



Euclides de Alejandría (c. 365 BC - c. 300 BC)

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XVII, Número 2, Año 2010

I.S.S.N. 1315-4125

Editor

Oswaldo Araujo

Editores Asociados

Carlos Di Prisco y Henryk Gzyl

Editor Técnico: Boris Iskra

Comité Editorial

Pedro Berrizbeitia, Alejandra Cabaña, Giovanni Calderón, Sabrina Garbin, Gerardo Mendoza, Neptalí Romero, Rafael Sánchez Lamonedá, Judith Vanegas, Jorge Vargas

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Carlos A. Di Prisco

Capítulos Regionales

CAPITAL

Carlos A. Di Prisco

IVIC

cdiprisc@ivic.ve

LOS ANDES

Oswaldo Araujo

ULA

araujo@ciens.ula.ve

ZULIA-FALCON

En reorganización

CENTRO-OCCIDENTAL

Sergio Muñoz

UCLA

smunoz@uicm.ucla.edu.ve

ORIENTE

Said Kas-Danouche

UDO

skasdano@sucre.udo.edu.ve

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet:
<http://amv.ivic.ve/> .

Asociación Matemática Venezolana

Boletín
de la
Asociación
Matemática
Venezolana

Vol. XVII • No. 2 • Año 2010

Se inicia la sección de Artículos, de este número, con el trabajo, “The transversability condition for infinite dimensional control systems”, de Diomedes de Bárcenas, Hugo Leiva y Ambrosio Tineo. Este artículo es otro testimonio más del espíritu de colaboración que, siempre, manifestó Diomedes (1949-2009) con nuestra revista (cf. BAMV, volumen XVI, No.2, 2009)

Aparecen luego los artículos de Romi Shamoyan and Olivera Mihic; Rafael Parra, Carlos Parra, J.L. Herrera y M.Escalona Morá, y de Santiago Simanca.

El trabajo de Simanca, “Geometría y Topología”, son las notas del mini curso que dictó en la Universidad Simón Bolívar, del primero al cinco de junio del 2009, en el marco del evento Encuentros de Matemáticas en honor al Profesor Lázaro Recht (cf. BAMV, volumen XVI, No.1, 2009).

Sirva la ocasión para recordarles a los autores, de los otros cursos ofrecidos en el mencionado evento, la conveniencia de la publicación de sus notas, en nuestro Boletín, como testimonio del trabajo realizado en el seno de nuestra comunidad.

En la sección de Historia de la Matemática, Douglas Jiménez, nos habla sobre “El problema del área en los Elementos de Euclides”.

A continuación tenemos en, Información Matemática, “La olimpiada de Chacao”, por Saulo Rada, nuestra acostumbrada “La esquina olímpica” por Rafael Sánchez y todo lo relacionado con la organización de la XXIV Escuela Venezolana de Matemáticas.

Saulo Rada, después de hacer una breve reseña sobre el inicio y desarrollo de las olimpiadas matemáticas, en Venezuela, describe “La olimpiada de Chacao”. Esta actividad es un proyecto, iniciado en 2001, por la Alcaldía de Chacao; su objetivo principal es la mejora de la educación matemática en aquellos planteles que dependan del municipio Chacao.

Finalmente, hacemos público nuestro agradecimiento a los colegas que, mediante su colaboración, hicieron posible la edición del Volumen XVII del BAMV.

Oswaldo Araujo G.

ARTÍCULOS

The transversality condition for infinite dimensional control systems.

Diomedes Barcenast, Hugo Leiva and Ambrosio Tineo Moya

Abstract. In this paper we provide a definition of transversality for the following infinite dimensional control system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & t > 0 \\ x(0) = x_0 \in X; \quad u(t) \in \mathcal{U} \subset U, \quad x(t^*) \in G(t^*), \end{cases}$$

for $t^* > 0$ minimum; where the state $x(t) \in X$, X and U are Banach spaces, A is the infinitesimal generator of a strongly continuous group $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ in X , $B \in L(U, X)$, the target set $G \subset X$ and the control values set \mathcal{U} are convex and weakly compact. For this system we give a necessary condition for a control satisfying the transversality condition to be optimal. Finally, as an application we consider the optimal control problem governed by the wave equation

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = u(t, x), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R} \\ y = 0, & \text{on } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x), & x \in \Omega, \\ \|u(t, \cdot)\|_{L^2} \leq 1, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^n , the distributed control $u \in L^2(0, t_1; L^2(\Omega))$; for this problem we compute the extremal control.

Resumen. En este trabajo se ofrece una definición de transversalidad para el siguiente sistema de control infinito dimensional

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & t > 0 \\ x(0) = x_0 \in X; \quad u(t) \in \mathcal{U} \subset U, \quad x(t^*) \in G(t^*), \end{cases}$$

para $t^* > 0$ mínimo; en el estado $x(t) \in X$, X y U son espacios de Banach, A es el generador infinitesimal de un grupo fuertemente

continuo $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ en X , $B \in L(U, X)$, el conjunto objetivo $G \subset X$ y el conjunto control \mathcal{U} son convexos y débilmente compactos. Para este sistema damos una condición necesaria para que un control que satisfaga la condición de transversalidad sea óptimo. Por último, como aplicación se considera el problema de control óptimo gobernado por la ecuación de onda

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = u(t, x), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R} \\ y = 0, & \text{on } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ y(0, x) = y_0(x), & y_t(0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \|u(t, \cdot)\|_{L^2} \leq 1, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado en \mathbb{R}^n , el control distribuido $u \in L^2(0, t_1, L^2(\omega))$; para este problema calculamos el control extremo.

1 Introduction and preliminaries

For finite dimensional linear systems a sufficient condition for the optimal control is given in [4] and [5], this condition is referred to as transversality condition and it is contained in Theorem 19 from [5], page 132. That is to say, if X is a finite dimensional Banach space, then under certain hypothesis the extremal control satisfying the transversality condition is unique optimal. Also, it is proved in Theorem 18 of [5] that, if $u^*(t) \in \Omega$ on $0 \leq t \leq t^*$ is a minimal time-optimal controller for the finite dimensional system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, & u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad x(t^*) \in G(t^*) \subset \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

then $u^*(t)$ is extremal; that is to say; the following maximum principle holds

$$m(t) = \max_{v \in \Omega} \langle \eta(t), B(t)v \rangle = \langle \eta(t), B(t)u^*(t) \rangle$$

and

$$M(t) = \max_{v \in \Omega} \langle \eta(t), A(t)x^*(t) + B(t)v \rangle = \langle \eta(t), A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \rangle$$

almost every where $0 \leq t \leq t^*$.

Here $A(t)$ and $B(t)$ are matrices of order $n \times n$ and $n \times m$ respectively, Ω is compact, the target set $G(t)$ is also compact and varies continuously on $[0, \infty]$; and $\eta(t)$ is a nontrivial solution of the adjoint system

$$\dot{\eta} = -\eta A(t),$$

and $\eta(t^*)$ is an outwards unit normal vector to a supporting hyperplane to the set of attainability $K(t^*)$ at $x^*(t^*)$ in $\partial K(t^*)$. Furthermore, if $G(t) = G$ is constat, then $x^*(t^*)$ lies in the new frontier of $K(t^*)$. In this case, provided $A(t)$ and $B(t)$ are continuous, the normal $\eta(t^*)$ can be selected so that

$$M(t^*) \geq 0. \tag{1.2}$$

If in addition G is convex, then $\eta(t^*)$ can be selected satisfying the **transversality condition**; namely, $\eta(t^*)$ is normal to a common supporting hyperplane separating $K(t^*)$ and G .

In this paper we generalize these results to the following infinite dimensional optimal control system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & t > 0 \\ x(0) = x_0 \in X; \quad u(t) \in \mathcal{U} \subset U, \quad x(t^*) \in G, \end{cases} \tag{1.3}$$

where the state $x(t) \in X$; X and U are separable Banach spaces with X been reflexive, $B \in L(U, X)$, the controls $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, U)$, the target set $G \subset X$ and the control values set \mathcal{U} are convex and weakly compact, and A is the infinitesimal generator of a strongly continuous group $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ of bounded linear operators in X . A mild solution of (1.3) is a function $x_u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow X$ defined by

$$x_u(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t - \alpha)Bu(\alpha)d\alpha, \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

where $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, U)$.

Definition 1.1. For $t_1 > 0$ the set of **admissible controls** on $[0, t_1]$ is defined by

$$C(t_1) = \{u \in L^1(0, t_1; U) : u(t) \in \mathcal{U} \text{ a.e in } [0, t_1]\}$$

and the corresponding set of **attainable points** by

$$K(t_1) = \{x_u(t_1) : x_u(\cdot) \text{ is mild solution of (1.3), } u \in C(t_1)\}.$$

Since \mathcal{U} is convex and weakly compact and U is separable, $BC(t_1)$ can be considered as a measurable multifunction taking weakly compact values and so $K(t_1)$ is weakly compact in X ([1], [7]).

Through this work we suppose that $\text{int}K(t_1) \neq \emptyset$, where $\text{int}K(t_1)$ and $\partial K(t_1)$ denote the interior and the boundary of $K(t_1)$ respectively.

The following definition is a generalization of a similar one given in [5] page 73.

Definition 1.2. A control $u \in C(t_1)$ is called an **extremal control** if the corresponding solution x_u of (1.3) satisfies $x_u(t_1) \in \partial K(t_1)$.

Definition 1.3. If $t^* \geq 0$ and $u^* \in C(t^*)$ with corresponding solution $x^*(\cdot)$ of (1.4) satisfying $x^*(t^*) \in G$, then u^* is called an **optimal control** if

$$t^* = \inf\{t \in [0, \infty) : K(t) \cap G \neq \emptyset\}.$$

As an application of our result we shall consider the following optimal control problem governed by the wave equation

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = u(t, x), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R} \\ y = 0, & \text{on } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x), & x \in \Omega, \\ \|u(t, \cdot)\|_{L^2} \leq 1, & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.5)$$

and prove that the optimal control is given by:

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{\eta_2(t, x)}{\|\eta_2(t, \cdot)\|_{L^2}} & \text{if } \|\eta_2(t, \cdot)\|_{L^2} \neq 0 \\ 1 & \text{if } \|\eta_2(t, \cdot)\|_{L^2} = 0 \end{cases}$$

where

$$\eta_2(s, x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-\lambda_j^{\frac{1}{2}} \sin(\sqrt{\lambda_j} s) \langle \phi_j, x_1^* \rangle + \phi_j(x) + \cos(\sqrt{\lambda_j} s) \langle \phi_j, x_2^* \rangle + \phi_j(x)),$$

and $x_1^* \in H_0^1(\Omega)$, $x_2^* \in L^2(\Omega)$, where λ_j and ϕ_j are the eigenvalues and the eigenfunctions of $-\Delta$ respectively and $\langle \phi_j, x_i^* \rangle = \int_{\Omega} \phi_j(x) x_i^*(x) dx$.

2 Main results

Following the lead of Lee-Markus [5] we state the forthcoming results.

Theorem 2.1. *A control $u \in C(t_1)$ is extremal if, and only if, there is $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ such that*

$$\max_{v \in \mathcal{U}} \langle \eta(s), Bv \rangle = \langle \eta(s), Bu(s) \rangle \quad \text{a.e. on } [0, t_1] \quad (2.1)$$

where

$$\eta(s) = S^*(-s)x^*, \quad 0 \leq s \leq t_1.$$

Proof. By Theorem 4.3 of [1] a control $u \in C(t_1)$ is extremal if and only if, there exists $y^* \in X^* \setminus \{0\}$ such that for almost every $s \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \max_{v \in \mathcal{U}} \langle y^*, S(t_1 - s)Bv \rangle &= \langle y^*, S(t_1 - s)Bu(s) \rangle = \langle S^*(t_1 - s)y^*, Bu(s) \rangle \\ &= \langle S^*(-s)S^*(t_1)y^*, Bu(s) \rangle \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

Since S^* is a group, $S^*(t_1)$ is invertible; then $x^* = S^*(t_1)y^* \neq 0$, and by putting $\eta(s) = S^*(-s)x^*$ we get the result. \square

Definition 2.2. An extremal control $u \in C(t_1)$ satisfies the **transversality condition** if the hyperplane

$$\Pi(t_1) = \{x \in X : \langle \eta(t_1), x - x_u(t_1) \rangle = 0\}$$

separates $K(t_1)$ and G at the point $x_u(t_1)$.

Theorem 2.3. Suppose $x_0 \in D(A)$ and $u^* \in C(t^*)$ is an **optimal control** which satisfies

$$\begin{aligned} S(-s)Bu^* &\in D(A) \quad \text{a.e. on } [0, t^*], \quad t^* > 0 \\ AS(t - \cdot)Bu^*(\cdot) &\in L^1(0, t; X), \quad \forall t \in [0, t^*]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Then

$$M(t) = \max_{v \in \Omega} \langle \eta(t), A(t)x^*(t) + B(t)v \rangle = \langle \eta(t), A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \rangle$$

is defined a.e. on $[0, t^*]$, where $x^*(\cdot) = x_{u^*}(\cdot)$ and $\eta(t) = S(-t)x^*$ with $x^* \neq 0$ according to Theorem 2.1. Moreover, we can choose $\eta(t^*)$ such that

$$M(t^*) \geq 0$$

and satisfying the **transversality condition**.

Proof. If hypothesis (2.2) is satisfied, then Lemma 2.22 of [2] implies that x^* is differentiable almost every where on $[0, t^*]$ because X is reflexive and

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t) \quad \text{a.e. on } [0, t^*],$$

which implies $M(t)$ is well defined. Since $x^*(\cdot)$ may not be differentiable in every point of $[0, t^*]$, we will use a limit process to prove $M(t^*) \geq 0$.

It is clear that $x^*(t^*) \notin K(t_1)$ if $0 \leq t_1 < t^*$. Thus, by Theorem 6.3 of [4] there is $\eta(t_1) \in X^*$, with $\|\eta(t_1)\| = 1$ and

$$0 < \inf_{x \in K(t_1)} \|x^*(t^*) - x\| = \inf_{x \in K(t_1)} \langle \eta(t_1), x^*(t^*) - x \rangle. \quad (2.3)$$

Since $K(t_1)$ is weakly compact, there is $x(t_1) \in K(t_1)$ such that

$$0 < \inf_{x \in K(t_1)} \|x^*(t^*) - x\| = \langle \eta(t_1), x^*(t^*) - x(t_1) \rangle. \quad (2.4)$$

From (2.3) and (2.4) we get

$$\langle \eta(t_1), x - x^*(t_1) \rangle \leq 0 \quad \text{for every } x \in K(t_1).$$

Thus $\eta(t_1)$ separates $x^*(t^*)$ from $K(t_1)$ at $x(t_1) \in K(t_1)$.

This implies that

$$\langle \eta(t_1), x^*(t^*) - x(t_1) \rangle > 0 \quad \text{and} \quad \langle \eta(t_1), x - x(t_1) \rangle \leq 0, \quad x \in K(t_1) \quad (2.5)$$

Now, we will prove that there is $\hat{t}_1 \in (t, t^*)$ such that $\langle \eta(t_1), \dot{x}(\hat{t}_1) \rangle > 0$. Otherwise,

$$\langle \eta(t_1), \dot{x}^*(t) \rangle \leq 0 \quad t \in [t_1, t^*],$$

whenever $\dot{x}^*(t)$ exist on $[0, t^*]$.

