Precubiertas de anillos

Rafael Parra, Carlos Parra, J. L. Herrera, M. Escalona Morán

Resumen. En este trabajo se introduce el concepto de precubiertas sobre la clase de los anillos asociativos con unidad. Se estudia en particular el caso de los cuerpos, como clase importante desde el punto de vista álgebra - geométrico.

Abstract. This paper introduces the concept of pre-cover on the class of associative rings with unity. We study in particular the case of fields, as an important class from the point of view algebra–geometry.

1 Introducción

Es bien conocido que todo módulo sobre un anillo R tiene una envoltura inyectiva [1]. Desde el punto de vista categórico, los módulos proyectivos e inyectivos son objetos duales, pero la gran diferencia que existe entre las categorías $R-$mod de módulos sobre R y su categoría opuesta $R-\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}$, no permite dualizar el resultado de Baer. El concepto clásico de envoltura inyectiva y cubierta proyectiva de un módulo se extendió con la introducción de las envolturas y cubiertas con respecto a una clase arbitraria de objetos en una categoría dada, a partir de los trabajos de Enochs [3]. Más precisamente, dado un anillo R y $\mathcal{F}$ una familia de R-módulos, se dice que el R-módulo M tiene una $\mathcal{F}$-envoltura si existe un homomorfismo $\phi : M \to F$ con $F \in \mathcal{F}$ para el cual se cumplen dos propiedades,

1. Cualquier diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr] & F \arrow[d, dotted] \\ & F' \end{tikzcd}$$

   donde $F' \in \mathcal{F}$ puede ser completado.

2. El diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi"'] & F \arrow[d, dotted] \\ & F \end{tikzcd}$$

puede ser completado sólo por automorfismos de F.

Si sólo se satisface la primera propiedad, entonces se dice que $\phi : M \to F$ es una $\mathcal{F}$-(pre)envoltura. Dualmente se pueden definir una $\mathcal{F}$-(pre)cubierta y una $\mathcal{F}$-cubierta de un R-módulo M. Más recientemente, Parra y Saorin [5] estudiaron las $\mathcal{F}-$preenvolturas en la categoria $\mathcal{C}$ de anillos, cuando $\mathcal{F}$ es una clase importante de anillos conmutativos. Dicho trabajo junto con los artículos [2] y [4] motivaron de manera significativa el estudio de los objetos duales, como lo son las precubiertas en una subclase importante de los anillos conmutativos, los cuerpos.

2 $\mathcal{F}-$Precubiertas

Sea R un anillo conmutativo con unidad y $\mathcal{C}$ una clase de anillos. Motivado en [5] introduciremos la definición de $\mathcal{C}-$precubiertas para un anillo R y estudiaremos el caso particular cuando dicha clase es la clase de los cuerpos la cual denotaremos por $\mathcal{F}$.

Definición 1. *Sea R un anillo y $\mathcal{C}$ una clase de anillos, un homomorifsmo de anillos $\varphi : C \longrightarrow R$, donde $C \in \mathcal{C}$, es una $\mathcal{C}-$precubierta de R si para cualquier homomorfismo $\psi : C' \longrightarrow R$, donde $C' \in \mathcal{C}$, existe un homomorfismo $\theta : C' \longrightarrow C$ tal que $\psi = \varphi \circ \theta$*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\varphi"] \\ C' \arrow[ur, dashed, "\theta"] \arrow[r, "\psi"] & R \end{tikzcd}$$

En este trabajo estudiaremos algunas propiedades de anillos conmutativos que tengan $\mathcal{F}-$precubierta.

Ejemplo 1. *Sea $K \in \mathcal{F}$ y consideremos la inclución $K \overset{i}{\hookrightarrow} K[x]$.*

Veamos que $K \overset{i}{\hookrightarrow} K[x]$ es una $\mathcal{F}-$precubierta de $K[x]$; en efecto, sea $f : K' \longrightarrow K[x]$ un homomorfismo de anillos, donde $K' \in \mathcal{F}$. Notemos que

$Ker\, f = \{0\}$ puesto que los únicos ideales de K' son $\{0\}$ ó K'. Así, $f(K') \cong K'$ es un subcuerpo de $K[x]$; de esta manera necesariamente $f(K')$ es un subcuerpo de K. Obteniendo el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, "i"] \\
K' \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f"] & K[x]
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2. *Denotaremos por $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $K = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,:\, f$ es una función constante$\}$. Afirmamos que la inclusión $i : K \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es una $\mathcal{F}-$precubierta de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En efecto, notemos primero que $K \in \mathcal{F}$. Sea K' un cuerpo cualquiera y $\varphi : K' \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ un homomorfismo de anillos.*

