Operador de Gram Asociado al Operador de Schrödinger con Potencial Puntual Singular

Vladimir Strauss y Javier Villamizar

Resumen. En este trabajo es calculado el operador de Gram asociado a la forma bilineal generada por $A_\alpha f = -\Delta f + \alpha\delta^{(k)} f$ en el espacio de Sobolev $W_2^{k+1}(\mathbb{R})$, para $k = 1, 2$. Se encuentran autovalores negativos del operador de Gram correspondiente a cada caso a través de la fórmula de Krein del resolvente para perturbaciones regulares de rango dos y tres.

Abstract. In this paper we compute the Gram operator associated with the bilinear form generated by $A_\alpha f = -\Delta f + \alpha\delta^{(k)} f$ in the Sobolev space, $W_2^{k+1}(\mathbb{R})$, for $k = 1, 2$. We found negative eigenvalues for the Gram operator in each case through the Klein's resolvent formula for regular perturbations of rank two and three.

Introducción

Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal autoadjunto definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Consideremos formalmente el operador perturbado $A_T = A+T$, donde T es otro operador lineal tal que $T\big|_{\mathcal{D}(A)} \neq 0$, definido en el espacio $\mathcal{H}$. Si $\overline{\mathrm{Ker}(T)} = \mathcal{H}$ se dice que la perturbación A_T es una perturbación singular del operador A. Si el operador T es de rango finito, es decir, $\dim(\mathcal{R}(T)) < \infty$, decimos que la perturbación A_T es una perturbación de rango finito.

En física es de gran interés estudiar el operador de Schrödinger $H = -\Delta + V$ como el operador diferencial $-\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$, definido en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, perturbado con algún operador V, llamado potencial. Desde un punto de vista físico aparecen operadores de Schrödinger con potenciales del tipo $\alpha\delta$, donde α es una constante y δ es la función generalizada de Dirac. Hay varios enfoques dados a este operador. Por ejemplo ver [1][2] y las referencias que pueden conseguirse en esas monografÌas.

En este trabajo se estudian los operadores del tipo $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta^{(k)}$, donde $\delta^{(k)}$ es la k-ésima derivada de la función delta de Dirac. En particular, se analiza el problema de existencia de autovalores negativos asociados al operador A_α.

Los casos que son analizados son $k = 1$ y $k = 2$. Para ello se considera la forma bilineal que genera $A_\alpha f = -\frac{d^2 f}{dt^2} + \alpha\delta^{(k)} f$ y el operador de Gram asociado a ella en el espacio de Sobolev W_2^{k+1}. En la primera sección es hallado el operador de Gram asociado a la forma bilineal generada por $A_\alpha f$ para el caso $k = 1$. En la segunda sección se presenta una fórmula para el resolvente de perturbaciones (regulares) de rango dos. Usando esta fórmula, en la siguiente sección se buscan los autovalores negativos del operador de Gram asociado a $A_\alpha f$, con $k = 1$. En las siguientes tres secciones se realizan los mismos cálculos y en el mismo orden de las secciones uno, dos y tres para el caso $k = 2$.

1. Operador de Gram Asociado a $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta'$ en el espacio de Sobolev $W_2^2(\mathbb{R})$

Consideremos formalmente la expresión $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta'$, y el funcional que ésta define

$$\begin{aligned}\langle A_\alpha f, g\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left(-f''(t) + \alpha\delta'(t)f(t)\right) g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)dt + \alpha\int_{\mathbb{R}} \delta'(t)f(t)g(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\, dt + \alpha\left(-f'(0)g(0) - f(0)g'(0)\right) = \langle Gf, g\rangle_{W_2^2}\end{aligned}$$

donde W_2^2 representa el espacio de Sobolev en $\mathbb{R}$ y G es el operador de Gram asociado a $A_\alpha f$ en W_2^2. El primer objetivo es hallar una expresión explícita para G. Para ello consigamos funciones de W_2^2, φ y ψ, tales que podamos representar los funcionales δ y δ' en términos del producto interno en W_2^2, es decir,