Since $x^*(\cdot)$ is absolutely continuous,

$$\int_{t_1}^{t^*} \langle \eta(t_1), \dot{x}^*(t) \rangle dt \leq 0 \iff \langle \eta(t_1), x^*(t^*) - x^*(t_1) \rangle \leq 0$$

which implies

$$\begin{aligned} 0 < \langle \eta(t_1), x^*(t^*) - x(t_1) \rangle &= \langle \eta(t_1), x^*(t^*) - x^*(t_1) \rangle \\ &+ \langle \eta(t_1), x^*(t_1) - x(t_1) \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

which contradicts (2.5).

In this way we can choose a sequence

$$0 < t_1 < \hat{t}_1 < t_2 < \hat{t}_2 < \dots < t_n < \hat{t}_n < \dots < t^*$$

with $\|\eta(t_n)\| = 1$, for all n , and satisfying

$$\langle \eta(t_n), \dot{x}^*(\hat{t}_n) \rangle > 0 \iff \langle \eta(t_n), Ax^*(t_n) + Bu^*(\hat{t}_n) \rangle > 0. \quad (2.6)$$

Since \mathcal{U} weakly compact, and $K(t)$ is weakly compact and uniformly bounded for $0 < t \leq t^*$, we can suppose:

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} u^*(\hat{t}_n) = u \in \mathcal{U}, \quad w - \lim_{n \rightarrow \infty} \eta(t_n) = \eta(t^*) \quad (2.7)$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta(t_n), x(t_n) \rangle = \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Consider the hyperplane $\Pi(t^*)$ given by

$$\Pi(t^*) = \{x \in X : \langle \eta(t^*), x - x^*(t^*) \rangle = 0\}.$$

Claim. $\Pi(t^*)$ separates $x^*(t^*)$ and $K(t^*)$. In fact,

$$\langle \eta(t^*), x - x^*(t^*) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in K(t).$$

Otherwise, there is $x_0 \in K(t^*)$ such that

$$\langle \eta(t^*), x_0 - x^*(t^*) \rangle > 0. \quad (2.9)$$

Since by (2.5)

$$\langle \eta(t_n), x^*(t^*) - x(t_n) \rangle \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots;$$

then, by inequality

$$\langle \eta(t_n), x^*(t^*) - x(t_n) \rangle \leq \|x^*(t^*) - x^*(t_n)\|,$$

we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta(t_n), x(t_n) \rangle = \langle \eta(t^*), x^*(t^*) \rangle.$$

Since $\lim_{n \rightarrow \infty} h(K(t_n), K(t^*)) = 0$, where h denotes the Hausdorff metric (see [1]), there is a sequence $\{\bar{x}_n\} \subset K(t_n)$, $n = 1, 2, \dots$ with $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x}_n - x_0\| = 0$ and by (2.9) we get

$$\langle \eta(t_n), \bar{x}_n - x(t_n) \rangle \leq 0 \quad n = 1, 2, \dots. \quad (2.10)$$

But, however

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \eta(t_n), \bar{x}_n - x(t_n) \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle \eta(t_1), \bar{x}_n - x_0 \rangle \\ &\quad + \langle \eta(t_n), x_0 \rangle - \langle \eta(t_n), x(t_n) \rangle) \\ &= \langle \eta(t^*), x_0 - x^*(t^*) \rangle > 0, \end{aligned}$$

which is a contradiction with (2.10). So $\Pi(t^*)$ separates $x^*(t^*)$ and $K(t^*)$.

Since A is closed, our hypothesis together with Theorem II.2.6 of [3] imply

$$\begin{aligned} Ax^*(\hat{t}_n) &= AS(\hat{t}_n)x_0 + AS(\hat{t}_n) \int_0^{\hat{t}_n} S(-s)Bu^*(s)ds \\ &= S(\hat{t}_n)Ax_0 + S(\hat{t}_n) \int_0^{\hat{t}_n} S(-s)ABu^*(s)ds \end{aligned}$$

which implies that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Ax^*(\hat{t}_n) &= S(t^*)Ax_0 + S(t^*) \int_0^{t^*} S(-s)ABu^*(s)ds \\ &= Ax^*(t^*). \end{aligned}$$

Hence, by taking limit in (2.6) we obtain $M(t^*) \geq 0$. \square

The proof of Corollary 2.4 and Theorem 2.5 are similar to proof of Corollary and Theorem 18 from [5], pages 131 and 132, respectively.

Corollary 2.4. *If A is a bounded operator and $u \in C(t^*)$ is an extremal control, then*

$$\begin{aligned} M(t) &= \max_{v \in \mathcal{U}} \langle \eta(t), Ax(t) + Bv \rangle \\ &= \langle \eta(t), Ax(t) + Bu(t) \rangle \quad \text{a.e on } [0, t^*]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

is well defined and constant.

Proof. Since A is a bounded operator, $D(A) = X$ and $S(t) = \exp(tA)$, then the hypothesis of Theorem 5.3 of [1] are satisfied. Therefore $M(\cdot)$ is well defined and it is absolutely continuous, and so M is differentiable almost every where on $[0, t^*]$. We will estimate the derivative of $M(t)$ at $t = \tau_1$, if it exists. Suppose $\tau_2 > \tau_1$. Then

$$\begin{aligned} \frac{M(\tau_2) - M(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} &\geq \frac{\langle \eta(\tau_2), Ax(\tau_2) + Bu(\tau_1) \rangle - \langle \eta(\tau_1), A(\tau_1) + Bu(\tau_1) \rangle}{\tau_2 - \tau_1} \\ &= \langle \eta(\tau_2), A \frac{x(\tau_2) - x(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \rangle + \langle \frac{\eta(\tau_2) - \eta(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}, Ax(\tau_1) \rangle \\ &\quad + \langle \frac{\eta(\tau_2) - \eta(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}, Bu(\tau_1) \rangle. \end{aligned}$$

Without loss generality we can suppose that $\dot{x}(\tau_1)$ exists. If $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ satisfies the equation $\eta(t) = \exp(-A^*t)x^*$, then

$$\dot{\eta}(t) = -A^* \exp(-A^*t)x^* = -A^*\eta(t).$$

Thus, by taking limit as $\tau_2 \rightarrow \tau_1$, we have

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt}(\tau_1) &\geq \langle \eta(\tau_1), A\dot{x}(\tau_1) \rangle + \langle \dot{\eta}(\tau_1), Ax(\tau_1) \rangle + \langle \dot{\eta}(\tau_1), Bu(\tau_1) \rangle \\ &= \langle \eta(\tau_1), A(Ax(\tau_1) + Bu(\tau_1)) \rangle - \langle A^*\eta(\tau_1), Ax(\tau_1) \rangle \\ &\quad - \langle A^*\eta(\tau_1), Bu(\tau_1) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Similar computation shows that $\frac{dM}{dt}(\tau_1) \leq 0$. Consequently M is constant on $[0, t^*]$. \square

The following theorem prove that, under normality conditions, the Maximum Principle is sufficient for optimality, provided that the optimal control exists and is the unique extremal control which satisfies the transversality condition.

Theorem 2.5. *Let A be a bounded linear operator such that the following conditions are satisfied:*

- a) *The system is normal for $t > 0$.*
- b) *G is a convex and weakly compact.*
- c) *If $\bar{t} > 0$, $u \in C(\bar{t})$ and $x_u(\bar{t}) \in G$, then there exists a control \bar{u} such that $x_{\bar{u}}(t) \in G$ with $t \geq \bar{t}$ and \bar{u} is not extremal for any $t > \bar{t}$.*

If $u_1 \in C(t_1)$, $u_2 \in C(t_2)$ satisfies the transversality conditions, then $t_1 = t_2 = t^$ and $u_2(t) = u_1(t)$ a.e on $[0, t^*]$. In particular $u_1 = u^*$ in the unique extremal control.*

Proof. Consider first the case $t_1 = t_2$. Since the system is normal, $K(t_1)$ is strictly convex (see [1]). Then, by the transversality condition, there is a hyperplane Π which separates $K(t_1)$ and G .

So, both $x_1(t_1)$ and $x_2(t_2)$ belong to ∂G . Hence $x_1(t_1), x_2(t_2) \in \partial K(t_1) \cap \Pi$. Since $K(t_1)$ is strictly convex, $x_1(t_1) = x_2(t_2)$. Applying again the normality condition, we conclude that

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{a.e on } [0, t_1].$$

Suppose now $t_1 < t_2$, by the transversality condition there is a hyperplane separating $K(t_2)$ and G , and by hypothesis (c) $K(t_2) \cap G \neq \emptyset$ which is a contradiction. \square

3 Applications

In this section we shall consider the optimal control problem governed by the wave equation

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = u(t, x), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R} \\ y = 0, & \text{on } \mathbb{R} \times \partial\Omega, \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x), & x \in \Omega, \\ \|u(t, \cdot)\|_{L^2} \leq 1, & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.1)$$

where the distributed control $u \in L^2(0, t_1; L^2(\Omega))$. We wish to steer the initial state (y_0, y_1) to the origin in minimal time. The system (3.1) can be written as an abstract second order equation in the Hilbert space $X = L^2(\Omega)$. But before that, we shall consider the following properties of the operator $-\Delta$.

Let $X = L^2(\Omega)$ and consider the linear unbounded operator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ defined by $A\phi = -\Delta\phi$, where

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (3.2)$$

The operator A has the following very well known properties, the spectrum of A consists of only eigenvalues

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j \rightarrow \infty,$$

each one with multiplicity γ_j equal to the dimension of the corresponding eigenspace.

a) There exists a complete orthonormal set $\{\phi_j\}$ of eigenvectors of A .

b) For all $x \in D(A)$ we have

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle x, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j \xi, \quad (3.3)$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the inner product in X and

$$E_j x = \sum_{k=1}^{\gamma_j} \langle \xi, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}. \quad (3.4)$$

So, $\{E_j\}$ is a family of complete orthogonal projections in X and $x = \sum_{j=1}^{\infty} E_j x$, $x \in X$.

c) $-A$ generates an analytic semigroup $\{e^{-At}\}$ given by

$$e^{-At} x = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} E_j x. \quad (3.5)$$

d) The fractional powered spaces X^r are given by:

$$X^r = D(A^r) = \{x \in X : \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j)^{2r} \|E_j x\|^2 < \infty\}, \quad r \geq 0,$$

with the norm

$$\|x\|_r = \|A^r x\| = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2r} \|E_j x\|^2 \right\}^{1/2}, \quad x \in X^r,$$

and

$$A^r x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^r E_j x. \quad (3.6)$$

Also, for $r \geq 0$ we define $Z_r = X^r \times X$, which is a Hilbert Space with norm given by

$$\left\| \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \right\|_{Z_r} = (\|w\|_r^2 + \|v\|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} y'' = -Ay + u(t) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \\ |u(t)| \leq 1, \end{cases}$$

where the operator $-A$ is the Laplacian operator defined above.

Using the change of variables $y' = v$, the second order equation (3.7) can be written as a first order system of ordinary differential equations in the Hilbert space $Z = Z_{1/2} = X^{1/2} \times X$ as

$$\begin{cases} z' = \mathcal{A}z + Bu(t), \quad z \in Z \\ z(0) = z_0, \\ |u(t)| \leq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

where

$$z_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_X \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_X \\ -A & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

\mathcal{A} is an unbounded linear operator with domain $D(\mathcal{A}) = D(A) \times X$ and $u \in L^2(0, \tau, U)$ with $U = X$.

The proof of the following theorem follows from Theorem 3.1 from [6] by putting $c = 0$ and $d = 1$.

Theorem 3.1. *The operator \mathcal{A} given by (3.9), is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ given by*

$$S(t)z = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j z, \quad z \in Z, \quad t \geq 0 \quad (3.10)$$

where $\{P_j\}_{j \geq 1}$ is a complete family of orthogonal projections in the Hilbert space Z given by

$$P_j = \text{diag}[E_j, E_j], \quad j \geq 1 \quad (3.11)$$

and

$$R_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_j & 0 \end{bmatrix}, \quad A_j = R_j P_j \quad t \geq 1. \quad (3.12)$$

Note that

$$R_j^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_j & 0 \end{bmatrix}, \quad A_j^* = R_j^* P_j, \quad j \geq 1.$$

Moreover $e^{A_j s} = e^{R_j s} P_j$ and the eigenvalues of R_j are $\sqrt{\lambda_j}i$ and $-\sqrt{\lambda_j}i$.
Now

$$\begin{aligned} e^{R_j t} &= \left\{ \cos(\sqrt{\lambda_j} t) I + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) R_j \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda_j} t) & \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} t)}{\sqrt{\lambda_j}} \\ -\lambda_j^{\frac{1}{2}} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) & \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} e^{R_j^* t} &= \left\{ \cos(\sqrt{\lambda_j} t) I + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) R_j^* \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda_j} t) & -\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} t)}{\sqrt{\lambda_j}} \\ \lambda_j^{\frac{1}{2}} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) & \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hence, the adjoint equation is

$$\dot{\eta} = -\mathcal{A}^*\eta,$$

where

$$\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & -I_X \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

is infinitesimal generator of strongly continuous group $\{S^*(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ give by

$$S^*(-s)x^* = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-R_j^* s} P_j x^*, \quad x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \in X_{\frac{1}{2}} + X.$$

Therefore, a solution of the adjoint equation such that $\eta(0) = x^*$ is given by

$$\eta(s) = T^*(-s)x^*.$$

Now, we shall apply Theorem (2.1) to find the optimal optimal control:

$$\langle \eta(s), Bu \rangle_{X_{\frac{1}{2}} \times X} = \left\langle \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right\rangle_{X_{\frac{1}{2}} \times X} = \langle \eta_2(s), u \rangle_X \leq \|\eta_2(s)\|_X.$$

Hence, if we put

$$u(t, \xi) = \begin{cases} \frac{\eta_2(t, \xi)}{\|\eta_2(t, \cdot)\|_X} & \text{if } \|\eta_2(t, \cdot)\|_X \neq 0 \\ 1 & \text{if } \|\eta_2(t, \cdot)\|_X = 0 \end{cases},$$

then

$$\max_{v \in \mathcal{U}} \langle \eta(s), Bv \rangle \leq \|\eta_2(s)\|_X = \langle \eta(s), B\hat{u}(s) \rangle, \quad \text{a.e. on } [0, t_1].$$

On the other hand, we known that

$$\eta(s) = T^*(-s)x^* = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-R_j^* s} P_j x^*,$$

therefore

$$\eta_2(s, x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-\lambda_j^{\frac{1}{2}} \sin(\sqrt{\lambda_j} s) \langle \phi_j, x_1^* \rangle + \phi_j(x) + \cos(\sqrt{\lambda_j} s) \langle \phi_j, x_2^* \rangle + \phi_j(x)).$$

References

- [1] D.Barcenas and H.Leiva, "Characterization of Extremal Controls for Infinite Dimensional Time-Varying Systems", SIAM J. Control Optim. Vol. 40(2001), N0. 2, pp. 333-347.
- [2] R.F.Curtain and A.J.Pritchard "Infinite dimensional linear systems", Lecture Notes in control and information science, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg(1978).
- [3] J. Diestel and J. J. Uhl "Vector Measures", A.M.S. Survey N0 15, Providence, R.I.(1977).
- [4] H.Hermes and J.P.Lassalle "Functional Analysis and time optimal control", Academic press, New York(1969).
- [5] E.B.Lee and L.Markus "Foundations of optimal control theory", John Wiley, New York(1967).
- [6] H. LEIVA, "Exact controllability of the suspension bridge model proposed by Lazer and McKenna", J. Math. Anal. Appl. 309 (2005), 404-419.
- [7] N.S.Papageorgiou "Time optimal control for infinite dimensional linear systems", Indian J. Pure Appl. Math., 24(1993), 155-198

Diomedes Barcenas[†], Hugo Leiva
Department of Mathematics, Universidad de los Andes
Mérida 5101, Venezuela.

