denominó *cortadura* y la representó por el símbolo (A_1, A_2) , en el que A_1 y A_2 son los conjuntos de la separación.

Además de esto, demostró que hay dos clases de cortaduras. Para una de estas clases, uno de los conjuntos de la separación tiene un elemento extremo que le pertenece. Es decir, el conjunto de elementos mayores tiene un elemento que es el menor de todos o el conjunto de elementos menores tiene un elemento que es el mayor de todos. La otra clase tiene la característica de no poseer tales elementos extremos. Evidentemente, en el primer caso, el elemento extremo en cuestión es un número racional y Dedekind dice, entonces, que este número *produce* dicha cortadura; en consecuencia, la cortadura se identifica con tal número racional.

En lo que respecta al segundo caso, Dedekind escribe: “Entonces, siempre que nos encontremos con una cortadura (A_1, A_2) que no haya sido producida por ningún número racional, crearemos un nuevo número, un número *irracional*”

α , al que consideraremos completamente definido por esta cortadura (A_1, A_2) ; diremos que el número α corresponde a esta cortadura o que la produce.”^[14] Es decir, Dedekind define al número irracional por simple identificación con la cortadura correspondiente y, como es lógico, cada racional en A_1 es menor que α y cada racional de A_2 es mayor que α . Lo demás es añadir a este concepto una base operacional, tarea que Dedekind realiza pocas páginas después en el mismo ensayo.

Los historiadores de la matemática han observado que (salvo quizás por esta base operacional) el concepto de “misma razón” se puede comparar con el concepto de cortadura de Dedekind. Basta observar que las partes X, Y que aparecieron párrafos atrás pueden asimilarse exitosamente, de forma correlativa, a los conjuntos A_1, A_2 que conforman la cortadura. Así mismo, la pertenencia o no de las razones $D : L$ a la parte X se puede comparar al papel de los números (rationales o irracionales, respectivamente) que *producen* la cortadura.

Para otros, en cambio, esta comparación resulta forzada. Pudieran tener razón, si consideramos que Euclides (o Eudoxo, en cualquier caso) y Dedekind orientaban sus objetivos sobre dos terrenos de naturalezas totalmente distintas. Sin embargo, en matemática como en el poema de Manrique^[15], pareciera que todos los conceptos van al mismo mar. Sólo que en la matemática no se trata de “la mar, que es el morir” sino, por el contrario, de una mar que es renacer.

DOUGLAS JIMÉNEZ
 UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA (UNEXPO)
 “ANTONIO JOSÉ DE SUCRE”. VENEZUELA
 dougjim@cantv.net; djimenez@bqto.unexpo.edu.ve

^[14] *Essays on the theory of numbers (I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers)*. Richard Dedekind. Dover Publications Inc. New York. 1963. Pág. 15. La traducción es del autor de este ensayo.

^[15] “Nuestras vidas son los ríos/ que van a dar en la mar/ que es el morir:/ allí van los señorios/ derechos a se acabar/ e consumir.” Jorge Manrique, poeta renacentista español.

INFORMACIÓN INTERNACIONAL

Desde Madrid: Congreso Internacional de Matemáticos, ICM 2006

Argimiro Arratia

Una fiesta de matemáticos. Así calificó el Congreso Internacional de Matemáticos el presidente saliente de la Unión Matemática Internacional (IMU), John Ball, en su charla de bienvenida. Una fiesta que empezó el 22 de Agosto y concluyó ocho días después, y a la cual se dieron cita más de 3.500 matemáticos procedentes de 115 países, en el Palacio de Congresos de Madrid. Una fiesta que tuvo como maestro de ceremonia al Rey de España, Juan Carlos I, acompañado en la platea por la ministra de Educación y Cultura, Mercedes Cabrera, la presidenta de la Comunidad de Madrid, Esperanza Aguirre, y el Alcalde de Madrid, Alberto Ruiz Gallardón. Todos con discursos mesurados, mensajes optimistas, y alguno que otro auto-halago. Para muestra un botón. El Rey: “La matemática es un instrumento básico para comprender el mundo, pilar esencial de la educación y herramienta imprescindible para asegurar el progreso de la humanidad”. (Bien merecido aplauso.) La ministra Cabrera: “Celebro el ascenso de España a la décima posición en la escala mundial de investigación y desarrollo en matemáticas (...) Este Congreso es una oportunidad para que los científicos asesoren a los poderes públicos sobre las líneas de apoyo a seguir en el futuro”. (Tómenle la palabra.)