$$\begin{aligned} g(0) &= \langle \varphi, g\rangle_{W_2^2} \\ -g'(0) &= \langle \psi, g\rangle_{W_2^2} \end{aligned}$$

donde $g \in W_2^2$ (ver [4, p.253], Teorema de Riesz). Integrando por partes dos veces tenemos

$$\begin{aligned}\langle \varphi, g\rangle_{W_2^2} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)g(t)dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi''(t)g''(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)g(t)dt + (\varphi''(0^-) - \varphi''(0^+))g'(0) \\ &\qquad -(\varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+))g(0) + \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(IV)}(t)g(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\varphi(t) + \varphi^{(IV)}(t))g(t)dt \\ &\qquad +(\varphi''(0^-) - \varphi''(0^+))g'(0) - (\varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+))g(0)\end{aligned}$$

luego $\langle \varphi, g \rangle_{W_2^2} = g(0)$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \varphi + \varphi^{(IV)} &= 0 & (1) \\ \varphi''(0^-) - \varphi''(0^+) &= 0 & (2) \\ \varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+) &= -1 & (3) \end{aligned}$$

Similarmente podemos deducir que $\langle \psi, g \rangle_{W_2^2} = -g'(0)$ si $\psi + \psi^{(IV)} = 0$, $\psi''(0^-) - \psi''(0^+) = -1$ y $\psi'''(0^-) - \psi'''(0^+) = 0$. Una base para el espacio de soluciones de la ecuación diferencial (1) puede ser definida con las funciones

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \cos(ct)e^{ct} \\ \phi_2(t) &= \sin(ct)e^{ct} \\ \phi_3(t) &= \cos(ct)e^{-ct} \\ \phi_4(t) &= \sin(ct)e^{-ct} \end{aligned}$$

donde $c = 1/\sqrt{2}$. Consideremos φ definido por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha\phi_1(t) + \beta\phi_2(t) & \text{si } t < 0 \\ \\ \xi\phi_3(t) + \eta\phi_4(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

entonces

$$\varphi'(t) = \begin{cases} (c\alpha + c\beta)\phi_1(t) + (c\beta - c\alpha)\phi_2(t) & \text{si } t < 0 \\ \\ (-c\xi + c\eta)\phi_3(t) + (-c\xi - c\eta)\phi_4(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\varphi''(t) = \begin{cases} (2c^2\beta)\phi_1(t) + (-2c^2\alpha)\phi_2(t) & \text{si } t < 0 \\ \\ (-2c^2\eta)\phi_3(t) + (2c^2\xi)\phi_4(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\varphi'''(t) = \begin{cases} (-2c^3\alpha + 2c^3\beta)\phi_1(t) + (-2c^3\alpha - 2c^3\beta)\phi_2(t) & \text{si } t < 0 \\ \\ (2c^3\xi + 2c^3\eta)\phi_3(t) + (-2c^3\xi + 2c^3\eta)\phi_4(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Dado que φ y φ' deben ser continuas en $t = 0$, entonces $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t)$ y $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi'(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \varphi'(t)$, y de las condiciones de salto para la segunda y tercera derivada dadas por (2) y (3) podemos deducir fácilmente las siguientes ecuaciones para α, β, ξ y η:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2c^3 \end{pmatrix}$$

Igualmente se obtienen las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2c^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para obtener el funcional δ' en términos de ψ. Así tenemos finalmente las expresiones para φ y ψ