Ambrosio Tineo Moya
Department Of Physical And Mathematics, Núcleo Universitario Rafael Rangel
Universidad de los Andes, Trujillo 3102, Venezuela.
e-mail: barcenas@ula.ve, hleiva@ula.ve, atemoya@ula.ve

On new estimates for distances in analytic function spaces in the unit disk, the polydisk and the unit ball.

Romi Shamoyan, Olivera Mihic*

Abstract. We provide various new sharp estimates for distances of fixed analytic functions of a certain classical analytic class (analytic Besov space, Bloch type space) to its subspaces in the unit disk, the unit polydisk and the unit ball. We substantially enlarge the list of previously known assertions of this type.

Resumen. Ofrecemos varias nuevas estimaciones fuerte para las distancias de funciones analíticas fijas de una cierta clase de funciones analíticas clásicas (espacios analíticos de Besov, espacios de tipo Bloch) a sus subespacios en el disco unidad, el polydisco unidad y la bola unidad. Ampliamos sustancialmente la lista de afirmaciones previamente conocidas de este tipo.

1 Introduction and main notations

Let \mathbf{D} be, as usual, the unit disk on the complex plane, $dA(z)$ be the normalized Lebesgue measure on \mathbf{D} so that $A(\mathbf{D}) = 1$ and $d\xi$ be the Lebesgue measure on the circle $\mathbf{T} = \{\xi : |\xi| = 1\}$. Let further $H(\mathbf{D})$ be the space of all analytic functions on the unit disk \mathbf{D} .

For $f \in H(\mathbf{D})$ and $f(z) = \sum_k a_k z^k$, define the fractional derivative of the function f as usual in the following manner

$$D^\alpha f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^\alpha a_k z^k, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

We will write $Df(z)$ if $\alpha = 1$. Obviously, for all $\alpha \in \mathbb{R}$, $D^\alpha f \in H(\mathbf{D})$ if $f \in H(\mathbf{D})$.

*Supported by MNZŽS Serbia, Project 144010

For $a \in \mathbf{D}$, let $g(z, a) = \log\left(\frac{1}{|\varphi_a(z)|}\right)$ be the Green's function for \mathbf{D} with pole at a , where $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. For $0 < p < \infty$, $-2 < q < \infty$, $0 < s < \infty$, $-1 < q + s < \infty$, we say that $f \in F(p, q, s)$, if $f \in H(\mathbf{D})$ and

$$\|f\|_{F(p,q,s)}^p = \sup_{a \in \mathbf{D}} \int_{\mathbf{D}} |Df(z)|^p (1 - |z|^2)^q g(z, a)^s dA(z) < \infty.$$

As we know [15], if $0 < p < \infty$, $-2 < q < \infty$, $0 < s < \infty$, $-1 < q + s < \infty$, $f \in F(p, q, s)$ if and only if

$$\sup_{a \in \mathbf{D}} \int_{\mathbf{D}} |Df(z)|^p (1 - |z|^2)^q (1 - |\varphi_a(z)|)^s dA(z) < \infty.$$

It is known (see [15]) that $F(2, 0, 1) = BMOA$.

We recall that the weighted Bloch class $\mathcal{B}^\alpha(\mathbf{D})$, $\alpha > 0$, is the collection of the analytic functions on the unit disk satisfying

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha} = \sup_{z \in \mathbf{D}} |Df(z)|(1 - |z|^2)^\alpha < \infty.$$

Space $\mathcal{B}^\alpha(\mathbf{D})$ is a Banach space with the norm $\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha}$. Note $\mathcal{B}^1(\mathbf{D}) = \mathcal{B}(\mathbf{D})$ is a classical Bloch class (see [2], [8] and the references there).

For $k > s$, $0 < p, q \leq \infty$, the weighted analytic Besov space $\mathcal{B}_s^{q,p}(\mathbf{D})$ is the class of analytic functions satisfying (see [8])

$$\|f\|_{\mathcal{B}_s^{q,p}}^q = \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} |D^k f(r\xi)|^p |d\xi| \right)^{\frac{q}{p}} (1-r)^{(k-s)q-1} dr < \infty.$$

Quasinorm $\|f\|_{\mathcal{B}_s^{q,p}}$ does not depend on k . If $\min(p, q) \geq 1$, the class $\mathcal{B}_s^{q,p}(\mathbf{D})$ is a Banach space under the norm $\|f\|_{\mathcal{B}_s^{q,p}}$. If $\min(p, q) < 1$, then we have a quasinormed class.

The well-known so called ‘‘duality’’ approach to extremal problems in theory of analytic functions leads to the following general formula

$$dist_Y(g, X) = \sup_{l \in X^\perp, \|l\| \leq 1} |l(g)| = \inf_{\varphi \in X} \|g - \varphi\|_Y,$$

where $g \in Y$, X is subspace of a normed space Y , $Y \in H(\mathbf{D})$ and X^\perp is the ortogonal complement of X in Y^* , the dual space of Y and l is a linear functional on Y (see [7]).

Various extremal problems in H^p Hardy classes in \mathbf{D} based on duality approach we mentioned were discussed in [3, Chapter 8]. In particular for a function $K \in L^q(\mathbf{T})$ the following equality holds (see [3]), $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$dist_{L^q}(K, H^q) = \inf_{g \in H^q, K \in L^q} \|K - g\|_{H^q} = \sup_{f \in H^p, \|f\|_{H^p} \leq 1} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\xi|=1} f(\xi) K(\xi) d\xi \right|.$$

It is well known that if $p > 1$ then the inf-dual extremal problem in the analytic H^p Hardy classes has a solution, it is unique if an extremal function exists (see [3]).

Note also that extremal problems for H^p spaces in multiply connected domains were studied before in [1], [9].

Various new results on extremal problems in A^p Bergman class and in its subspaces were obtained recently by many authors (see [6] and the references there).

In this paper we will provide direct proofs for estimation of $dist_Y(f, X) = \inf_{g \in X} \|f - g\|_Y$, $X \subset Y$, $X, Y \subset H(\mathbf{D})$, $f \in Y$, not only in unit disk, but also in higher dimension.

Let further $\Omega_{\alpha, \varepsilon}^k = \{z \in \mathbf{D} : |D^k f(z)|(1 - |z|^2)^\alpha \geq \varepsilon\}$, $\alpha \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $\Omega_{\alpha, \varepsilon}^0 = \Omega_{\alpha, \varepsilon}$.

Applying famous Fefferman duality theorem, P. Jones proved the following

Theorem A. ([4], [15]) *Let $f \in \mathcal{B}$. Then the following are equivalent:*

- (a) $d_1 = dist_{\mathcal{B}}(f, BMOA)$;
- (b) $d_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \chi_{\Omega_{1, \varepsilon}^1(f)}(z) \frac{dA(z)}{1 - |z|^2} \text{ is a Carleson measure}\}$,
where χ denotes the characteristic function of the mentioned set.

Recently, R. Zhao (see [15]) and W. Xu (see [14]), repeating arguments of R. Zhao in the unit ball, obtained results on distances from Bloch functions to some Möbius invariant function spaces in one and higher dimensions in a relatively direct way. The goal of this paper is to develop further their ideas and present new sharp theorems in the unit disk and higher dimension.

In next sections various sharp assertions for distance function will be given. We will indicate proofs of some assertions in details, short sketches of proofs in some cases will be also provided.

Throughout the paper, we write C (sometimes with indexes) to denote a positive constant which might be different at each occurrence (even in a chain of inequalities) but is independent of the functions or variables being discussed.

Given two non negative real numbers A, B we will write $A \lesssim B$ if there is a positive constant C such that $A < CB$.

2 New sharp assertions on $dist_X(f, Y)$ function in the unit disk

For the proof of one of the main results of this paper we will need the following estimate which can be found in [8].

Lemma 1. (see [8]) *Let $s > -1$, $r > 0$, $t > 0$ and $r + t - s > 2$. If $t < s + 2 < r$ then we have*

$$\int_{\mathbf{D}} \frac{(1 - |z|^2)^s dA(z)}{|1 - \bar{w}z|^r |1 - \bar{a}z|^t} \leq \frac{C}{(1 - |w|^2)^{r-s-2} |1 - \bar{a}w|^t}, \quad a, w \in \mathbf{D}.$$

Note that $F(p, q, s) \subset \mathcal{B}^{\frac{q+2}{p}}$, $s \in (0, 1]$, (see [15]). Hence for $\alpha \geq \frac{q+2}{p}$, the problem of finding $\text{dist}_{\mathcal{B}^\alpha}(f, F(p, q, s))$ appears naturally.

In the following theorem we show that in Zhao's theorems (see [15]) Möebius invariant Bloch classes can be replaced by Bloch classes with general weights.

Theorem 1. *Let $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$, $0 < s \leq 1$, $\alpha \geq \frac{q+2}{p}$, $q > \alpha(p-1) - s - 1$, $q > s - 2 + \alpha(p-1)$ and $f \in \mathcal{B}^\alpha$. Then the following are equivalent:*

- (a) $d_1 = \text{dist}_{\mathcal{B}^\alpha}(f, F(p, q, s))$;
- (b) $d_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \chi_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1}(z) \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^{\alpha p - q - s}} \text{ is an } s\text{-Carleson measure}\}$.

Proof. First we show $d_1 \leq C d_2$. According to the Bergman representation formula (see [2]), we have $f(z) = C(\alpha) \int_{\mathbf{D}} Df(w)(1-|w|^2)^\alpha D^{-1} \frac{1}{(1-\bar{w}z)^{\alpha+2}} dA(w)$

$$\begin{aligned} &= C(\alpha) \int_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} Df(w)(1-|w|^2)^\alpha D^{-1} \frac{1}{(1-\bar{w}z)^{\alpha+2}} dA(w) + \\ &\quad + C(\alpha) \int_{\mathbf{D} \setminus \Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} Df(w)(1-|w|^2)^\alpha D^{-1} \frac{1}{(1-\bar{w}z)^{\alpha+2}} dA(w) = f_1(z) + f_2(z), \end{aligned}$$

where $C(\alpha)$ is the constant of the Bergman representation formula (see [2]).

$$\text{By } Df_1(z) = C(\alpha) \int_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} \frac{Df(w)(1-|w|^2)^\alpha}{(1-\bar{w}z)^{2+\alpha}} dA(w),$$

$$|Df_1(z)| \leq C \int_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} \frac{|Df(w)|(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\bar{w}z|^{2+\alpha}} dA(w) \leq C \|f\|_{\mathcal{B}^\alpha} \frac{1}{(1-|w|)^\alpha}.$$

Then $f_1 \in \mathcal{B}^\alpha$. By Lemma 1,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{D}} |Df_1(z)|^p (1-|z|^2)^q (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) \\ &\leq C \|f_1\|_{\mathcal{B}^\alpha}^{p-1} \int_{\mathbf{D}} |Df_1(z)| (1-|z|^2)^{q-(p-1)\alpha} (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) \\ &\leq C \|f_1\|_{\mathcal{B}^\alpha}^{p-1} \int_{\mathbf{D}} \int_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} \frac{|Df(w)|(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\bar{w}z|^{2+\alpha}} dA(w) (1-|z|^2)^{q-(p-1)\alpha} (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) \\ &\leq C \|f_1\|_{\mathcal{B}^\alpha}^{p-1} \|f\|_{\mathcal{B}^\alpha} \int_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} (1-|a|^2)^s \int_{\mathbf{D}} (1-|z|^2)^{q-(p-1)\alpha+s} dA(z) dA(w) \\ &\leq C \int_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} \frac{(1-|a|^2)^s}{|1-|w|^2|^{\alpha p - q - s} |1-\bar{a}w|^{2s}} dA(w). \end{aligned}$$

By $\chi_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^{\alpha p - q - s}}$ is an s -Carleson measure, $f_1 \in F(p, q, s)$. Also we have

$$|Df_2(z)| \leq C \int_{\mathbf{D} \setminus \Omega_{\alpha, \varepsilon}^1} \frac{|Df(w)|(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\bar{w}z|^{2+\alpha}} dA(w) \leq C\varepsilon \int_{\mathbf{D}} \frac{dA(w)}{|1-\bar{w}z|^{2+\alpha}} \leq \frac{C\varepsilon}{(1-|z|)^\alpha}.$$

So, $\text{dist}_{\mathcal{B}^\alpha}(f, F(p, q, s)) \leq \|f - f_1\|_{\mathcal{B}^\alpha} = \|f_2\|_{\mathcal{B}^\alpha} < \varepsilon$.

It remains to show that $d_1 \geq d_2$. If $d_1 < d_2$ then we can find two numbers $\varepsilon, \varepsilon_1$ such that $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$, and a function $f_{\varepsilon_1} \in F(p, q, s)$, $\|f - f_{\varepsilon_1}\|_{\mathcal{B}^\alpha} \leq \varepsilon_1$, and $\frac{\chi_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1}(z)}{(1-|z|^2)^{\alpha p - q - s}}$ is not a s -Carleson measure.

Since $(|Df(z)| - |Df_{\varepsilon_1}(z)|)(1-|z|^2)^\alpha \leq \varepsilon_1$, we can easily obtain

$$(\varepsilon - \varepsilon_1)\chi_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1}(z)dA(z) \leq C|Df_{\varepsilon_1}(z)|(1-|z|^2)^\alpha, \quad (1)$$

where $\chi_{\Omega_{\alpha, \varepsilon}^1}$ is defined above. Hence from (1) and the fact that $f_{\varepsilon_1} \in F(p, q, s)$ we arrive at a contradiction. The theorem is proved. \square

Remark 1. Theorem 1 can be expanded similarly to more general analytic classes with quasinorms $\sup_{|z|<1} |D^\gamma f(z)|(1-|z|)^\alpha$, $\alpha > 0$, with some restrictions on α, γ .

Let $\tilde{\mathcal{B}}^{-t} = D^{-1}\mathcal{B}^{-t} = \{f \in H(\mathbf{D}) : D^{-1}f \in \mathcal{B}^{-t}\}$, $t < 0$.

It is well-known that $\mathcal{B}_s^{q,q}(\mathbf{D}) \subset \tilde{\mathcal{B}}^{-t}(\mathbf{D})$, $t = s - \frac{1}{q}$, $t < 0$, $s < 0$ (see [8]).

In the following theorem we calculate distances from a weighted Bloch class to Bergman spaces for $q \leq 1$.

Theorem 2. *Let $0 < q \leq 1$, $s < 0$, $t \leq s - \frac{1}{q}$, $\beta > \frac{1-sq}{q} - 2$ and $\beta > -1 - t$.*

Let $f \in \tilde{\mathcal{B}}^{-t}$. Then the following are equivalent:

- (a) $l_1 = \text{dist}_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}}(f, \mathcal{B}_s^{q,q})$;
- (b) $l_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_{\mathbf{D}} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon, -t}(f)} \frac{(1-|w|^{\beta+t})}{|1-\bar{z}w|^{2+\beta}} dA(w) \right)^q (1-|z|)^{-sq-1} dA(z) < \infty\}$.