Medallas y premios. Los ganadores de las Medallas Fields en esta edición de los ICM's son Andrei Okounkov, Grigori Perelman, Terence Tao y Wendelin Werner. El premio Nevanlinna se otorgó a Jon Kleinberg, y el premio Gauss a Kiyoshi Itô. Las medallas y premios fueron entregados por el Rey de España en la ceremonia de apertura.

Según el veredicto del jurado para la Medalla Fields, esta se otorgó a:

Andrei Okounkov, *por sus contribuciones en la interacción entre la teoría de probabilidades, la teoría de representaciones y la geometría algebraica.*

Andrei Okounkov nació en Moscú en 1969, doctorándose en Matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú en 1995. Actualmente es profesor de matemáticas en la Universidad de Princeton y ha sido investigador en la Academia Rusa de Ciencias, el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, la Universidad de Chicago y la Universidad de California en Berkeley.

Grigori Perelman, *por sus contribuciones a la geometría y su revolucionaria profundización en la estructura geométrica y analítica del flujo de Ricci.*

En particular, el trabajo de Perelman produjo una solución a la Conjetura de Poincaré, por lo cual era él uno de los candidatos más predecibles a recibir la Fields. Para sorpresa de muchos, Perelman no se presentó al acto de entrega y, más aún, envió un comunicado en el que rechazaba el premio, por estar desencantado con la comunidad matemática. Sin embargo, John Ball aseguró que el premio a Perelman se mantiene, gústele o no.

Grigori Perelman nació en 1966 en la otrora Unión de Repúblicas Soviéticas. Obtuvo su doctorado en matemáticas de la Universidad Estatal de San Petersburgo. Durante los años 90 visitó los Estados Unidos, pasando una temporada como investigador “Miller” de la Universidad de California en Berkeley. Hasta antes de su anunciado retiro del mundo de las matemáticas fue investigador en el Instituto Steklov de Matemáticas, en San Petersburgo.

Terence Tao, *por sus contribuciones a las ecuaciones en derivadas parciales; combinatoria; análisis armónico; y teoría de números aditiva*. Terence Tao nació en Adelaide, Australia, en 1975. Obtuvo el grado de doctor en matemáticas en 1996 en la Universidad de Princeton. Es actualmente profesor de matemáticas en la University of California, Los Angeles. Entre sus distinciones se cuentan premios de la Sloan Foundation, Packard Foundation, Clay Mathematics Institute. En 2000 recibió el premio Salem; en 2002 el premio Bocher de la American Mathematical Society; y en 2005 el premio Conant (junto con Allen Knutson) de la American Mathematical Society. A sus 31 años, Tao ha escrito unos 80 artículos de investigación, con unos 30 colaboradores.

Wendelin Werner, *por sus contribuciones al desarrollo de la evolución estocástica de Loewner, la geometría del movimiento browniano de dos dimensiones y la teoría conforme de campos*. Aunque nació en Alemania en 1968, Wendelin Werner es de nacionalidad francesa, y desde este momento hijo pródigo de Francia, como se infiere de un comunicado enviado a la IMU por el presidente francés Jacques Chirac donde se lee: “Esta distinción recompensa la excelencia de los trabajos de Werner (...) y da testimonio una vez más de la gran calidad de la escuela matemática francesa”.