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8}} \cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t) e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} + \frac{-1}{\sqrt{8}} \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t) e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} & \text{si } t < 0 \\ \\ \frac{1}{\sqrt{8}} \cos(\frac{1}{\sqrt{2}}t) e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} + \frac{1}{\sqrt{8}} \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t) e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{-1}{2} \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t) e^{\frac{1}{\sqrt{2}}t} & \text{si } t < 0 \\ \\ \frac{-1}{2} \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}t) e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Ahora podemos escribir en términos del producto interno en W_2^2 la expresión para δ'·

$$\begin{aligned} \langle \delta' f, g \rangle_{L^2} &= -(f'(0)g(0) + f(0)g'(0)) \\ &= -f'(0) \langle \varphi, g \rangle_{W_2^2} + f(0) \langle \psi, g \rangle_{W_2^2} \\ &= \left\langle \langle \psi, f \rangle_{W_2^2} \varphi + \langle \varphi, f \rangle_{W_2^2} \psi, g \right\rangle_{W_2^2} \\ &= \langle Tf, g \rangle_{W_2^2} \end{aligned}$$

donde T es el operador de rango dos sobre el espacio W_2^2 definido por

$$T := \langle \psi, \cdot \rangle_{W_2^2} \varphi + \langle \varphi, \cdot \rangle_{W_2^2} \psi$$

Así tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} (-f''(t) + \alpha \delta'(t) f(t))\, g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} -f''(t) g(t)\, dt + \alpha \langle Tf, g \rangle_{W_2^2}$$

Resta expresar $\int_{\mathbb{R}} -f''(t) g(t)\, dt$ en términos del producto interno en W_2^2 para tener la expresión completa del operador de Gram. Queremos buscar entonces

h tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\,dt &= \langle h, g\rangle_{W_2^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t)g(t)\,dt + \int_{\mathbb{R}} h''(t)g''(t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (h(t) + h^{IV}(t))g(t)\,dt \\ &\quad + g'(0)(h''(0^-) - h''(0^+)) \\ &\quad\quad - g(0)(h'''(0^-) - h'''(0^+))\end{aligned}$$

Entonces h debe satisfacer $h(t)+h^{IV}(t) = -f''(t)$, $h''(0^-) = h''(0^+)$ y $h'''(0^-) = h'''(0^+)$. Sea $L := \frac{d^4}{dt^4} + 1$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} (Lh)(t)g(t)\,dt \implies h = L^{-1}(-f'')$$

donde L^{-1} es la convolución con la función de Green asociada a L, que ya hemos calculado previamente , es decir, φ. De esta manera tenemos la expresión completa para el operador G

$$G := A + \alpha\left(\langle\psi, \cdot\rangle_{W_2^2}\,\varphi + \langle\varphi, \cdot\rangle_{W_2^2}\,\psi\right)$$

donde A es un operador integral (convolución con la función φ).

2. Perturbaciones de Rango dos. Fórmula del Resolvente

El operador obtenido en la sección anterior es una perturbación regular de rango dos del operador integral A, es decir, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_\alpha)$ y $\dim\mathcal{R}(T) = 2$. En [2] perturbaciones de rango uno son ampliamente estudiadas. Estos modelos se consideran solubles en el sentido en que se puede dar una expresión explícita del resolvente del operador perturbado, ver [1][3]. Para el caso de perturbaciones regulares de rango uno una fórmula para el resolvente es bien conocida, ver [2]. Nuestro propósito ahora es dar una fórmula análoga para el tipo de perturbaciones que hemos obtenido.

Teorema 2.1 (Fórmula de Krein. Perturbaciones regulares de rango dos). *Sea A un operador autoadjunto actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sean φ y ψ vectores cualesquiera de $\mathcal{H}$. Entonces el resolvente del operador original A y de su perturbación de rango dos $A_\alpha = A + \alpha(\langle\psi,\cdot\rangle\,\varphi + \langle\varphi,\cdot\rangle\,\psi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, están relacionados por la siguiente fórmula*

$$(A_\alpha - \lambda)^{-1} - (A - \lambda)^{-1} = -\alpha G(\psi, \cdot)(A - \lambda)^{-1}\varphi - \alpha F(\varphi, \cdot)(A - \lambda)^{-1}\psi$$