Proof. First we show that $l_1 \leq Cl_2$. For $\beta > -1 - t$, we have

$$f(z) = C(\beta) \left(\int_{\mathbf{D} \setminus \Omega_{\varepsilon, -t}} \frac{f(w)(1-|w|)^\beta}{(1-\bar{w}z)^{\beta+2}} dA(w) + \int_{\Omega_{\varepsilon, -t}} \frac{f(w)(1-|w|)^\beta}{(1-\bar{w}z)^{\beta+2}} dA(w) \right) = f_1(z) + f_2(z),$$

where $C(\beta)$ is a well-known Bergman representation constant (see [2], [8]).

For $t < 0$,

$$|f_1(z)| \leq C \int_{\mathbf{D} \setminus \Omega_{\varepsilon, -t}} \frac{|f(w)|(1-|w|)^\beta}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} dA(w) \leq C\varepsilon \int_{\mathbf{D}} \frac{(1-|w|)^{\beta+t}}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} dA(w) \leq C\varepsilon \frac{1}{(1-|z|)^{-t}}.$$

So $\sup_{z \in \mathbf{D}} |f_1(z)|(1-|z|)^{-t} < C\varepsilon$.

For $s < 0$, $t < 0$, we have

$$\int_{\mathbf{D}} |f_2(z)|^q (1-|z|)^{-sq-1} dA(z) \leq C \int_{\mathbf{D}} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon, -t}} \frac{(1-|w|)^{\beta+t}}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} dA(w) \right)^q (1-|z|)^{-sq-1} dA(z) \leq C.$$

So we finally have

$$\text{dist}_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}}(f, \mathcal{B}_s^{q,q}) \leq C\|f - f_2\|_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}} = C\|f_1\|_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}} \leq C\varepsilon.$$

It remains to prove that $l_2 \leq l_1$. Let us assume that $l_1 < l_2$. Then we can find two numbers $\varepsilon, \varepsilon_1$ such that $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$, and a function $f_{\varepsilon_1} \in \mathcal{B}_s^{q,q}$, $\|f - f_{\varepsilon_1}\|_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}} \leq \varepsilon_1$, and $\int_{\mathbf{D}} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon,-t}} \frac{(1-|w|)^{\beta+t}}{|1-\bar{z}w|^{\beta+2}} dA(w) \right)^q (1-|z|)^{-sq-1} dA(z) = \infty$. Hence as above we easily get from $\|f - f_{\varepsilon_1}\|_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}} \leq \varepsilon_1$ that $(\varepsilon - \varepsilon_1) \chi_{\Omega_{\varepsilon,-t}}(f)(z) (1-|z|)^t \leq C |f_{\varepsilon_1}(z)|$, and hence

$$\begin{aligned} M &= \int_{\mathbf{D}} \left(\int_{\mathbf{D}} \frac{\chi_{\Omega_{\varepsilon,-t}}(f)(z) (1-|w|)^{\beta+t}}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} dA(w) \right)^q (1-|z|)^{-sq-1} dA(z) \\ &\leq C \int_{\mathbf{D}} \left(\int_{\mathbf{D}} \frac{|f_{\varepsilon_1}(w)| (1-|w|)^{\beta}}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} dA(w) \right)^q (1-|z|)^{-sq-1} dA(z). \end{aligned}$$

Since for $q \leq 1$, (see [2], [8])

$$\left(\int_{\mathbf{D}} \frac{|f_{\varepsilon_1}(z)| (1-|z|)^{\alpha} dA(z)}{|1-wz|^t} \right)^q \leq C \int_{\mathbf{D}} \frac{|f_{\varepsilon_1}(z)|^q (1-|z|)^{\alpha q + q - 2} dA(z)}{|1-wz|^{tq}}, \quad (2)$$

where $\alpha > \frac{1-q}{q}, t > 0, f_{\varepsilon_1} \in H(\mathbf{D}), w \in \mathbf{D}$, and

$$\int_{\mathbf{D}} \frac{(1-|z|)^{-sq-1}}{|1-\bar{w}z|^{q(\beta+2)}} dA(z) \leq \frac{C}{(1-|w|)^{q(\beta+2)+sq-1}}, \quad (3)$$

where $s < 0, \beta > \frac{1-sq}{q} - 2, w \in \mathbf{D}$. We get

$$M \leq C \int_{\mathbf{D}} |f_{\varepsilon_1}(z)|^q (1-|z|)^{-sq-1} dA(z).$$

So as in the proof of the previous theorem we arrive at a contradiction. \square

The following theorem is a version of Theorem 2 for the case $q > 1$.

Theorem 3. *Let $q > 1, s < 0, t \leq s - \frac{1}{q}, \beta > \frac{-1-sq}{q}$ and $\beta > -1 - t$. Let $f \in \tilde{\mathcal{B}}^{-t}$. Then the following are equivalent:*

- (a) $l_1 = \text{dist}_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}}(f, \mathcal{B}_s^{q,q});$
- (b) $\hat{l}_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_{\mathbf{D}} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon,-t}(f)} \frac{(1-|w|)^{\beta+t}}{|1-\bar{z}w|^{\beta+2}} dA(w) \right)^q (1-|z|)^{-sq-1} dA(z) < \infty\}.$

The proof of this theorem is similar to the proof of Theorem 2 but here we will use (4) (see below) instead of (2). For $\varepsilon > 0, q > 1, \beta > 0, \alpha > \frac{-1}{q}$, (see [8])

$$\left(\int_{\mathbf{D}} \frac{|f(z)| (1-|z|)^{\alpha} dA(z)}{|1-\bar{w}z|^{\beta+2}} \right)^q \leq C \int_{\mathbf{D}} \frac{|f(z)|^q (1-|z|)^{\alpha q}}{|1-\bar{w}z|^{\beta q - \varepsilon q + 2}} dA(z) (1-|w|)^{-\varepsilon q}, w \in \mathbf{D}, \quad (4)$$

which follows immediately from Hölder's inequality and (3) (see [8]).

Remark 2. In Theorems 2 and 3 we considered only the linear case ($p = q$). Estimates for distances of more general mixed norm $\mathcal{B}_s^{p,q}$ classes, $s < 0$, can be obtained similarly. We give an example in this direction.

It is known that $\mathcal{B}_s^{p,q}(\mathbf{D}) \subset \tilde{\mathcal{B}}^{-(s-\frac{1}{q})}(\mathbf{D})$, $s < 0$ (see [8]).

Theorem 4. *Let $0 < q \leq 1$, $p \leq q \leq 1$, $s < 0$, $t \leq s - \frac{1}{q}$, $\beta > \frac{-sq}{p} + \frac{1}{q} - 2$.*

Let $f \in \tilde{\mathcal{B}}^{-t}$. Then the following are equivalent:

- (a) $\tilde{l}_1 = \text{dist}_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}}(f, \mathcal{B}_s^{p,q})$;
- (b) $\tilde{l}_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon,-t}(f)} \frac{(1-|w|)^{\beta+t} dA(w)}{|1-\bar{z}w|^{2+\beta}} \right)^q d\xi \right)^{\frac{p}{q}} (1-|z|)^{-sp-1} d|z| < \infty\}$.

Let X be a quasinormed class in the unit disk, $X \subset H(\mathbf{D})$. Let also

$$\sup_{z \in \mathbf{D}} |f(z)|(1-|z|)^{\alpha+\tau} \leq C_{\alpha,\tau} \|f\|_X, \quad (5)$$

where $C_{\alpha,\tau}$ ($\alpha > 0$, $\tau > 0$) is an absolute constant. It is well known that for many classes the above estimate (5) holds (see [2], [8] and the references there).

The following result follows directly from arguments we provided above during the proof of previous theorem.

Theorem 5. *Let $X, Y \subset H(\mathbf{D})$, $X \subset Y$, $\alpha > 0$, $\tau > 0$. Let $f \in Y(\mathbf{D})$ and $\sup_{z \in \mathbf{D}} |f(z)|(1-|z|)^\tau \leq C_\tau \|f\|_Y$, $\sup_{z \in \mathbf{D}} |f(z)|(1-|z|)^{\alpha+\tau} \leq \widehat{C}_{\alpha,\tau} \|f\|_X$. Then $B(f, X) \leq C \text{dist}_Y(f, X)$, $C = C(\alpha, \tau)$, where*

$$B(f, X) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \sup_{|z| < 1} \chi_{\Omega_{\tau,\varepsilon}}(z) (1-|z|)^\alpha < \infty \right\}.$$

Remark 3. Theorem 5 provides various new results for *dist*-function for different analytic classes. The general theorem we have presented is true even if the unit disk is replaced by the polydisk or the unit ball, since uniform estimates like (5), which is the base of proof, are well known in unit disk, unit ball and polydisk for various concrete classes of analytic functions (Bergman, Hardy, Bloch, BMOA, Q_p , etc.), see [2].

For $0 < p < \infty$ and $\alpha > 0$, let as above

$$B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \sup_{r < 1} \left(\int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| |d\xi| \right) (1-r)^\alpha < \infty \right\},$$

$$B_{-\alpha}^{p,1}(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| |d\xi| \right)^p (1-r)^{\alpha p-1} dr < \infty \right\}.$$

It is easy to see that $B_{-\alpha}^{p,1}(\mathbf{D}) \subset B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{D})$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$.

We now define a new subset of the unit interval and then using its characteristic function we will give a new sharp assertion concerning distance function.

For $\varepsilon > 0$, $f \in H(\mathbf{D})$, let $L_{\varepsilon,\alpha}(f) = \{r \in (0,1) : (1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| |d\xi| \geq \varepsilon\}$.

Theorem 6. Let $f \in B_{-\alpha}^{\infty,1}$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$. Then the following are equivalent:

- (a) $s_1 = \text{dist}_{B_{-\alpha}^{\infty,1}}(f, B_{-\alpha}^{p,1})$;
- (b) $s_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_0^1 (1-r)^{-1} \chi_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)}(r) dr < \infty\}$.

Proof. First we prove $s_1 \geq s_2$. Let us assume that $s_1 < s_2$. Then we can find two numbers $\varepsilon, \varepsilon_1$ such that $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$, and a function $f_{\varepsilon_1} \in B_{-\alpha}^{p,1}$, $\|f - f_{\varepsilon_1}\|_{B_{-\alpha}^{\infty,1}} \leq \varepsilon_1$, and $\int_0^1 (1-r)^{-1} \chi_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)}(r) dr = \infty$. Hence we have

$$\begin{aligned} (1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f_{\varepsilon_1}(r\xi)| |d\xi| &\geq (1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| |d\xi| - \sup_{r < 1} (1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi) - f_{\varepsilon_1}(r\xi)| |d\xi| \\ &\geq (1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| |d\xi| - \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Hence for any $s \in [-1, \infty)$,

$$(\varepsilon - \varepsilon_1)^p \int_0^1 (1-r)^s \chi_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)}(r) dr \leq C \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} |f_{\varepsilon_1}(r\xi)| |d\xi| \right)^p (1-r)^{\alpha p + s} dr.$$

Thus we have a contradiction.

It remains to show $s_1 \leq C s_2$. Let $I = [0, 1)$. We argue as above and obtain from the classical Bergman representation formula (see [16]).

$$\begin{aligned} f(\rho\zeta) = f(z) &= C(t) \int_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)} \int_{\mathbf{T}} \frac{f(r\xi)(1-r)^t}{(1-r\xi\bar{\rho}\zeta)^{t+2}} d\xi dr + C(t) \int_{I \setminus L_{\varepsilon,\alpha}(f)} \int_{\mathbf{T}} \frac{f(r\xi)(1-r)^t}{(1-r\xi\bar{\rho}\zeta)^{t+2}} d\xi dr \\ &= f_1(z) + f_2(z), \text{ where } t \text{ is large enough. Then we have} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-\rho)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f_2(\rho\zeta)| |d\zeta| &\leq C(1-\rho)^\alpha \int_{\mathbf{T}} \int_{I \setminus L_{\varepsilon,\alpha}(f)} \int_{\mathbf{T}} \frac{|f(r\xi)|(1-r)^t}{|1-r\xi\bar{\rho}\zeta|^{t+2}} |d\xi| dr |d\zeta| \\ &\leq C(1-\rho)^\alpha \int_{I \setminus L_{\varepsilon,\alpha}(f)} \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)|(1-r)^t \left(\int_{\mathbf{T}} \frac{1}{|1-r\xi\bar{\rho}\zeta|^{t+2}} |d\zeta| \right) |d\xi| dr \\ &\leq C(1-\rho)^\alpha \int_{I \setminus L_{\varepsilon,\alpha}(f)} \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| |d\xi| \frac{(1-r)^t}{(1-r\rho)^{t+1}} dr \leq C\varepsilon(1-\rho)^\alpha \int_0^1 \frac{(1-r)^{t-\alpha}}{(1-r\rho)^{t+1}} dr \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

For $\alpha > 0$, $\int_{\mathbf{D}} (1-\rho)^{\alpha-1} |f_1(\rho\zeta)| dA(\rho\zeta)$

$$\begin{aligned} &\leq C \int_{\mathbf{D}} (1-\rho)^{\alpha-1} \int_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)} \int_{\mathbf{T}} \frac{|f(r\xi)|(1-r)^t}{|1-r\xi\bar{\rho}\zeta|^{t+2}} |d\xi| dr dA(\rho\zeta) \\ &\leq C \sup_{r < 1} \left((1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| |d\xi| \right) \int_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)} \frac{(1-r)^{t-\alpha}}{(1-r)^{t+1-\alpha}} dr \end{aligned}$$

$$= C \sup_{r < 1} \left((1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| |d\xi| \right) \int_{L_{\varepsilon, \alpha}(f)} \frac{1}{(1-r)} dr.$$

Note that the implication $\|f_1\|_{B_{-\alpha}^{p,1}} < \infty$ for $p \geq 1$ follows directly from the known estimate (see [8])

$$\left(\int_0^1 (1-\rho)^{\alpha p-1} \left(\int_{\mathbf{T}} |f_1(\rho\xi)| |d\xi| \right)^p d\rho \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \int_{\mathbf{D}} (1-\rho)^{\alpha-1} |f_1(\rho\xi)| dA(\rho\xi),$$

$\alpha > 0$, $p \geq 1$, $f_1 \in H(\mathbf{D})$.

Hence $\inf_{g \in B_{-\alpha}^{p,1}} \|f - g\|_{B_{-\alpha}^{\infty,1}} \leq C \|f - f_1\|_{B_{-\alpha}^{\infty,1}} = \|f_2\|_{B_{-\alpha}^{\infty,1}} \leq C\varepsilon$.

The theorem is proved. \square

For $0 < p < \infty$ and $\alpha > 0$, let as above

$$B_{-\alpha}^{p,\infty}(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \int_0^1 (M_\infty(f, r))^p (1-r)^{\alpha p-1} dr < \infty \right\},$$

where $M_\infty(f, r) = \max_{\xi \in \mathbf{T}} |f(r\xi)|$, $r \in (0, 1)$, $f \in H(\mathbf{D})$. It is easy to see that $B_{-\alpha}^{p,\infty}(\mathbf{D}) \subset \tilde{\mathcal{B}}^\alpha(\mathbf{D})$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$.

For $\varepsilon > 0$, $f \in H(\mathbf{D})$, let $\widehat{L}_{\varepsilon, \alpha}(f) = \{r \in (0, 1) : (1-r)^\alpha M_\infty(f, r) \geq \varepsilon\}$.

Theorem 7. *Let $f \in \tilde{\mathcal{B}}^\alpha$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$. Then the following are equivalent:*

- (a) $s_1 = \text{dist}_{\tilde{\mathcal{B}}^\alpha}(f, B_{-\alpha}^{p,\infty})$;
- (b) $s_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_0^1 (1-r)^{-1} \chi_{\widehat{L}_{\varepsilon, \alpha}(f)}(r) dr < \infty\}$.