Wendelin Werner se doctoró en la Universidad de París VI en 1993. Ha sido profesor de matemáticas en la Université de Paris-Sud, Orsay desde 1997. De 2001 a 2006 fue miembro del Institut Universitaire de France, y desde 2005 está a tiempo parcial en la École Normale Supérieure de Paris. Entre sus distinciones se cuentan el Rollo Davidson Prize (1998), el premio de la Sociedad Matemática Europea a jóvenes investigadores (2000), y los premios Fermat (2001), Herbrand (2003), Loève (2005) y Pòlya (2006).

El premio Rolf Nevanlinna fue entregado a **Jon Kleinberg** *por sus trabajos sobre análisis de redes, el enrutado, la minería de datos, la comparación de genomas y el análisis de la estructura de las proteínas*. Kleinberg nació en 1971 en Boston (Massachusetts, EEUU). Se doctoró en 1996 en el Massachusetts Institute of Technology (MIT). Es profesor de ciencia de la computación en la Universidad Cornell. Entre los reconocimientos que ha tenido se encuentran el Sloan Foundation Fellowship (1997), Packard Foundation Fellowship (1999) y el Initiatives in Research Award de la U.S. National Academy of Sciences (2001). En el 2005, Kleinberg recibió la designación de MacArthur genius Fellowship de la John D. and Catherine T. MacArthur Foundation.

Finalmente, el premio Gauss, en su primera edición, fue obtenido por el japonés **Kiyoshi Itô**, de 90 años de edad, quien por problemas de salud no pudo viajar a Madrid, pero delegó en una de sus hijas el recibir su premio de las manos del Rey. Esta medalla Gauss premia a Itô por la creación y fructífero desarrollo del análisis estocástico y sus aplicaciones.

El “nuevo” Teorema de Poincaré. La noticia más esperada antes y durante el Congreso era la confirmación de la correctitud de la prueba de la Conjetura de Poincaré dada por Perelman. Esto, por supuesto, para el público matemático no muy entendido en profundidades topológicas, porque ya para varios expertos en la materia se había consolidado la creencia de que en efecto la larga prueba de Perelman está bien. Ya el hecho de recibir Perelman la Medalla Fields era indicio del valor de su trabajo. Pero para despejar toda duda, dos sendas charlas plenarias fueron dictadas por quienes, además de Perelman, han dedicado al estudio de este problema una buena cantidad de años de trabajo.

La primera charla plenaria (y con la que abrió el Congreso) fue dictada por Richard Hamilton, titulada apropiadamente “The Poincaré Conjecture”. Hamilton, de la Universidad de Columbia (EEUU), es quien propuso el método, importado desde el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales y basado en el análisis del flujo de Ricci, sobre el cual Perelman construyó su demostración.

La segunda charla, dictada dos días después, por John Morgan, también de la Universidad de Columbia, y titulada “A report on the Poincaré Conjecture” resultó más accesible para el inexperto (el grueso de los asistentes al Congreso) que la muy técnica charla de Hamilton. Comenzó Morgan con una explicación simplificada de la Conjetura de Poincaré, y luego de resaltar su importancia en topología y geometría, pasó a explicar cómo caracterizar las deformaciones de la métrica riemanniana mediante una ecuación del calor, y de allí al análisis del flujo de Ricci y el “plan de Hamilton”. John Morgan junto con Gang Tian (de la Universidad de Princeton) han escrito un grueso libro donde presentan una solución detallada de la Conjetura de Poincaré, basada en las ideas de Perelman.

Tanto Hamilton como Morgan coinciden en que la Conjetura de Poincaré está demostrada, y la autoría de la solución es para Perelman; aunque en declaraciones dadas en una conferencia de prensa organizada poco después de

su charla, Hamilton expresó: “Yo prefiero decir que Perelman ha resuelto el último escollo en un esfuerzo colectivo”.