donde λ *es cualquiera,* $\Im\lambda \neq 0$ *y*

$$F(\varphi,\cdot) \quad = \quad -\frac{-B\,(\varphi,\cdot) - B\,(\varphi,\cdot)\,\alpha B\,(\psi,\varphi) + B\,(\psi,\cdot)\,\alpha B\,(\varphi,\varphi)}{\alpha^2\,(\,B\,(\psi,\varphi)\,B\,(\varphi,\psi) - B\,(\psi,\psi)\,B\,(\varphi,\varphi)\,) + \alpha\,(\,B\,(\varphi,\psi) + B\,(\psi,\varphi)\,) + 1}$$

$$G(\psi,\cdot) \quad = \quad \frac{B\,(\psi,\cdot) + \alpha\,B\,(\varphi,\psi)\,B\,(\psi,\cdot) - B\,(\varphi,h)\,\alpha\,B\,(\psi,\psi)}{\alpha^2\,(\,B\,(\psi,\varphi)\,B\,(\varphi,\psi) - B\,(\psi,\psi)\,B\,(\varphi,\varphi)\,) + \alpha\,(\,B\,(\varphi,\psi) + B\,(\psi,\varphi)\,) + 1}$$

y la forma bilineal $B(f,g)$ *est definida por* $B(f,g) := \left\langle f, (A-\lambda)^{-1} g \right\rangle$

Demostración. El objetivo es calcular el resolvente del operador A_α, para ello necesitamos conseguir f en función de h tal que

$$h = (A_\alpha - \lambda) f$$

Desarrollando la expresión que tenemos para A_α queda

$$\begin{aligned} h &= (A-\lambda) f + \alpha T f \\ h &= (A-\lambda) f + \alpha \langle \psi, f\rangle\, \varphi + \alpha \langle \varphi, f\rangle\, \psi \end{aligned} \tag{4}$$

aplicando $(A-\lambda)^{-1}$ a ambos lados de (4) y despejando f tenemos

$$f \quad = \quad (A-\lambda)^{-1} h - \alpha \langle \psi, f\rangle\, (A-\lambda)^{-1} \varphi - \alpha \langle \varphi, f\rangle\, (A-\lambda)^{-1} \psi \tag{5}$$

Definamos la forma sesquilineal $B(\varphi,\psi) := \left\langle \varphi, (A-\lambda)^{-1} \psi \right\rangle$. Ahora hacemos el producto interno de f con φ y ψ

$$\begin{aligned} \langle \varphi, f\rangle &= B(\varphi,h) - \alpha \langle \psi, f\rangle\, B(\varphi,\varphi) - \alpha \langle \varphi, f\rangle\, B(\varphi,\psi) \\ \langle \psi, f\rangle &= B(\psi,h) - \alpha \langle \psi, f\rangle\, B(\psi,\varphi) - \alpha \langle \varphi, f\rangle\, B(\psi,\psi) \end{aligned}$$

y resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha B(\varphi,\psi) & \alpha B(\varphi,\varphi) \\ \alpha B(\psi,\psi) & 1+\alpha B(\psi,\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi, f\rangle \\ \langle \psi, f\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\varphi,h) \\ B(\psi,h) \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\langle \varphi, f\rangle \quad = \quad -\frac{-B\,(\varphi,h) - B\,(\varphi,h)\,\alpha B\,(\psi,\varphi) + B\,(\psi,h)\,\alpha B\,(\varphi,\varphi)}{\alpha^2\,(\,B\,(\psi,\varphi)\,B\,(\varphi,\psi) - B\,(\psi,\psi)\,B\,(\varphi,\varphi)\,) + \alpha\,(\,B\,(\varphi,\psi) + B\,(\psi,\varphi)\,) + 1}$$

$$\langle \psi, f\rangle \quad = \quad \frac{B\,(\psi,h) + \alpha\,B\,(\varphi,\psi)\,B\,(\psi,h) - B\,(\varphi,h)\,\alpha\,B\,(\psi,\psi)}{\alpha^2\,(\,B\,(\psi,\varphi)\,B\,(\varphi,\psi) - B\,(\psi,\psi)\,B\,(\varphi,\varphi)\,) + \alpha\,(\,B\,(\varphi,\psi) + B\,(\psi,\varphi)\,) + 1}$$

sustituyendo estas dos expresiones en (5) obtenemos la fórmula para el resolvente de A_α □

Usando esta fórmula podemos conseguir los polos del resolvente de G, es decir, conseguir λ tal que el determinante de la matriz 2×2 que aparece en (6) sea igual a cero. Estamos interesados particularmente en los autovalores negativos.