The proof of Theorem 7 is repetition of arguments provided in Theorem 6.

We now provide a sharp version of Theorem 6 for $p \leq 1$ case.

Theorem 8. *Let $f \in B_{-\alpha}^{\infty,1}$, $p \leq 1$, $t > \alpha - 1$, $\alpha > 0$. Then the following are equivalent:*

- (a) $s_1 = \text{dist}_{B_{-\alpha}^{\infty,1}}(f, B_{-\alpha}^{p,1})$;
- (b) $\widehat{s}_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{L_{\varepsilon, \alpha}(f)}(r) \frac{(1-r)^{t-\alpha}}{(1-r\rho)^{t+1}} dr \right)^p (1-\rho)^{p\alpha-1} d\rho < \infty\}$.

Proof. The proof of Theorem 8 is similar to the one provided in Theorem 6.

One part of the theorem follows directly from the estimate

$$\chi_{L_{\varepsilon, \alpha}(f)}(r) \leq C(\varepsilon, \varepsilon_1) \left(\int_{\mathbf{T}} |f_{\varepsilon_1}(r\xi)| |d\xi| \right)^q (1-r)^{\alpha q}, \quad r \in (0, 1), \quad 0 < q < \infty, \quad \alpha > 0, \quad (6)$$

which were given in the proof of the previous theorem. Indeed, from (6) for $q = 1$, we get

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{t-\alpha} \chi_{L_{\varepsilon, \alpha}(f)}(r) dr}{(1-r\rho)^{t+1}} \right)^p (1-\rho)^{\alpha p-1} d\rho$$

$$\leq C \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} |f_{\varepsilon_1}(r\xi)| d\xi \right)^p \frac{(1-r)^{\alpha p + p - 1 + (t-\alpha)p}}{(1-r\rho)^{(t+1)p}} (1-\rho)^{\alpha p - 1} dr d\rho \leq C \|f_{\varepsilon_1}\|_{B_{-\alpha}^{p,1}}.$$

The rest is clear. It remains to argue as in the previous theorem to arrive to a contradiction.

To prove the second part we note that as in Theorem 6 we get

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \text{and} \quad f_2(z) \leq C(1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f_2(r\xi)| d\xi \leq C\varepsilon.$$

And moreover, arguing similarly as for $p \geq 1$ in Theorem 6 we will have

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}} |f_1(r\xi)| d\xi \right)^p (1-r)^{\alpha p - 1} dr \\ & \leq C \sup_{r < 1} \left((1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}} |f(r\xi)| d\xi \right)^p \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)}(r) \frac{(1-r)^{t-\alpha}}{(1-r\rho)^{t+1}} dr \right)^p (1-\rho)^{\alpha p - 1} d\rho. \end{aligned}$$

Hence $\inf_{g \in B_{-\alpha}^{p,1}} \|f - g\|_{B_{-\alpha}^{\infty,1}} \leq C \|f - f_1\|_{B_{-\alpha}^{\infty,1}} = \|f_2\|_{B_{-\alpha}^{\infty,1}} \leq C\varepsilon$.

The theorem is proved. \square

Remark 4. Proofs of Theorem 6, 7 and 8 can be easily extended to $B^{q,p}$ spaces with more general $w(1-r)$ weights under some natural restrictions on the function $w(r)$.

For $\alpha > -1$, $\beta > 0$ and $0 < p < \infty$, let

$$M_\beta^\alpha(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \sup_{r < 1} (1-r)^\beta \int_{|w| \leq r} |f(w)|(1-|w|)^\alpha dA(w) < \infty \right\}$$

and

$$M_{p,\beta}^\alpha(\mathbf{D}) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}) : \int_0^1 (1-r)^{\beta p - 1} \left(\int_{|w| \leq r} |f(w)|(1-|w|)^\alpha dA(w) \right)^p dr < \infty \right\}.$$

$M_\beta^\alpha(\mathbf{D})$ and $M_{p,\beta}^\alpha(\mathbf{D})$ for $p \geq 1$ are Banach spaces and they were studied by various authors (see for example [5]). It is easy to show that $M_{p,\beta}^\alpha(\mathbf{D}) \subset M_\beta^\alpha(\mathbf{D})$, where $p \in (0, \infty)$, $\beta > 0$, $\alpha > -1$.

In the following result we provide another sharp result on the dist function using the characteristic function of a new set. For $f \in H(\mathbf{D})$ and $\varepsilon > 0$, let

$$\mathcal{G}_{\varepsilon,\beta}^\alpha(f) = \left\{ r \in (0, 1) : (1-r)^\beta \int_{|w| \leq r} |f(w)|(1-|w|)^\alpha dA(w) \geq \varepsilon \right\}, \quad \beta > 0, \quad \alpha > -1.$$

Theorem 9. *Let $p \geq 1, \alpha > -1, \beta > 0, f \in M_\beta^\alpha$. Then the following are equivalent:*

- (a) $t_1 = \text{dist}_{M_\beta^\alpha}(f, M_{p,\beta}^\alpha)$;
- (b) $t_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_0^1 (1-r)^{-1} \chi_{\mathcal{G}_{\varepsilon,\beta}^\alpha(f)}(r) dr < \infty\}$.

The proof of Theorem 9 will be omitted. It can be obtained by a small modification of the proof of the previous theorem.

3 Sharp assertions for the Dist function in the unit ball and in the polydisk

The goal of this section is to provide straightforward generalizations of some of the results of the previous section to the case of the unit ball and the polydisk in \mathbb{C}^n : Practically all results of the previous section can be generalized to the case of the polydisk and to the unit ball. The proofs of these assertions are mostly based on the same ideas as in case of one variable, though some technical difficulties arise on that way. For the proofs of the theorems we will formulate below in higher dimensions we simply replace the well- known Bergman integral representation in the unit disk that were used in the previous section by the corresponding known integral representation version in the unit ball or in the polydisk (see [2], [16]) and then we define appropriate sets which will allow us to estimate such integral representation.

To formulate our results we will need some standard definitions (see [2], [16]).

We denote the open unit ball in \mathbb{C}^n by $\mathbf{B} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$. The boundary of \mathbf{B} will be denoted by \mathbf{S} , $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$. By dv we denote the volume measure on \mathbf{B} , normalized so that $v(\mathbf{B}) = 1$, and by $d\sigma$ we denote the surface measure on \mathbf{S} normalized so that $\sigma(\mathbf{S}) = 1$.

As usual, we denote by $H(\mathbf{B})$ the class of all holomorphic functions on \mathbf{B} .

We denote the unit polydisk by $\mathbf{D}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| < 1, 1 \leq k \leq n\}$ and the distinguished boundary of \mathbf{D}^n by $\mathbf{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| = 1, 1 \leq k \leq n\}$. By dA_{2n} we denote the volume measure on \mathbf{D}^n and by dm_n we denote the normalized Lebesgue measure on \mathbf{T}^n . Let $H(\mathbf{D}^n)$ be the space of all holomorphic functions on \mathbf{D}^n . We refer to [2] and [10] for further details.

For every function $f \in H(\mathbf{D}^n)$ and $f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, we define the operator of fractional differentiation by

$$\mathcal{D}^\alpha f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^n (k_j + 1)^\alpha a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

We will write $Df(z)$ if $\alpha = 1$. For any α , \mathcal{D}^α is an operator acting from $H(\mathbf{D}^n)$ to $H(\mathbf{D}^n)$ (see [2]).

We formulate now direct generalization of Theorem 6 in the unit ball, its proof is a simple repetition of arguments we provide above for the unit disk and will be omitted.

For $0 < p < \infty$ and $\alpha > 0$, let

$$B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{B}) = \left\{ f \in H(\mathbf{B}) : \sup_{r < 1} \left(\int_{\mathbf{S}} |f(r\xi)| |d\sigma(\xi)| \right) (1-r)^\alpha < \infty \right\},$$

$$B_{-\alpha}^{p,1}(\mathbf{B}) = \left\{ f \in H(\mathbf{B}) : \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{S}} |f(r\xi)| |d\sigma(\xi)| \right)^p (1-r)^{\alpha p - 1} dr < \infty \right\}.$$

It is easy to see that $B_{-\alpha}^{p,1}(\mathbf{B}) \subset B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{B})$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$.

We now define a new set on the unit interval and then using its characteristic function we will give a new sharp assertion concerning the distance function.

For $\varepsilon > 0$, $f \in H(\mathbf{B})$, let $L_{\varepsilon,\alpha}(f) = \{r \in (0,1) : (1-r)^\alpha \int_{\mathbf{S}} |f(r\xi)| |d\sigma(\xi)| \geq \varepsilon\}$.

Theorem 10. *Let $f \in B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{B})$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$. Then the following are equivalent:*

- (a) $\widehat{s}_1 = \text{dist}_{B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{B})}(f, B_{-\alpha}^{p,1}(\mathbf{B}))$;
- (b) $\widehat{s}_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_0^1 (1-r)^{-1} \chi_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)}(r) dr < \infty\}$.

Let $I = (0,1)$. We denote by $r\xi = (r\xi_1, \dots, r\xi_n)$ where $r \in I$, $\xi_j \in \mathbf{T}$, $j = 1, \dots, n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ and also $\vec{r}\xi = (r_1\xi_1, \dots, r_n\xi_n)$, where $\vec{r} \in I^n$, $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $r_j \in I$, $\xi_j \in \mathbf{T}$, $j = 1, \dots, n$.

We formulate now a polydisk version of Theorem 6.

For $0 < p < \infty$ and $\alpha > 0$, let as above

$$B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{D}^n) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}^n) : \sup_{r_1 < 1, \dots, r_n < 1} \left(\int_{\mathbf{T}^n} |f(\vec{r}\xi)| |dm_n(\xi)| \right) \prod_{k=1}^n (1-r_k)^\alpha < \infty \right\},$$

$$B_{-\alpha}^{p,1}(\mathbf{D}^n) = \left\{ f \in H(\mathbf{D}^n) : \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}^n} |f(\vec{r}\xi)| |dm_n(\xi)| \right)^p \prod_{k=1}^n (1-r_k)^{\alpha p - 1} dr_1 \cdots dr_n < \infty \right\}.$$

It is easy to see that $B_{-\alpha}^{p,1}(\mathbf{D}^n) \subset B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{D}^n)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$.

We now define a new set on I^n and then using its characteristic function we will give a new sharp assertion concerning the distance function.

For $\varepsilon > 0$, $f \in H(\mathbf{D}^n)$, let

$$L_{\varepsilon,\alpha}(f) = \{ \vec{r} = (r_1, \dots, r_n) \in I^n : \prod_{k=1}^n (1-r_k)^\alpha \int_{\mathbf{T}^n} |f(\vec{r}\xi)| |dm_n(\xi)| \geq \varepsilon \}.$$

Theorem 11. *Let $f \in B_{-\alpha}^{\infty,1}$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$. Then the following are equivalent:*

- (a) $\widehat{\widehat{s}}_1 = \text{dist}_{B_{-\alpha}^{\infty,1}(\mathbf{D}^n)}(f, B_{-\alpha}^{p,1}(\mathbf{D}^n))$;
- (b) $\widehat{\widehat{s}}_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{k=1}^n (1-r_k)^{-1} \chi_{L_{\varepsilon,\alpha}(f)}(r_1, \dots, r_n) dr_1 \cdots dr_n < \infty\}$.

Proof. The proof is a repetition of arguments of the one dimensional case and we omit details. \square

Now we formulate the polydisk version of Theorem 2 the proof is quite similar to one dimensional case and will be also omitted.

Let $\tilde{\mathcal{B}}^\alpha(\mathbf{D}^n)$, $\alpha > 0$, be the collection of the analytic functions on the polydisk satisfying

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}^\alpha(\mathbf{D}^n)} = \sup_{z_1 \in \mathbf{D}, \dots, z_n \in \mathbf{D}} |f(z_1, \dots, z_n)| \prod_{k=1}^n (1 - |z_k|^2)^\alpha < \infty.$$

$\tilde{\mathcal{B}}^\alpha(\mathbf{D}^n)$ is a Banach space with the norm $\|f\|_{\tilde{\mathcal{B}}^\alpha(\mathbf{D}^n)}$.

For $k > s$, $0 < p, q \leq \infty$, $\mathcal{B}_s^{q,p}(\mathbf{D}^n)$ let be the class of analytic functions on the polydisk satisfying (see [8])

$$\|f\|_{\mathcal{B}_s^{q,p}(\mathbf{D}^n)}^q = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}^n} |D^k f(\vec{r}\xi)|^p dm_n(\xi) \right)^{\frac{q}{p}} \prod_{k=1}^n (1-r_k)^{(k-s)q-1} dr_1 \cdots dr_n < \infty.$$

It is known that $\mathcal{B}_s^{q,q}(\mathbf{D}^n) \subset \tilde{\mathcal{B}}^{-(s-\frac{1}{q})}(\mathbf{D}^n)$, $s < 0$ (see [2]).

Theorem 12. *Let $0 < q \leq 1$, $s < 0$, $t \leq s - \frac{1}{q}$, $\beta > \frac{1-sq}{q}$ and $\beta > -1 - t$. Let $f \in \tilde{\mathcal{B}}^{-t}(\mathbf{D}^n)$. Then the following are equivalent:*

- (a) $l_1 = \text{dist}_{\tilde{\mathcal{B}}^{-t}(\mathbf{D}^n)}(f, \mathcal{B}_s^{q,q}(\mathbf{D}^n))$;
- (b) $l_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_{\mathbf{D}^n} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon,-t}(f)} \frac{\prod_{k=1}^n (1-|w_k|)^{\beta+t} dA_{2n}(w_1, \dots, w_n)}{\prod_{k=1}^n |1-\bar{z}_k w_k|^{2+\beta}} \right)^q \times \prod_{k=1}^n (1-|z_k|)^{-sq-1} dA_{2n}(z_1, \dots, z_n) < \infty\}$.

We will formulate now a sharp theorem for analytic classes on the subframe. Let $\mathcal{R}^s f(z) = \sum_{k_1, \dots, k_n \geq 0} (k_1 + \cdots + k_n + 1)^s a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ and $\tilde{\mathbf{D}}^n = (0, 1] \times \mathbf{T}^n$. It is obvious $\mathcal{R}^s f \in H(\mathbf{D}^n)$ if $f \in H(\mathbf{D}^n)$.

It is easy to note that $\|f\|_{B_{-\alpha,s}^{\infty,1}(\tilde{\mathbf{D}}^n)} = \sup_{r < 1} (1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}^n} |\mathcal{R}^s f(r\xi)| dm_n(\xi)$

$$\leq C \left(\int_0^1 \left(\int_{\mathbf{T}^n} |\mathcal{R}^s f(r\xi)| dm_n(\xi) \right)^p (1-r)^{\alpha p-1} dr \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{B_{-\alpha,s}^{p,1}(\tilde{\mathbf{D}}^n)},$$

where $s \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $0 < p < \infty$.

The analytic classes on the subframe $\tilde{\mathbf{D}}^n$ were studied in [11], [12], [13]. For $\varepsilon > 0$ and $f \in H(\mathbf{D}^n)$, let $K_{\varepsilon,\alpha,s} = \{r \in I : (1-r)^\alpha \int_{\mathbf{T}^n} |\mathcal{R}^s f(r\xi)| dm_n(\xi) \geq \varepsilon\}$.