En fin, la demostración de Perelman de la Conjetura de Poincaré ha sido exhaustivamente verificada y tiene el visto bueno de sendos expertos. Recordemos que es este el primer problema que se resuelve de la lista de los Problemas para el Nuevo Milenio formulada por el Instituto Clay y que por cada solución esa institución pagará un millón de dolares. ¿Rechazará Perelman el millón de Clay, tal como rechazó la Medalla Fields? El drama se espesa, y ya da para un culebrón al buen estilo venezolano; pero tratándose de matemáticos resulta surrealista, por lo cual no me atreveré a vender la idea y cierro esta sección del reporte aquí.

Matemáticas en España y el reto del futuro. La actividad matemática en España ha crecido espectacularmente en los últimos 20 años. Según informa en el *Intelligencer*, Manuel de León, miembro de la Real Academia de Ciencias de España y Presidente del Comité Ejecutivo del ICM 2006, la contribución de España en 1980 a la lista ISI de artículos de matemáticas fue de un mero 0.3%, mientras que en el período 2000–2004 esta cifra alcanzó el 4.82%. Durante este congreso, la matemática española ha tomado la calle a través de la prensa, además de las diversas y muy apropiadas actividades culturales desarrolladas en varios lugares públicos de Madrid, pertinente a las matemáticas: *La vida de los números* en la Biblioteca Nacional; retrospectiva de la vida de Kurt Gödel en el Jardín Botánico de la Universidad Complutense; *Experimentando las Matemáticas* en el Centro Cultural Conde Duque; etc. Fue una ocasión bien aprovechada para hacer al público consciente de la necesidad y utilidad, además de la belleza, de las matemáticas. Y un ejemplo a seguir por cualquier Sociedad de Matemáticas: Hay que continuamente llegar hasta el público fuera de los ámbitos usuales de las matemáticas; hay que hacer una labor continua de “lobby” ante organismos gubernamentales y privados, para hacerlos entender la importancia de esta ciencia, los múltiples beneficios que aporta a la sociedad. Y forzar a los jefes del gobierno de turno a involucrar mayor financiación para esta, como para todas las ciencias. A superar el escaso uno y pico por cien del PIB que actualmente dedica el gobierno de España a la ciencia hasta alcanzar el ideal 2 y tanto por cien y hasta el 3%, que según se estima invierten países como EEUU y otros “desarrollados”. Porque en definitiva, la buena salud científica y crecimiento tecnológico de un país depende más de una política de estado y no del conjunto de buenas intenciones de matemáticos con espíritu de servicio y sacrificio público. Concluyo haciendo eco del editorial publicado en el diario *El País* al día siguiente del inicio del ICM 2006: Si bien “las matemáticas españolas existen”, les falta “un impulso de calidad”.

N.B.: Para ampliar las noticias aquí expuestas visite la página web de este ICM en www.icm2006.org

INFORMACIÓN INTERNACIONAL

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamonedá

En esta oportunidad reseñaremos la actividad olímpica del primer semestre del año 2006. Comenzamos por destacar el gran éxito alcanzado en nuestro evento nacional, la Olimpiada Recreativa y Juvenil de Matemáticas, y el Canguro Matemático. Este año, con el apoyo extraordinario de la Fundación Polar y de nuestros patrocinadores tradicionales, Cantv y Banesco, tuvimos una participación de 104.000 estudiantes, superando la cifra de 25.000 jóvenes del año pasado. Esto nos ha permitido extender la Olimpiada a la casi totalidad del territorio nacional. Aprovecho la oportunidad para agradecer a todos los colegas que colaboraron para hacer posible el éxito de este año.