3. Autovalores del Operador de Gram Asociado a $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta'$ en $W_2^2(\mathbb{R})$

Para poder calcular explícitamente el resolvente de

$$G := A + \alpha\left(\langle \psi, \cdot \rangle_{W_2^2} \varphi + \langle \varphi, \cdot \rangle_{W_2^2} \psi\right)$$

es necesario obtener los valores de $B(f,g)$ que aparecen en la matriz de coeficientes del sistema (6), para $f, g = \varphi$ y ψ.

Hemos definido $B(f,g) := \left\langle f, (A-\lambda)^{-1} g \right\rangle$. Donde, en particular,

$$(A-\lambda)g(t) = \varphi * g - \lambda g(t)$$

y $\varphi * g = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t-s)g(s)\,ds$. Consideremos el operador $S := FAF^{-1}$, donde F es la transformada de Fourier y F^{-1} su inversa. Así $(A-\lambda)^{-1} = F^{-1}(S-\lambda)^{-1}F$, con $(S-\lambda)^{-1}h = \dfrac{h}{\hat{\varphi}-\lambda}$. Luego $(A-\lambda)^{-1}h = F^{-1}\dfrac{\hat{h}}{\hat{\varphi}-\lambda}$, donde $\hat{h} = Fh$. Siguiendo este esquema de trabajo obtenemos, para $\lambda < 0$,

$$\begin{aligned}
B(\varphi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda-\lambda w^4}\,dw = \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{(1-\lambda)^{3/4}\sqrt[4]{-\lambda}} \\
B(\psi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat{\varphi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw}{1-\lambda-\lambda w^4}\,dw = 0 \\
B(\varphi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw}{1-\lambda-\lambda w^4}\,dw = 0 \\
B(\psi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat{\psi}(w)}{\hat{\varphi}(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^2}{1-\lambda-\lambda w^4}\,dw = -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-\lambda}\,(-\lambda)^{3/4}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas cantidades en la matriz 2×2 del sistema de ecuaciones (6) que aparece en la prueba del teorema (2.1) tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4\,\frac{\alpha\sqrt{2}}{(1-\lambda)^{3/4}\sqrt[4]{-\lambda}} \\ -1/4\,\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-\lambda}(-\lambda)^{3/4}} & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/4\,\frac{\alpha\sqrt{2}}{(1-\lambda)^{3/4}\sqrt[4]{-\lambda}} \\ -1/4\,\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt[4]{1-\lambda}(-\lambda)^{3/4}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\,\frac{-8\,\lambda + 8\,\lambda^2 + \alpha^2}{\lambda\,(-1+\lambda)} \qquad (7)$$

el cual es cero para λ ($\lambda < 0$)

$$\lambda = 1/2 - 1/4\sqrt{4 - 2\,\alpha^2}$$

Valores reales de α no dan valores de λ negativos, ni siquiera reales, luego α debe ser imaginario. De hecho, si α es calculado de la ecuación (7) en función de λ, de manera que tengamos determinante igual a cero, obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\sqrt{2\,\lambda - 2\,\lambda^2} \\ \alpha_2 &= -2\sqrt{2\,\lambda - 2\,\lambda^2} \end{aligned}$$

lo cual ilustra la afirmación: para tener autovalores $\lambda < 0$ del operador de Gram asociado a $A_\alpha f = \dfrac{d^2 f}{dt^2} + \alpha\delta' f$, entonces la constante α debe ser un número imaginario.