Theorem 13. *Let $f \in B_{-\alpha,s}^{\infty,1}(\tilde{\mathbf{D}}^n)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. Then the following are equivalent:*

- (a) $\nu_1 = \text{dist}_{B_{-\alpha,s}^{\infty,1}(\tilde{\mathbf{D}}^n)}(f, B_{-\alpha,s}^{p,1}(\tilde{\mathbf{D}}^n))$;
- (b) $\nu_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \int_0^1 (1-r)^{-1} \chi_{K_{\varepsilon,\alpha,s}(f)}(r) dr < \infty\}$.

This paper only concerns with the situation when some Bergman (or mixed norm) space is acting as a subspace of a larger analytic class where sup can be seen somehow in quasinorm. It is also easy to notice that we systematically use the classical Bergman integral representation formula in all our proofs.

We note that based on similar arguments we obtained corresponding sharp results in cases when mentioned above Bergman classes are replaced by analytic (weighted) Hardy type spaces in the unit disk. The only visible difference is that in such cases proofs are based on the classical Cauchy integral representation formula. We give an example of such a result in the unit disk.

Theorem 14. *Let $\alpha > \frac{1}{p}$, $p \geq 1$, $f \in B_{\frac{1}{p}-\alpha}^{\infty,p}(\mathbf{D})$. Then the following are equivalent:*

$$(a) \quad v_1 = \text{dist}_{\tilde{B}^\alpha(\mathbf{D})}(f, B_{\frac{1}{p}-\alpha}^{\infty,p}(\mathbf{D}));$$

$$(b) \quad v_2 = \inf\{\varepsilon > 0 : \sup_{r < 1} \left(\frac{1}{1-r} \int_{\mathbf{T}} \chi_{\Omega_{r,\varepsilon,\alpha}}(\xi) d\xi \right) < \infty\},$$

where $\Omega_{r,\varepsilon,\alpha} = \{\xi \in \mathbf{T} : |f(r\xi)|(1-r)^\alpha \geq \varepsilon\}$.

In [15] the author provided several obvious corollaries of his results. Similar corollaries can be obtained immediate from our theorems 6 - 9. As example we note that from Theorem 6 we have the following

Proposition 1. *Let $\alpha > 0$, $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Then*

$$\text{dist}_{B_{-\alpha}^{\infty,1}}(f, B_{-\alpha}^{p_1,1}) = \text{dist}_{B_{-\alpha}^{\infty,1}}(f, B_{-\alpha}^{p_2,1}).$$

Proposition 2. *Let $\alpha > 0$, $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Then the closures of $B_{-\alpha}^{p_1,1}$ and $B_{-\alpha}^{p_2,1}$ in $B_{-\alpha}^{\infty,1}$ are the same and f is in closure of $B_{-\alpha}^{p_1,1}$ in $B_{-\alpha}^{\infty,1}$ if and only if $\int_0^1 (1-r)^{-1} \chi_{L_{\varepsilon,-\alpha}(f)}(r) < \infty$, for every $\varepsilon > 0$.*

Similar results obviously are true also in higher dimension. We omit details.

References

- [1] L. V. Ahlfors: Bounded analytic functions, Duke Math Journal, 14 (1947), 1-14.
- [2] M. M. Djrbashian, F. A. Shamoian: Topics in the theory of A_α^p classes, Teubner Texte zur Mathematics, 1988, v 105.
- [3] P. L. Duren: Theory of H^p spaces, Academic Press, New York, 1970.
- [4] P. G. Ghatage, D. Zheng: Analytic functions of bounded mean oscillation and the Bloch space, Integr. Equat. Oper. Theory, 17 (1993), 501-515.
- [5] M. Jevtić, M. Pavlović, R. F. Shamoian: A note on diagonal mapping theorem in spaces of analytic functions in the unit polydisk, Publ. Math. Debrecen, 74/1-2, 2009, 1-14.

- [6] D. Khavinson, M. Stessin: Certain linear extremal problems in Bergman spaces of analytic function, *Indiana Univ. Math. J.*, 3(46) (1997).
- [7] S. Ya Khavinson: On an extremal problem in the theory of analytic function, *Russian Math. Surv.*, 4(32) (1949), 158-159.
- [8] J. Ortega, J. Fabrega: Hardy's inequality and embeddings in holomorphic Triebel-Lizorkin spaces, *Illinois J. Math.* 43 (1999), 733-751.
- [9] W. Rudin: Analytic functions of class H^p , *Trans AMS*, 78 (1955), 46-66.
- [10] W. Rudin: *Function theory in polydisks*, Benjamin, New York, 1969.
- [11] R. F. Shamoyan, O. Mihić: On some inequalities in holomorphic function theory in polydisk related to diagonal mapping, *Czechoslovak Mathematical Journal* 60(2) (2010), 351-370.
- [12] R. F. Shamoyan, O. Mihić: Analytic classes on subframe and expanded disk and the \mathcal{R}^s differential operator in polydisk, *Journal of Inequalities and Applications*, Volume 2009, Article ID 353801, 22 pages.
- [13] Songxiao Li, R. F. Shamoyan: On some properties of a differential operator on the polydisk, *Banach Journal of Math. Analysis*, v.3, n.1, (2009), 68-84.
- [14] W. Xu: Distances from Bloch functions to some Möbius invariant function spaces in the unit ball of \mathbb{C}^n , *J. Funct. Spaces Appl.*, v.7, n.1, (2009), 91-104.
- [15] R. Zhao: Distances from Bloch functions to some Möbius invariant spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 33 (2008), 303-313.
- [16] K. Zhu: *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Graduate Texts in Mathematics, 226. Springer-Verlag, New York, 2005.

Romi Shamoyan
Bryansk University, Bryansk, Russia.

Olivera Mihic
Fakultet organizacionih nauka, Jove Ilića 154, Belgrade, Serbia.
e-mail: rshamoyan@yahoo.com, oliveradj@fon.rs

Precubiertas de anillos

Rafael Parra, Carlos Parra, J. L. Herrera, M. Escalona Morán

Resumen. En este trabajo se introduce el concepto de precubiertas sobre la clase de los anillos asociativos con unidad. Se estudia en particular el caso de los cuerpos, como clase importante desde el punto de vista álgebra - geométrico.

Abstract. This paper introduces the concept of pre-cover on the class of associative rings with unity. We study in particular the case of fields, as an important class from the point of view algebra-geometry.

1 Introducción

Es bien conocido que todo módulo sobre un anillo R tiene una envoltura inyectiva [1]. Desde el punto de vista categórico, los módulos proyectivos e inyectivos son objetos duales, pero la gran diferencia que existe entre las categorías R -mod de módulos sobre R y su categoría opuesta $R - \text{Mod}^{\text{op}}$, no permite dualizar el resultado de Baer. El concepto clásico de envoltura inyectiva y cubierta proyectiva de un módulo se extendió con la introducción de las envolturas y cubiertas con respecto a una clase arbitraria de objetos en una categoría dada, a partir de los trabajos de Enochs [3]. Más precisamente, dado un anillo R y \mathcal{F} una familia de R -módulos, se dice que el R -módulo M tiene una \mathcal{F} -envoltura si existe un homomorfismo $\phi : M \rightarrow F$ con $F \in \mathcal{F}$ para el cual se cumplen dos propiedades,

1. Cualquier diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & F \\ & \searrow & \vdots \\ & & F' \end{array}$$

donde $F' \in \mathcal{F}$ puede ser completado.

2. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & F \\ & \searrow \phi & \downarrow \text{dotted} \\ & & F \end{array}$$

puede ser completado sólo por automorfismos de F .

Si sólo se satisface la primera propiedad, entonces se dice que $\phi : M \rightarrow F$ es una \mathcal{F} -(pre)envoltura. Dualmente se pueden definir una \mathcal{F} -(pre)cubierta y una \mathcal{F} -cubierta de un R -módulo M . Más recientemente, Parra y Saorin [5] estudiaron las \mathcal{F} -preenvolturas en la categoría \mathcal{C} de anillos, cuando \mathcal{F} es una clase importante de anillos conmutativos. Dicho trabajo junto con los artículos [2] y [4] motivaron de manera significativa el estudio de los objetos duales, como lo son las precubiertas en una subclase importante de los anillos conmutativos, los cuerpos.

2 \mathcal{F} -Precubiertas

Sea R un anillo conmutativo con unidad y \mathcal{C} una clase de anillos. Motivado en [5] introduciremos la definición de \mathcal{C} -precubiertas para un anillo R y estudiaremos el caso particular cuando dicha clase es la clase de los cuerpos la cual denotaremos por \mathcal{F} .

Definición 1. Sea R un anillo y \mathcal{C} una clase de anillos, un homomorfismo de anillos $\varphi : C \rightarrow R$, donde $C \in \mathcal{C}$, es una \mathcal{C} -precubierta de R si para cualquier homomorfismo $\psi : C' \rightarrow R$, donde $C' \in \mathcal{C}$, existe un homomorfismo $\theta : C' \rightarrow C$ tal que $\psi = \varphi \circ \theta$

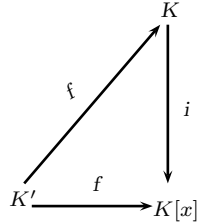
$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow \theta & \downarrow \varphi \\ C' & \xrightarrow{\psi} & R \end{array}$$

En este trabajo estudiaremos algunas propiedades de anillos conmutativos que tengan \mathcal{F} -precubierta.

Ejemplo 1. Sea $K \in \mathcal{F}$ y consideremos la inclusión $K \xrightarrow{i} K[x]$.

Veamos que $K \xrightarrow{i} K[x]$ es una \mathcal{F} -precubierta de $K[x]$; en efecto, sea $f : K' \rightarrow K[x]$ un homomorfismo de anillos, donde $K' \in \mathcal{F}$. Notemos que

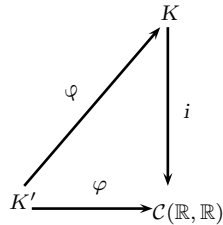
$\text{Ker } f = \{0\}$ puesto que los únicos ideales de K' son $\{0\}$ ó K' . Así, $f(K') \cong K'$ es un subcuerpo de $K[x]$; de esta manera necesariamente $f(K')$ es un subcuerpo de K . Obteniendo el siguiente diagrama conmutativo.



Ejemplo 2. Denotaremos por $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} y $K = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ es una función constante}\}$. Afirmamos que la inclusión $i : K \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es una \mathcal{F} -precubierta de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En efecto, notemos primero que $K \in \mathcal{F}$. Sea K' un cuerpo cualquiera y $\varphi : K' \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ un homomorfismo de anillos.

Toda función constatemente igual a un número racional pertenece a $\varphi(K')$. Para cada $0 \neq x \in K'$ afirmamos que $\varphi(x)$ es una función constante. En caso contrario, siendo $\varphi(x)$ una función continua obtendríamos que $\varphi(x)(\mathbb{R})$ es un intervalo no degenerado de \mathbb{R} y por ende existiría $q \in \mathbb{Q}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x)(t_0) = q$; sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = q, \forall x \in \mathbb{R}$ de este modo $\varphi(x) - f \in \varphi(K')$. Por otra parte todas las unidades de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no se anulan en ningún punto, así $\varphi(x) - f$ no es una unidad de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y siendo $\varphi(K')$ un subcuerpo de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se obtiene que $\varphi(x) - f = 0$. Por lo tanto $\varphi(x)$ es una función constante lo cual sería una contradicción.

De lo hecho anteriormente se deduce que $\varphi(K') \subseteq K$ y el siguiente diagrama conmutativo muestra que i es una \mathcal{F} -precubierta de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$



Los ejemplos anteriores muestran que existen \mathcal{F} -precubiertas no triviales, y además estos anillos tienen en común un subanillo isomorfo a un anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo. El siguiente teorema muestra que esta observación no es un caso aislado.

Teorema 1. Si $\varphi : K \rightarrow R$ es una \mathcal{F} -precubierta de R entonces R es un cuerpo o R contiene una copia isomorfa de $K[x]$

Prueba. Notemos $\varphi(K) \cong K$; llamemos $K' := \varphi(K)$, así $K' \subseteq R$. Supongamos que R no es un cuerpo, luego existe $\alpha \in R$ tal que $\alpha \notin K'$.

Afirmamos que no existe $p(x) \in K'[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$; En caso contrario existiría $q(x) \in K'[x]$ irreducible sobre K' tal que $q(\alpha) = 0$. Si consideramos $I = (q(x))$ obtenemos que I es un ideal primo de $K'[x]$ y al ser $K'[x]$ un dominio de ideales principales se tiene que I es un ideal maximal de $K'[x]$; es claro que $K'[x]/I \in \mathcal{F}$, definamos

$$\begin{aligned}\psi : K'[x]/I &\longrightarrow R \\ \psi(I + r(x)) &= r(\alpha)\end{aligned}$$

Notemos que ψ está bien definido puesto que si $I + r_1(x) = I + r_2(x)$ entonces $r_1(x) - r_2(x) \in I$ y por tanto $r_1(\alpha) - r_2(\alpha) = 0$;

$$r_1(\alpha) = r_2(\alpha)$$

luego por hipótesis existe $\theta : K'[x]/I \rightarrow K$ tal que $\psi = \varphi \circ \theta$.

Así

$$\begin{aligned}\psi(I + x) &= \varphi \circ \theta(I + x) \\ \alpha &= \varphi(\theta(I + x)) \in \varphi(K) = K'\end{aligned}$$

lo cual es contradictorio.

Definamos ahora

$$\begin{aligned}g : K'[x] &\longrightarrow R \\ g(p(x)) &= p(\alpha)\end{aligned}$$

Por lo hecho anteriormente g es un monomorfismo; así

$$g(K'[x]) \cong K'[x] \cong K[x] \quad \square$$

Corolario 1. Sea R un anillo conmutativo y $n \geq 2$ entonces $M_n(R)$ no tiene \mathcal{F} -precubierta.

Prueba. Razonemos por el absurdo, supongamos que $M_n(R)$ tiene una \mathcal{F} -precubierta así existe $K \in \mathcal{F}$ y $\varphi : K \rightarrow M_n(R)$ una \mathcal{F} -precubierta de M .

De la prueba del teorema anterior se deduce que si $\alpha \in M_n(R)$ y $\alpha \notin \varphi(K)$ entonces $p(\alpha) \neq 0, \forall p(x) \in K[x]$ (★)

Tomemos A un elemento nilpotente no nulo del anillo $M_n(R)$, luego existe $m \geq 2$ tal que $A^m = 0$ por ende A no es invertible y $A \neq 0$ de aquí es claro

lo que demuestra que $i : f(K) \hookrightarrow R$ es una \mathcal{F} -precubierta de R .

Este lema permite estudiar \mathcal{F} -precubiertas como inclusiones. El siguiente lema nos dice que si un anillo R tiene \mathcal{F} -precubiertas entonces R tiene un subcuerpo maximal.

Lema 2. Si $K \xrightarrow{i} R$ es una \mathcal{F} -precubierta de R y $K' \in \mathcal{F}$ tal que $K \subseteq K' \subseteq R$ entonces $K = K'$.

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & K \\ & & \downarrow f \\ K' & \xrightarrow{f} & R \end{array}$$

luego por hipótesis existe $\theta : K' \rightarrow K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & K \\ & \nearrow \theta & \downarrow i \\ K' & \xrightarrow{i} & R \end{array}$$

así, si $x \in K'$ entonces $x = i\theta(x) = \theta(x) \in K$ lo que demuestra que $K = K'$. \square

Lo que caracteriza los anillos que tiene \mathcal{F} -precubierta son precisamente los anillos que tiene un único subcuerpo maximal.