Como ya es tradición participamos en la 47^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, celebrada en Ljubljana, Eslovenia, del 6 al 18 de Julio y la VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, Panamá del 29 de Julio al 5 de Agosto. También participamos en la Olimpiada Bolivariana de Matemáticas y la Olimpiada Matemática de Mayo. En todas estas competencias ganamos premios, destacando tres menciones honoríficas en la IMO, y una medalla de bronce en la OMCC. Un par de días antes de escribir esta nota hemos recibido los resultados de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria en la cual también ganamos medallas. Los galardonados son los jóvenes, Adolfo Rodríguez, (UCV, medalla de plata), Leonardo Urbina, (UCV, medalla de bronce), Héctor Chang, (USB, medalla de bronce) y Roland Hablutzel, (USB, medalla de bronce). Felicitaciones.

Delegaciones y premios obtenidos en la IMO, y la OMCC en el año 2006.

47^a IMO

Sofía Taylor. Caracas. Mención Honorífica.

Andrés Guzmán. Caracas. Mención Honorífica.

Rafael Guédez. Maracaibo. Mención Honorífica.

Víctor Villamizar. Valencia.

Laura Vielma. Tutor de delegación. UPEL.

Rafael Sánchez. Jefe de delegación. UCV.

VIII OMCC

Gilberto Urdaneta. Maracaibo. Medalla de Bronce.

Carmela Acevedo. Caracas.

Aliesca Medina. Valencia.

Héctor Chang. Tutor de la delegación. USB.

Adolfo Rodríguez. Jefe de la delegación. UCV.

En la Olimpiada de Mayo nuestros estudiantes ganaron una medalla de plata y siete medallas de bronce para un total de 16 premios en lo que va del año 2006. Estamos a la espera de los resultados de la Olimpiada Bolivariana.

La próxima competencia será la XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, a celebrarse en Guayaquil, Ecuador, del 23 al 30 de Septiembre. El equipo ha sido escogido entre los estudiantes ganadores en la IMO y la OMCC, Sofía Taylor, Gilberto Urdaneta, Rafael Guédez y Andrés Guzmán. El Jefe de la delegación es el profesor Henry Martínez y la tutora es la profesora Silvina María de Jesús, ambos del Pedagógico de Caracas, UPEL. También informamos que hemos obtenido la sede para organizar la IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe, en Junio del 2007.

Como siempre finalizamos con algunos de los problemas de las competencias a las cuales asistimos. En esta oportunidad les mostramos los exámenes de la IMO 2006. Como en todas estas competencias, cada problema vale 7 puntos y el tiempo de duración de cada prueba es de 4 horas y media.

47^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Primer día

Ljubljana, Eslovenia, miércoles 12 de julio de 2006

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea I el centro de su circunferencia inscrita. Sea P un punto en el interior del triángulo tal que

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Demuestre que $AP \geq AI$ y que vale la igualdad si y sólo si $P = I$.

Problema 2. Decimos que una diagonal de un polígono regular P de 2006 lados es un *segmento bueno* si sus extremos dividen al borde de P en dos partes, cada una de ellas formada por un número impar de lados. Los lados de P también se consideran *segmentos buenos*.

Supongamos que P se ha dividido en triángulos trazando 2003 diagonales de modo que ningún par de ellas se corta en el interior de P . Encuentre el máximo número de triángulos isósceles que puede haber tales que dos de sus lados son *segmentos buenos*.

Problema 3. Determine el menor número real M tal que la desigualdad

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

se cumple para todos los números reales a, b, c .

Segundo día

Ljubljana, Eslovenia, jueves 13 de julio de 2006

Problema 4. Determine todas las parejas de enteros (x, y) tales que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes enteros y sea k un entero positivo. Considere el polinomio $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, donde P aparece k veces. Demuestre que hay a lo sumo n enteros t tales que $Q(t) = t$.

Problema 6. Asignamos a cada lado b de un polígono convexo P el área máxima que puede tener un triángulo que tiene a b como uno de sus lados y que está contenido en P . Demuestre que la suma de las áreas asignadas a los lados de P es al menos el doble del área de P .

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs. 10.000 (US\$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history or philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance.

All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsibility of the author.

All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs. 10.000 (US\$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: <http://boletinamv.ma.usb.ve/>

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.

Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86