4. Operador de Gram Asociado a $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta''$ en el espacio de Sobolev $W_2^3(\mathbb{R})$

Siguiendo este método podemos obtener el operador de Gram sobre el espacio de Sobolev W_2^3 asociado a la forma bilineal generada por $A_\alpha f = -\frac{d^2}{dt^2} f + \alpha\delta'' f$, que resulta ser un operador integral perturbado con un operador autoadjunto de rango tres. En efecto, Consideremos formalmente la expresión $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta''$ y la forma sesquilineal que define

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha f, g\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left(-f''(t) + \alpha\delta''(t) f(t)\right) g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)dt + \alpha \int_{\mathbb{R}} \delta''(t) f(t) g(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} -f''(t)g(t)\, dt + \alpha\left(f''(0)g(0) + 2f'(0)g'(0) + f(0)g''(0)\right) = \langle Gf, g\rangle_{W_2^3} \end{aligned}$$

donde G es el operador de Gram asociado a A_α en W_2^3. Hallemos las funciones φ, ψ, $\chi \in W_2^3$ tales que podamos representar los funcionales δ, δ' y δ'' en términos del producto en W_2^3, es decir,

$$\begin{aligned} g(0) &= \langle \varphi, g\rangle_{W_2^3} &(8)\\ -g'(0) &= \langle \psi, g\rangle_{W_2^3} &(9)\\ g''(0) &= \langle \chi, g\rangle_{W_2^3} &(10) \end{aligned}$$

donde $g \in W_2^3$. Integrando por partes tres veces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, g\rangle_{W_2^3} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)g(t)dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi'''(t)g'''(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)g(t)dt + (\varphi'''(0^-) - \varphi''(0^+))g''(0) \\
&\qquad -(\varphi^{(IV)}(0^-) - \varphi^{(IV)}(0^+))g'(0) \\
&\qquad +(\varphi^{(V)}(0^-) - \varphi^{(V)}(0^+))g(0) - \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(VI)}(t)g(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\varphi(t) - \varphi^{(VI)}(t))g(t)dt + (\varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+))g''(0) \\
&\qquad -(\varphi^{(IV)}(0^-) - \varphi^{(IV)}(0^+))g'(0) \\
&\qquad +(\varphi^{(V)}(0^-) - \varphi^{(V)}(0^+))g(0)
\end{aligned}$$

Luego tenemos (8), (9) y (10) si se satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi^{(VI)} &= 0 \\
\varphi'''(0^-) - \varphi'''(0^+) &= 0 \\
\varphi^{(IV)}(0^-) - \varphi^{(IV)}(0^+) &= 0 \\
\varphi^{(V)}(0^-) - \varphi^{(V)}(0^+) &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi - \psi^{(VI)} &= 0 \\
\psi'''(0^-) - \psi'''(0^+) &= 0 \\
\psi^{(IV)}(0^-) - \psi^{(IV)}(0^+) &= 1 \\
\psi^{(V)}(0^-) - \psi^{(V)}(0^+) &= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\chi - \chi^{(VI)} &= 0 \\
\chi'''(0^-) - \chi'''(0^+) &= 1 \\
\chi^{(IV)}(0^-) - \chi^{(IV)}(0^+) &= 0 \\
\chi^{(V)}(0^-) - \chi^{(V)}(0^+) &= 0
\end{aligned}$$

respectivamente. Una base para el espacio de soluciones de la ecuación diferencial obtenida viene dada por

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= e^{t}\\
\phi_2(t) &= \cos(ct)e^{t/2}\\
\phi_3(t) &= \sin(ct)e^{t/2}\\
\phi_4(t) &= e^{-t}\\
\phi_5(t) &= \cos(ct)e^{-t/2}\\
\phi_6(t) &= \sin(ct)e^{-t/2}
\end{aligned}$$

donde $c = \sqrt{3}/2$. Consideremos

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha\phi_1(t) + \beta\phi_2(t) + \gamma\phi_3(t) & \text{si } t < 0 \\ \xi\phi_4(t) + \eta\phi_5(t) + \mu\phi_6(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Podemos deducir de las condiciones de salto y continuidad de la tercera, cuarta y quinta derivada las siguientes ecuaciones para α, β, γ, ξ, η y μ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 1 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1 & -1/2 & 1/2\sqrt{3} & -1 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -1/2\sqrt{3} & -1 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} & 1 & 1/2 & 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