Agradecimiento: Al Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnología (C.D.H.C.T) de la U.L.A por su financiamiento a través del proyecto I-1214-09-05-C.

References

- [1] F. Anderson y K. Fuller, Rings and Categories of Modules. New York: Springer-Verlag. 1974.
- [2] L. Bican y B. Torrecillas, Almost precovers. Comm Algebra, 2002, 30: 477 - 487.
- [3] E. Enochs, Injective and flat covers, envelopes and resolvents, Israel J. Math., 1981, 39, 189 - 209.
- [4] M. Lixin y D. Nanqing, On almost precovers and almost preenvelopes, Acta Mathematica Scientia 2006, 26B (3): 395-400.
- [5] R. Parra and M. Saorín, Envelopes of the commutative rings, arXiv: 0906.4357 v1 [math. AC].

Rafael Parra
Departamento de Cálculo, Escuela Básica
Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. 5101, Mérida Venezuela

Carlos Parra
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes. 5101, Mérida Venezuela

J. L. Herrera
Departamento de Cálculo, Escuela Básica
Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. 5101, Mérida Venezuela

M. Escalona Morán
Departamento de Cálculo, Escuela Básica
Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. 5101, Mérida Venezuela

e-mail: rafaelparra@ula.ve, carlosparra@ula.ve, jherrera@ula.ve, angele@ula.ve

Geometría y Topología

Santiago R. Simanca

Contenido

1	Introducción	113
2	Geodésicas y curvatura	115
2.1	Geodésicas en superficies	116
2.2	Curvatura	126
2.3	Superficies Riemannianas: geodésicas y curvatura	134
2.3.1	Superficies Riemannianas	140
2.3.2	Curvatura	144
2.3.3	El Laplaciano de una métrica: la curvatura	147
3	Curvatura y Topología	150
3.1	La curvatura total sobre triángulos suficientemente pequeños . .	150
3.2	La curvatura total: el teorema de Chern-Gauss-Bonnet	155
4	Subvariedades y Homología	159
4.1	La norma L^2 de la segunda forma fundamental de una inmersión	166
4.2	Ejemplos de puntos críticos	169
4.3	La variedad $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ con la métrica producto	170
4.4	El aspecto ideal de una clase de homología	172
5	Breve perspectiva histórica	174

1 Introducción

Los objetivos en estas notas son el introducir la Geometría Riemanniana a través del estudio de superficies, desarrollando la intuición métrica usando modelos elementales, el relacionar el promedio de la curvatura Gaussiana con la topología de la variedad para así motivar el estudio de propiedades topológicas usando métodos geométricos, y el proponer un modelo métrico para el estudio de representantes canónicos de clases de homología enteras dentro de una variedad Riemanniana ambiente fija. Un buen conocimiento de cálculo diferencial e integral

por parte del lector debería ser suficiente para seguir con detalle la exposición. Advertimos de antemano que su última parte es aún trabajo en desarrollo, y lo que presentamos aquí al respecto es inédito.

Inclusive al considerar los aspectos más elementales de nuestro trabajo, esperamos hacer que el lector adopte siempre un punto de vista global. La Geometría Riemanniana tiene una característica particular: si bien los conceptos básicos que la definen son de naturaleza local, la descripción topológica de la variedad ambiente a través de métodos geométricos requiere entender la combinación de las contribuciones métricas locales sobre el espacio entero, y como tales, influyen y son influidas por su topología. Así pues, si se desea estudiar la topología usando recursos geométricos, debemos hacer un análisis global promediando las propiedades locales. En nuestras notas hemos querido facilitar la transición hacia esa manera de pensar el asunto.

Así, comenzamos discutiendo el problema clásico de encontrar la curva de menor longitud entre dos puntos dados, problema evidentemente de naturaleza global, e introducimos inmediatamente después el concepto de curvatura usando ecuaciones diferenciales parciales, mucho antes de demostrar que este coincide con la definición tensorial usual.

En el caso de la curvatura, tenemos un motivo especial para presentarla de esa manera. Podemos pensar ingenuamente al análisis global como el estudio de las soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales parciales en el espacio entero. Luego, si nos damos una función de curvatura, tal definición nos produce una ecuación diferencial parcial en la superficie donde la métrica es la incógnita que nos proponemos encontrar. Reflexionando así, llegamos inmediatamente a un problema típico de ese análisis global al cual deseamos llevar al lector. Y aún más, prácticamente lo resolvemos para el caso de curvatura constante, si bien lo hacemos tan solo cuando la variedad donde se trabaja es una superficie.

La primera parte de nuestras notas están basadas en una serie de seminarios que dimos en Guanajuato, México, algunos años atrás, recolectados sumariamente en [17] y expandidos notablemente en nuestra presentación en la XIII Escuela de Geometría Diferencial, San Paulo, 2004. La presentación de esta parte ha sido revisada nuevamente en esta ocasión para adaptarla a los objetivos específicos que ahora tenemos, hecho que en algunas porciones ha requerido una expansión del tema. En particular, después del estudio detallado de los modelos de superficies Riemannianas de curvatura constante negativa, positiva, ó nula, introducimos los conceptos de conexión de Levi-Civita, transporte paralelo, y tensor de curvatura. Una vez desarrollados detalles de tipo técnico relativos a las coordenadas geodésicas polares y normales, demostramos el teorema de Gauss, resultado que nos dice el que dada una pareja de puntos suficientemente cercanos uno al otro, la geodésica más corta que los une realiza la distancia entre los puntos en cuestión.

La segunda parte es usada para demostrar el teorema de Chern-Gauss-

Bonnet para superficies. Si bien el método usado refleja la evolución histórica del tema, dejamos explícitamente sugerida la idea que subyace la generalización del resultado a variedades orientables compactas de dimensión arbitraria.

La tercera parte tiene su punto de partida en una identidad clásica también debida a Gauss. La usamos para definir un funcional métrico natural que intenta seleccionar ciertas subvariedades como representantes canónicos de una clase de homología entera prefijada con anterioridad. La variedad ambiente se supone provista de una métrica Riemanniana fija, y las subvariedades son deformadas dentro de ella en el conjunto de representantes de la clase de homología, dándoles a cada una de las subvariedades en este conjunto la métrica inducida por esa del ambiente. Los mínimos del funcional de menor volumen son los deseados representantes canónicos, en caso de que tales existan.

Terminamos incluyendo un esbozo histórico de la evolución de los temas estudiados, sobre todo aquellos en la primera parte, y haciendo referencias a los artículos originales y algunos otros más. En caso en que el lector así lo desee, las referencias más contemporáneas pueden ser usadas como punto de partida para investigaciones adicionales.

Estas notas fueron preparadas en los primeros meses del año 2009 para ser usadas en dos minicursos con el mismo tema, uno dictado en la Escuela de Análisis Geométrico organizada en Granada, España, del 1 al 5 de Junio, y el otro en el Encuentro de Matemáticas en honor al Profesor Lázaro Recht organizado en la Universidad Simón Bolívar, Sartenejas, Venezuela, del 15 al 19 de Junio del mismo año, respectivamente. Fué para mí un gran placer el participar en estos eventos, y quiero ofrecer mi agradecimiento a los organizadores por la brillante labor ejecutada en ambos casos. Por razones personales, fué para mi motivo de satisfacción el poder contribuir al rendimiento de un merecido homenaje al profesor Recht, en reconocimiento de una labor académica de años que ha influenciado para bien el desarrollo de las matemáticas, y el desarrollo intelectual de muchos, entres los que me cuento yo mismo. Aspiro que a que la publicación de estas notas contribuya un tanto a mantener en vivo ese desarrollo, y que estas puedan servir de inspiración a las generaciones más recientes.

2 Geodésicas y curvatura

Comenzaremos nuestra discusión considerando el caso en el cual la superficie está inmersa en \mathbb{R}^3 y la proveemos con la métrica en ella que la estructura Euclideana induce. Usando los conceptos naturales que resultan en esta situación como motivación, eventualmente pasamos al caso general y definimos la noción de superficie Riemanniana, sus curvas geodésicas, y la curvatura seccional de su métrica.

2.1 Geodésicas en superficies

Aunque nos parezca un hecho trivial, cuando consideramos una superficie S contenida en \mathbb{R}^3 , ella adquiere una estructura métrica inducida por la métrica Euclidiana en el espacio ambiente. Esto es tautológicamente obvio: dados vectores X, Y tangentes a S en el punto p , podemos pensarlos como vectores en \mathbb{R}^3 basados en el punto en cuestión, y definir su producto interno por

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

En particular, la norma de X en p queda definida por la expresión

$$\|X\|_p = \langle X, X \rangle_{\mathbb{R}^3}^{\frac{1}{2}}.$$

Con esto en mente, podemos ahora proponernos el problema de medir la longitud de una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en S , es decir, una curva tal que $\gamma(t) \in S$ para cada t en su dominio de definición. La solución a este problema es relativamente simple. Si consideramos un arco de la curva γ infinitesimalmente pequeño, entre t y $t + dt$, la longitud dl de este arco, a la cual llamaremos elemento diferencial de longitud, será dada por $dl = \|\dot{\gamma}\|_{\gamma(t)} dt$. La longitud de la curva entre los puntos $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ es la suma de estas contribuciones infinitesimales de t_0 a t_1 , ó integral

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} dl = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|_{\gamma(t)} dt. \quad (1)$$

Dicha expresión tiene sentido siempre que sepamos medir la longitud del vector velocidad de la curva, independientemente si la superficie está contenida ó no en el espacio Euclidiano. Observemos que para poder medir sus longitudes, necesitamos considerar curvas que sean diferenciables por lo menos una vez. En todo nuestro trabajo aquí, las curvas que consideraremos serán al menos funciones continuas.

Ejemplo 1. Las curvas $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t)$ y $\gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t, t)$ yacen en el cilindro $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$, comienzan en $p = (1, 0, 0)$ cuando $t = 0$, y pasan por el punto $q = (1, 0, 2\pi)$ cuando $t = 2\pi$. Sus longitudes entre esos dos puntos son

$$L(\gamma_1) = 2\sqrt{2}\pi \quad \text{y} \quad L(\gamma_2) = 2\sqrt{5}\pi,$$

respectivamente. ¿Por qué es $L(\gamma_1)$ menor que $L(\gamma_2)$? □

Sabiendo el cómo medir las longitudes de curvas en una superficie, podemos entonces formularnos problemas de una mayor envergadura. Entre otros, si nos damos un par de puntos p y q en S , podemos preguntarnos si existen curvas sobre la superficie que conectan a dichos puntos, y de ser así, si dentro del conjunto de tales curvas existe alguna cuya longitud sea mínima.

La primera parte del problema precedente es resoluble con facilidad. A veces ciertos puntos de S no pueden ser conectados por curvas continuas sobre la superficie, como es el caso, por ejemplo, de la superficie en \mathbb{R}^3 definida por la ecuación $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, un hiperboloide de dos hojas en el cual los puntos de una de ellas no pueden conectarse continuamente con los puntos de la otra. Por ese motivo, consideraremos solamente superficies conexas, ó en el peor de los casos, consideraremos apenas una componente conexa de la superficie dada. Si p y q están en la misma componente, siempre existirán curvas continuas que los conectan.

Bajo esta hipótesis, la segunda parte del problema adquiere sentido: entre las curvas que conectan los dos puntos p y q , podemos preguntarnos si existe una cuya longitud sea la menor posible. Tal curva será, por definición, una *curva geodésica* que conecta a p y a q . De un modo mas general, definimos como una geodésica entre p y q a cualquier curva en S que conecte a dichos puntos y que sea un punto crítico del funcional longitud descrito en (1).

Antes de analizar algunos ejemplos, observemos que la solución al problema de cómo medir longitudes de curvas en una superficie S nos abre un gran espectro de posibilidades para estudiar a S . De hecho, puesto que dados puntos p y q en S existen curvas que los conectan y cuyas longitudes sabemos medir, podemos definir la función

$$d_S(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma), \quad (2)$$

calculando el ínfimo sobre todas las curvas en S que conectan a los puntos dados. Siendo $L(\gamma)$ acotada inferiormente, $d_S(p, q)$ está bien definida, y claramente satisface las siguientes propiedades:

- a) $d_S(p, q) \geq 0$, y es igual a cero si $p = q$;
- b) $d_S(p, q) = d_S(q, p)$;
- c) $d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$.

Con la excepción de una propiedad que queda aún por ser verificada, d_S define una noción de distancia en la superficie S . La propiedad en cuestión es el recíproco de la última propiedad indicada en (a): $d_S(p, q)$ puede anularse solamente cuando $p = q$.

La función d_S dota a la superficie S de la estructura de espacio métrico. Podemos así preguntarnos si esta estructura métrica determina de alguna manera, entre todas las curvas sobre S , cuales son las geodésicas. La respuesta es sí, y está codificada en la *desigualdade triangular* (c). Porque si definimos una noción de triángulo sobre la superficie cuyos lados tengan longitudes que satisfagan esta desigualdad, los arcos de curvas que limitan a tales triángulos serán necesariamente segmentos de curvas geodésicas en el espacio métrico (S, d_S) .

Más aún, la métrica d_S induce una topología en S , y es natural entonces el preguntarnos también si dicha topología coincide con la topología que S tenía de partida. De ser así, esperaríamos el que fuese posible estudiar propiedades topológicas de S adoptando un punto de vista métrico. Véamos.

Ejemplo 2. ¿Cuáles son las geodésicas de un plano con la métrica Euclidiana?

En primer lugar, podemos cambiar las coordenadas, de ser necesario, de modo tal que el plano en cuestión sea el plano xy . Y en lo se refiere a esta problema, identificaremos a dicho plano con \mathbb{R}^2 provisto con su métrica usual, olvidándonos de que está contenido en \mathbb{R}^3 . Hacemos esto sin perder generalidad porque las métricas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 son compatibles. La noción de distancia entre puntos $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$ del plano está dada por $d(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$.

El uso de la distancia d es un hecho clásico, y se remonta unos 25 siglos atrás al estudio de los triángulos, conjuntos limitados por tres segmentos de rectas. Las longitudes de los lados de un triángulo arbitrario es la distancia entre sus correspondientes vértices, y tales longitudes satisfacen la desigualdad triangular. Esto basta para concluir que los segmentos de líneas rectas son curvas geodésicas en el plano.