Toda función constatemente igual a un número racional pertenece a $\varphi(K')$. Para cada $0 \neq x \in K'$ afirmamos que $\varphi(x)$ es una función constante. En caso contrario, siendo $\varphi(x)$ una función continua obtendriamos que $\varphi(x)(\mathbb{R})$ es un intervalo no degenerado de $\mathbb{R}$ y por ende existiría $q \in \mathbb{Q}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x)(t_0) = q$; sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = q, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ de este modo $\varphi(x) - f \in \varphi(K')$. Por otra parte todas las unidades de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ no se anulan en ningún punto, así $\varphi(x) - f$ no es una unidad de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y siendo $\varphi(K')$ un subcuerpo de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ se obtiene que $\varphi(x) - f = 0$. Por lo tanto $\varphi(x)$ es una función constante lo cual sería una contradicción.

De lo hecho anteriormente se deduce que $\varphi(K') \subseteq K$ y el siguiente diagrama conmutativo muestra que i es una $\mathcal{F}-$precubierta de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, "i"] \\
K' \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Los ejemplos anteriores muestran que existen $\mathcal{F}-$precubiertas no triviales, y además estos anillos tienen en común un subanillo isomorfo a un anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo. El siguiente teorema muestra que esta observación no es un caso aislado.

Teorema 1. *Si $\varphi : K \longrightarrow R$ es una $\mathcal{F}-$precubierta de R entonces R es un cuerpo o R contiene una copia isomorfa de $K[x]$*

Prueba. Notemos $\varphi(K) \cong K$; llamemos $K' := \varphi(K)$, así $K' \subseteq R$. Supongamos que R no es un cuerpo, luego existe $\alpha \in R$ tal que $\alpha \notin K'$.

Afirmamos que no existe $p(x) \in K'[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$; En caso contrario existiría $q(x) \in K'[x]$ irreducible sobre K' tal que $q(\alpha) = 0$. Si consideramos $I = (q(x))$ obtenemos que I es un ideal primo de $K'[x]$ y al ser $K'[x]$ un dominio de ideales principales se tiene que I es un ideal maximal de $K'[x]$; es claro que $K'[x]/I \in \mathcal{F}$, definamos

$$\psi : K'[x]/I \longrightarrow R$$
$$\psi(I + r(x)) = r(\alpha)$$

Notemos que ψ está bien definido puesto que si $I + r_1(x) = I + r_2(x)$ entonces $r_1(x) - r_2(x) \in I$ y por tanto $r_1(\alpha) - r_2(\alpha) = 0$;

$$r_1(\alpha) = r_2(\alpha)$$

luego por hipótesis existe $\theta : K'[x]/I \longrightarrow K$ tal que $\psi = \varphi \circ \theta$.

Así

$$\psi(I + x) = \varphi \circ \theta(I + x)$$
$$\alpha = \varphi(\theta(I + x)) \in \varphi(K) = K'$$

lo cual es contradictorio.

Definamos ahora

$$g : K'[x] \longrightarrow R$$

$$g(p(x)) = p(\alpha)$$

Por lo hecho anteriormente g es un monomorfismo; así
$g(K'[x]) \cong K'[x] \cong K[x]$ □

Corolario 1. *Sea R un anillo conmutativo y $n \geq 2$ entonces $M_n(R)$ no tiene $\mathcal{F}-$precubierta.*

Prueba. Razonemos por el absurdo, supongamos que $M_n(R)$ tiene una $\mathcal{F}-$precubierta así existe $K \in F$ y $\varphi : K \longrightarrow M_n(R)$ una $\mathcal{F}-$precubierta de M.

De la prueba del teorema anterior se deduce que si $\alpha \in M_n(R)$ y $\alpha \notin \varphi(K)$ entonces $p(\alpha) \neq 0, \forall\, p(x) \in K[x]$ $(\star)$

Tomemos A un elemento nilpotente no nulo del anillo $M_n(R)$, luego existe $m \geq 2$ tal que $A^m = 0$ por ende A no es invertible y $A \neq 0$ de aquí es claro que $A \notin \varphi(K)$. Si tomamos $p(x) = x^m$ obtenemos $p(A) = 0$ lo cual contradice la observación $(\star)$. $\square$

Del corolario anterior se deduce que no todo anillo que tenga subcuerpos tiene $\mathcal{F}-$precubiertas pues basta considerar el anillo $M_n(K)$ con $K \in \mathcal{F}$ en el cual los múltiplos de la identidad forman un subcuerpo de $M_n(K)$.