así obtenemos φ,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1/6\phi_1(t) + 1/6\phi_2(t) - \sqrt{3}/6\phi_3(t) & \text{si } t < 0 \\ 1/6\phi_4(t) + 1/6\phi_5(t) + \sqrt{3}/6\phi_6(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

similarmente obtenemos ψ y χ

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/6\phi_1(t) - 1/6\phi_2(t) - \sqrt{3}/6\phi_3(t) & \text{si } t < 0 \\ -1/6\phi_4(t) + 1/6\phi_5(t) - \sqrt{3}/6\phi_6(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\chi(t) = \begin{cases} 1/6\phi_1(t) - 1/3\phi_2(t) & \text{si } t < 0 \\ 1/6\phi_4(t) - 1/3\phi_5(t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Con estas funciones podemos reescribir

$$\begin{aligned}
\langle \delta'' f, g \rangle_{L^2} &= f''(0)g(0) + 2f'(0)g'(0) + f(0)g''(0) \\
&= \Big\langle \langle \chi, f \rangle_{W_2^3} \varphi + 2 \langle \psi, f \rangle_{W_2^3} \psi + \langle \varphi, f \rangle_{W_2^3} \chi \, , \, g \Big\rangle_{W_2^3} \\
&= \langle Tf, g \rangle_{W_2^3}
\end{aligned}$$

donde T es el operador de rango tres sobre el espacio W_2^3 definido por

$$T := \langle \chi, \cdot \rangle_{W_2^3} \varphi + 2 \langle \psi, \cdot \rangle_{W_2^3} \psi + \langle \varphi, \cdot \rangle_{W_2^3} \chi$$

finalmente tenemos

$$G = A + \alpha T$$

donde A es un operador integral (como antes, de convolución con la función φ), y T es un operador de rango tres.

5. Perturbaciones de Rango Tres. Fórmula del Resolvente

El operador obtenido en la sección anterior es una perturbación regular de rango tres. Este modelo es soluble y la fórmula para el resolvente de este operador puede ser calculada fácilmente

Teorema 5.1 (Fórmula de Krein. Perturbaciones regulares de rango tres). *Sea A un operador autoadjunto actuando sobre un espacio de Hilbert H y sean φ, ψ y χ vectores cualesquiera del espacio de Hilbert, $\varphi, \psi, \chi \in H$. Entonces el resolvente del operador original A y de su perturbación de rango tres $A_\alpha = A + \alpha \left(\langle \chi, \cdot \rangle \varphi + 2 \langle \psi, \cdot \rangle \psi + \langle \varphi, \cdot \rangle \chi \right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, estan relacionados por la siguiente fórmula*

$$\begin{aligned}
(A_\alpha - \lambda)^{-1} h - (A - \lambda)^{-1} h = {} & -\alpha H(\chi, h)(A - \lambda)^{-1} \varphi \\
& - 2\alpha G(\psi, h)(A - \lambda)^{-1} \psi - \alpha F(\varphi, h)(A - \lambda)^{-1} \chi
\end{aligned}$$

donde $F(\varphi, h)$, $G(\psi, h)$ y $H(\chi, h)$ son las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha\, B(\varphi, \chi) & 2\,\alpha\, B(\varphi, \psi) & \alpha\, B(\varphi, \varphi) \\ \alpha\, B(\psi, \chi) & 1 + 2\,\alpha\, B(\psi, \psi) & \alpha\, B(\psi, \varphi) \\ \alpha\, B(\chi, \chi) & 2\,\alpha\, B(\chi, \psi) & 1 + \alpha\, B(\chi, \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\varphi, h) \\ G(\psi, h) \\ H(\chi, h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\varphi, h) \\ B(\psi, h) \\ B(\chi, h) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$B(f, g) := \left\langle f, (A - \lambda)^{-1} g \right\rangle$, y λ es cualquiera, $\Im \lambda \neq 0$.

Demostración. La prueba es exactamente igual a la anterior para perturbaciones de rango dos. □

Usando esta fórmula buscamos los polos negativos del resolvente de G, es decir, $\lambda < 0$ tal que el determinante de la matriz 3×3 que aparece en (11) sea igual a cero.

6. Autovalores del Operador de Gram Asociado a $A_\alpha = -\frac{d^2}{dt^2} + \alpha\delta''$ en $W_2^3(\mathbb{R})$

Para poder calcular explícitamente el resolvente de $G = A + \alpha(\langle\chi,\cdot\rangle\,\varphi + 2\,\langle\psi,\cdot\rangle\,\psi + \langle\varphi,\cdot\rangle\,\chi)$ de nuevo es necesario obtener los valores de $B(f,g)$ que aparecen en la matriz de coeficientes del sistema (11), para $f, g = \varphi, \psi, \chi$. Siguiendo el mismo esquema que usamos en el caso anterior tenemos, para $\lambda < 0$,

$$
\begin{aligned}
B(\varphi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat\varphi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-\lambda)^{5/6}\,\sqrt[6]{-\lambda}}\\
B(\psi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat\varphi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-iw}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = 0\\
B(\chi,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^2\hat\varphi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}}\\
B(\varphi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat\psi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-iw}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = 0\\
B(\psi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat\psi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}}\\
B(\chi,\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^2\hat\psi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw^3}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = 0\\
B(\varphi,\chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat\chi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = -\frac{1}{6}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}}\\
B(\psi,\chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw\hat\chi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iw^3}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = 0\\
B(\chi,\chi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^2\hat\chi(w)}{\hat\varphi(w)-\lambda}\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w^4}{\lambda w^6 - 1 + \lambda}\,dw = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[6]{1-\lambda}\,(-\lambda)^{5/6}}
\end{aligned}
$$

si sustituimos estas cantidades en la matriz de coeficientes que aparece en el teorema (5.1) obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1-1/6\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}} & 0 & 1/3\,\frac{\alpha}{(1-\lambda)^{5/6}\sqrt[6]{-\lambda}} \\ 0 & 1-1/3\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}} & 0 \\ 1/3\,\frac{\alpha}{\sqrt[6]{1-\lambda}(-\lambda)^{5/6}} & 0 & 1-1/6\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\left(1-1/3\,\frac{\alpha}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}}\right)\left(-1/12\,\frac{-12\,\lambda^2+12\,\lambda+\alpha^2+4\,\sqrt{1-\lambda}\sqrt{-\lambda}\alpha}{\lambda\,(-1+\lambda)}\right)$$

Si hallamos $\lambda < 0$ tal que este determinante sea igual a cero obtenemos tres expresiones

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1/2-1/6\,\sqrt{9+4\,\alpha^2} \\ \lambda_2 &= 1/2-1/6\,\sqrt{9+\alpha^2} \\ \lambda_3 &= 1/2-1/2\,\sqrt{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

Concluimos entonces que asociados a la forma bilineal generada por $A_\alpha f = -\frac{d^2f}{dt^2} + \alpha\delta'' f$ podemos conseguir tres cuadrados negativos, mientras que no existen cuadrados negativos asociados a la forma bilineal generada por $A_\alpha f = -\frac{d^2f}{dt^2} + \alpha\delta' f$.

Referencias

[1] Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H., Solvable Models in Quantum Mechanics, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag inc., New York, 1988.

[2] Albeverio S., Kurasov P., Singular Perturbations of Differential Operators, Cambridge University Press, 2000, London Mathematical Society Lecture Note Series **271**.

[3] Kurasov P., *Singular and Super Singular Perturbations: Hilbert Space Methods*, Dept. of Mathematics, Lund Inst. of Technology, Preprint NR.16, 2003.

[4] Kato T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, 1980.

Vladimir Strauss y Javier Villamizar
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas, Venezuela
e-mail: str@usb.ve, jvilla@ma.usb.ve