El teorema anterior no caracteriza los anillos que tiene $\mathcal{F}-$precubiertas en términos de la existencia de copias de anillos de polinomio con coefientes en un cuerpo el siguiente ejemplo ilustra este hecho

Ejemplo 3. *El anillo de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ denotado por $f(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no tiene $\mathcal{F}-$precubierta aunque contiene una copia $\mathbb{R}[x]$.*

En efecto, si existe $f : K \longrightarrow f(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\mathcal{F}-$precubierta.

Definamos $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \neq 0 \\ \\ -2 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

h_1, h_2 y h_3 las funciones constantemente iguales a 1, 3, 2 *respectivamente. Sea $p(x) = h_1x^2 + h_2x + h_3 \in f(K)[x]$ notemos que $p(g) \equiv 0$. Del teorema anterior obtenemos que $g \in Img\, f$. Así, $g + h_1 \in Img\, f \simeq K$. Por otra parte $g(1) + h_1(1) = 0$, lo que demuestra que $g + h_1$ no es una unidad de $Im\, f$ por tanto $g + h_1 \equiv 0$, lo cual es una contradicción.* $\square$

Lema 1. *Sea R un anillo conmutativo. Si $f : K \longrightarrow R$ es una $\mathcal{F}-$precubierta de R entonces $f(K) \overset{i}{\hookrightarrow} R$ es también una $\mathcal{F}-$precubierta de R.*

*Prueba.*Sea $\alpha : K' \longrightarrow R$ con $K' \in \mathcal{F}$ un homomorfismo de anillos. Luego, por hipótesis existe $g : K' \longrightarrow K$ tal que $\alpha = fg$. Obteniendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[d, "f"] \\
& f(K) \arrow[d, "i"] \\
K' \arrow[uur, "g"] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\alpha"] & R
\end{tikzcd}$$

lo que demuestra que $i : f(K) \hookrightarrow R$ es una $\mathcal{F}-$precubierta de R.

Este lema permite estudiar $\mathcal{F}-$precubiertas como inclusiones. El siguiente lema nos dice que si un anillo R tiene $\mathcal{F}-$precubiertas entonces R tiene un subcuerpo maximal.

Lema 2. *Si* $K \overset{i}{\hookrightarrow} R$ *es una* $\mathcal{F}-$*precubierta de* R *y* $K' \in \mathcal{F}$ *tal que* $K \subseteq K' \subseteq R$ *entonces* $K = K'$.

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "f"] \\ K' \arrow[r, "f"] & R \end{tikzcd}$$

luego por hipótesis existe $\theta : K' \longrightarrow K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "i"] \\ K' \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "i"] & R \end{tikzcd}$$

así, si $x \in K'$ entonces $x = i\theta(x) = \theta(x) \in K$ lo que demuestra que $K = K'$. $\square$

Lo que caracteriza los anillos que tiene $\mathcal{F}-$precubierta son precisamente los anillos que tiene un único subcuerpo maximal.

Agradecimiento: Al Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnología (C.D.H.C.T) de la U.L.A por su financimiento a través del proyecto I-1214-09-05-C.

References

[1] F. Anderson y K. Fuller, Rings and Categories of Modules. New York: Springer-Verlag. 1974.

[2] L. Bican y B. Torrecillas, Almost precovers. Comm Algebra, 2002, 30: 477 - 487.

[3] E. Enochs, Injective and flat covers, envelopes and resolvents, Israel J. Math., 1981, 39, 189 - 209.

[4] M. Lixin y D. Nanqing, On almost precovers and almost preenvelopes, Acta Mathematica Scientia 2006, 26B (3): 395-400.

[5] R. Parra and M. Saorín, Envelopes of the commutative rings, arXiv: 0906.4357 v1 [math. AC].

Rafael Parra
Departamento de Cálculo, Escuela Básica
Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. 5101, Mérida Venezuela

Carlos Parra
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes. 5101, Mérida Venezuela

J. L. Herrera
Departamento de Cálculo, Escuela Básica
Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. 5101, Mérida Venezuela

M. Escalona Morán
Departamento de Cálculo, Escuela Básica
Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. 5101, Mérida Venezuela

e-mail: rafaelparra@ula.ve, carlosparra@ula.ve, jherrera@ula.ve, angele@ula.ve