Pues dados puntos p y q en \mathbb{R}^2 , existen curvas que los conectan, y como sus longitudes están acotadas inferiormente, podemos también definir $d_S(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)$. Supongamos que este ínfimo es alcanzado por alguna curva $\gamma(t)$. Si tal curva no es un segmento de recta, estudiémosla en una porción suficientemente pequeña de ella, digamos entre $t = a$ y $t = b$, donde esta disparidad con un segmento de recta se manifiesta. Consideremos los puntos $p_0 = \gamma(a)$ y $q_0 = \gamma(b)$, y un punto intermedio $r = \gamma(t)$ para algun $t \in (a, b)$. Como γ no es un segmento de recta en ese intervalo, los puntos p_0 , q_0 y r definen un triángulo. Si el intervalo $[a, b]$ tuviese medida muy pequeña, el segmento de recta entre p_0 y r tendría una longitud l_1 aproximadamente igual a la longitud de γ entre dichos puntos. De manera similar, el segmento de recta entre r y q_0 tendría longitud l_2 aproximadamente igual a la longitud de γ entre tales puntos. Consecuentemente, la longitud de γ entre p_0 y q_0 es aproximadamente igual a $l_1 + l_2$, y la aproximación es cada vez mejor si la medida del intervalo $[a, b]$ se torna cada vez menor. Luego, si l es la longitud del segmento de recta entre p_0 y q_0 , usando la desigualdad triangular podemos concluir que $l < l_1 + l_2$. Así, obtendríamos una curva entre p y q cuya longitud sería estrictamente menor que $L(\gamma)$ si sustituyésemos a la curva γ en el intervalo $[a, b]$ por el segmento de recta que conecta a los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$. Más esto contradiría el hecho de que γ realiza la distancia d_S entre p y q , y por lo tanto, no es posible el encontrar una curva entre tales puntos de longitud menor que la longitud de γ . Luego, γ es una recta, y $d_S(p, q) = L(\gamma) = d(p, q)$. \square

Ejemplo 3. Ataquemos ahora el problema resuelto en el ejemplo anterior usando tecnicas de Cálculo Diferencial. Nos damos la función longitud de γ ,

$L(\gamma)$, para curvas γ s que conectan a p y q , y nos proponemos encontrar su mínimo. Hacemos esto encontrando los puntos críticos de L , es decir, aquellos de sus argumentos donde la derivada de L es cero. ¿Qué queremos decir con esto? Puesto que L es una función de γ , la interpretación de esta afirmación debe hacerse con un cierto cuidado.

Comencemos aclarando un poco el dominio de la función L , el cual hemos ignorado hasta ahora. Este está contenido en el conjunto de curvas que conectan a p y q . No perdemos generalidad si suponemos que las curvas conectando a dichos puntos lo hacen en tiempo igual a 1, comenzando en p cuando $t = 0$ y terminando en q cuando $t = 1$. Y puesto que deseamos calcular sus longitudes, suponemos adicionalmente que estas curvas son diferenciables con respecto a t . Ó dicho de otra manera, ellas tienen vector velocidad bien definido en cada punto. También necesitaremos que tengan vector aceleración, para lo que se requiere la existencia de derivadas segundas. Terminamos así considerando al conjunto

$$\mathcal{C}_{pq} = \{\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2 : \gamma \text{ es una función } C^2, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$$

como el dominio de la función L ,

$$L : \mathcal{C}_{pq} \mapsto \mathbb{R},$$

de tal manera que si representamos a γ en coordenadas como $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, tenemos que

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2} dt.$$

¿Cómo podemos calcular la derivada de L ? Lo hacemos reduciendo dicho cálculo al cálculo de la derivada de una función de variable real, como aquellas encontradas en el estudio de funciones elementales. Véamos.

Sea $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función arbitraria de tipo C^2 y tal que $h(0) = h(1) = (0, 0)$. Para un parametro real τ y una curva γ en \mathcal{C}_{pq} , la función $\gamma_\tau = \gamma + \tau h$ también será un elemento de \mathcal{C}_{pq} , es decir, una curva de tipo C^2 que conecta a los puntos p y q .

No parece ser el que hayamos ganado mucho, mas el argumento aún no termina. Supongamos que γ sea un punto crítico de L , y mas específicamente, supongamos que γ sea un mínimo. Entonces $L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma})$ para cualquier curva $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}_{p,q}$. En particular, para una h arbitraria como esa del párrafo anterior, tendremos que $L(\gamma) \leq L(\gamma_\tau)$, y la función $\tau \mapsto L(\gamma_\tau)$ tendrá un mínimo local en $\tau = 0$. Consecuentemente, su derivada con respecto a τ deber ser cero cuando se le evalua en $\tau = 0$.

Como función de τ , $L(\gamma_\tau)$ es una función como aquellas estudiadas en cursos de Cálculo Diferencial, una función de una variable real. Determinaremos ahora

su derivada, y usaremos el resultado para deducir la conclusión apropiada con respecto al problema de minimización que originalmente nos propusimos.

Usemos la notación $\dot{\gamma}$ para referirnos a la derivada con respecto a t , el argumento de la curva γ (y también de h). Por la regla de la cadena, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} L(\gamma + \tau h) |_{\tau=0} &= \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d(\gamma_1 + \tau h_1)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(\gamma_2 + \tau h_2)}{dt}\right)^2} dt |_{\tau=0} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} (\dot{\gamma}_1 \dot{h}_1 + \dot{\gamma}_2 \dot{h}_2) dt. \end{aligned}$$

Ahora podemos integrar por partes. Puesto que $h(0) = h(1) = (0, 0)$, los términos de borde se anulan, y obtenemos como resultado

$$\frac{d}{d\tau} L(\gamma_\tau) |_{\tau=0} = - \int_0^1 \left(h_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}_1}{\|\dot{\gamma}\|} \right) + h_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}_2}{\|\dot{\gamma}\|} \right) \right) dt.$$

Para que $\gamma = \gamma_\tau |_{\tau=0}$ sea un mínimo de L , la expresión anterior debe ser idénticamente nula para cualquier $h = (h_1, h_2)$ del tipo considerado. Escojamos a h de la forma

$$h = \eta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right),$$

donde $\eta(t)$ es una función no negativa en $[0, 1]$ la cual se anula en 0 y en 1, y que es idénticamente igual a 1 en *casi toda* la porción restante del intervalo. Por la positividad del integrando, concluimos que γ es un punto crítico sí, y solo sí,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right) = 0. \quad (3)$$

Reescribamos el resultado precedente con respecto a un parámetro más conveniente que el parámetro t . Después de todo, t fué escogido arbitrariamente y, por conveniencia, podemos cambiarlo a nuestro gusto. Así, consideremos el parámetro *longitud de arco* s , relacionado con t por la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

Luego, como función de s , el vector velocidad de γ tiene norma 1. De hecho,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|},$$

y la ecuación (3) resulta equivalente a

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} = 0.$$

En otras palabras, como función de la longitud de arco, $\gamma(s)$ tiene aceleración nula, y por lo tanto, debe ser una función lineal de s . Puesto que conecta los puntos p y q , si l es su longitud entre tales puntos, tendremos que

$$\gamma(s) = \frac{l-s}{l}p + \frac{s}{l}q.$$

Observemos que $\dot{\gamma}(s) = (q-p)/l = (q-p)/\|q-p\|$. Y observemos también que en este caso, la unicidad del punto crítico del funcional L en (1) es suficiente para concluir que la curva γ es en realidad un mínimo.

Las geodésicas del plano que pasan a través de un punto dado nunca se vuelven a tocar. Por otro lado, dada una geodésica y un punto fuera de ella, existe una única geodésica que contiene a ese punto y que no intersecta a la geodésica original. \square

Ejemplo 4. ¿Cuáles son las geodésicas de la esfera de radio a ? Responderemos a esta pregunta de una manera muy simple, usando una vez más el argumento del Ejemplo 2.

El radio a caracteriza a la esfera de una manera esencial, y por estar contenida en \mathbb{R}^3 , la esfera hereda una noción de distancia inducida por la noción de distancia en ese espacio. De hecho, aprendemos sobre esta noción muy rápidamente en cursos de Geometría Euclidiana. Porque dados dos puntos p y q de la esfera de radio a , la distancia entre ellos es igual a $a\theta$, donde θ es el ángulo que sustenta el arco de p a q sobre el *meridiano* definido por esos puntos. Llamaremos meridiano de una esfera a cualquier círculo del mismo radio y centro que la esfera dada. Ellos resultan de intersectar la esfera con planos que contienen a su centro. Dos puntos no antipodales de la esfera determinan un meridiano de forma única, pues ellos, junto con el centro, determinan de manera única un plano.

De este modo, sabemos ya medir las distancias entre puntos de una esfera dada. Ahora podemos definir un triángulo esférico. Comenzaremos por decir que tres puntos de la esfera p , q y r se dicen no colineales si los tres no se encuentran simultáneamente sobre el mismo meridiano. Dados tales puntos, el triángulo esférico que ellos definen es el conjunto de los puntos de la esfera limitado por los arcos de meridianos determinados por p y q , q y r , y r y p , respectivamente.

Las longitudes de los lados de triángulos esféricos satisfacen la desigualdad triangular. En consecuencia, repitiendo el argumento del Ejemplo 2, podemos concluir que las geodésicas de la esfera son los segmentos de meridianos.

Observemos que las geodésicas esféricas que pasan por un punto se cruzan otra vez en el punto antipodal. Y dada una geodésica y un punto exterior a ella, no existe ninguna otra geodésica que contenga a dicho punto y que no intersecte a la geodésica inicial. \square

Ejercicio 1. Convenzase que los triángulos esféricos satisfacen la desigualdad triangular (relacione este hecho con las propiedades de los conos sólidos sustentados por los triángulos esféricos). \square

Ejercicio 2. Demuestre que las geodésicas esféricas son segmentos de meridianos usando un principio variacional como aquel del Ejemplo 3. ¿Cuál sistema de coordenadas sería conveniente utilizar? ¿Cómo debe ser el vector aceleración de una geodésica esférica en relación a la propia esfera? \square

Ejemplo 5. Finalmente, consideraremos un caso que nos será de gran utilidad. Por ahora nos ilustrará la dependencia estrecha que existe entre la noción de geodésica y la métrica en la superficie en cuestión.

Por razones históricas, imitaremos la notación empleada en Física. Consideremos el conjunto de puntos $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ que satisfacen la relación $x^2 + y^2 - t^2 = -a^2$ para algun número real $a > 0$ dado:

$$H_a = \{(x, y, t) : x^2 + y^2 - t^2 = -a^2\}.$$

Como conjunto, H_a yace dentro de \mathbb{R}^3 , mas le proveeremos de una estructura métrica distinta a aquella inducida por la métrica Euclidiana en \mathbb{R}^3 . Véamos.

Dar una métrica en una superficie es lo mismo que dar una manera de medir el producto interno de vectores tangentes a la superficie en cualquier punto de ella. Si $U = u_1\partial_x + v_1\partial_y + w_1\partial_t$ y $V = u_2\partial_x + v_2\partial_y + w_2\partial_t$ son vectores tangentes a \mathbb{R}^3 , definimos una forma bilineal Q por la expresión

$$Q(U, V) = u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2.$$

A \mathbb{R}^3 provisto de una tal estructura lo llamaremos *espacio-tiempo*, terminología usada por los Físicos, y análoga al concepto de espacio Euclidiano, término usado por los Matemáticos para referirse a \mathbb{R}^3 provisto de su estructura métrica usual. Observemos que la forma bilineal usual de \mathbb{R}^3 y Q no son equivalentes, pues las correspondientes matrices simétricas asociadas a las dos formas bilineales yacen en diferentes componentes, una en el conjunto de matrices de determinante negativo, y la otra en el conjunto de determinante positivo.

Usando esta forma cuadrática Q , el conjunto H_a se torna en la Q -esfera de radio $\sqrt{-a^2}$.

La forma bilineal Q no es un producto interno porque, en general, $Q(U, U)$ no es mayor ó igual a cero. De hecho, podemos clasificar los vectores tangentes en tres tipos: decimos que U es un vector *espacial* si $Q(U, U) > 0$; U es un vector *temporal* si $Q(U, U) < 0$; y U es un vector *nulo* ó en el *cono de luz* si $Q(U, U) = 0$.

Daremos a H_a la métrica que la forma bilineal Q induce. Es decir, definiremos el producto interno de vectores tangentes a H_a en un punto cualquiera por la expresión

$$\langle U, V \rangle \stackrel{def}{=} Q(U, V). \quad (4)$$

Es evidente que antes de proceder debemos verificar algo de cuidado, pues la forma bilineal Q no define un producto interno en \mathbb{R}^3 , y por ende no está claro el por qué la expresión anterior define un producto interno en H_a . Para poder concluir eso, todos los vectores no triviales tangentes a H_a tendrían que ser espaciales, y eso al menos no es un hecho obvio.

No, no es obvio, mas podemos verificar que es así. Consideremos un vector tangente a H_a en el punto (x, y, t) :

$$U = u\partial_x + v\partial_y + w\partial_t.$$

La condición de tangencialidad de U en $(x, y, t) \in H_a$, nos permite concluir que

$$xu + yv - tw = 0,$$

y consecuentemente,

$$\begin{aligned} \langle U, U \rangle &= uu + vv - ww \\ &= u^2 + v^2 - \frac{(xu + yv)^2}{t^2} \\ &\geq \frac{t^2(u^2 + v^2) - (u^2 + v^2)(x^2 + y^2)}{t^2} \\ &= \frac{a^2}{t^2}(u^2 + v^2), \end{aligned}$$

resultado para el cual hicimos uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La cota inferior de la última expresión solamente puede ser cero si $u = v = 0$, y en tal caso, w es también cero. En otras palabras, $\langle U, U \rangle \geq 0$, y la igualdad 0 se alcanza solamente cuando U es el vector nulo. Así pues, (4) define un producto interno en el espacio tangente a H_a en cada uno de sus puntos.

Ahora que sabemos el cómo medir la longitud de un vector tangente a una curva en cada uno de sus puntos, usando (1) podemos calcular la longitud de la curva misma. ¿Cuáles son entonces las curvas que minimizan este funcional en H_a ? La respuesta es sencilla, y la daremos usando un método variacional.

Puesto que H_a no es conexo, consideraremos su componente H_a^+ formada por los puntos (x, y, t) de este conjunto para los cuales $t > 0$. Y llamaremos s al parámetro de la curva $\gamma(s) = (x(s), y(s), t(s))$ que conecta a dos puntos dados p y q en H_a^+ . La expresión f indicará la derivada de la función f con respecto a s , y por ahora, tomaremos el parámetro s de tal manera que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Así pues, si $h = (h_1(s), h_2(s), h_3(s))$ es cualquier función tal que

$$x(s)h_1(s) + y(s)h_2(s) - t(s)h_3(s) = 0, \tag{5}$$

y tal que $h(0) = h(1) = (0, 0, 0)$, entonces $\gamma_\tau = \gamma + \tau h$ define una deformación infinitesimal de la curva γ en H_a a través de curvas que conectan a p con q .

De tal manera que si γ es un punto crítico de (1), luego de una integración por partes, obtendremos que

$$0 = \frac{d\gamma_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \int_0^1 \left(h_1 \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{x}}{\|\dot{\gamma}\|} \right) + h_2 \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{y}}{\|\dot{\gamma}\|} \right) - h_3 \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{t}}{\|\dot{\gamma}\|} \right) \right) ds,$$

donde $\|\dot{\gamma}\|$ es calculada usando la forma bilineal (4).

Reparametricemos ahora la curva como lo hicimos en el Ejemplo 3, y usemos la longitud de arco como parámetro al cual llamaremos s también para evitar cambios notacionales innecesarios. En ese caso, $\|\dot{\gamma}\| = 1$, y usando el multiplicador de Lagrange (5), la ecuación anterior, que debe ser válida para todo tal h , implica que $\ddot{\gamma} := \frac{d\dot{\gamma}}{ds} = \lambda\gamma$ para alguna función a valores reales λ . En otras palabras, el vector aceleración de una curva crítica debe ser proporcional al vector posición. Ahora bien, puesto que $\langle \gamma, \gamma \rangle = -a^2$, tenemos que $\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = 0$, y por lo tanto, $\langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle + \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0 = -\lambda a^2 + 1$. Así pues, λ es constante e igual a $1/a^2$. Luego, la ecuación geodésica, escrita con respecto a la longitud de arco, está dada por

$$\ddot{\gamma} = \frac{d\dot{\gamma}}{ds} = \frac{1}{a^2}\gamma,$$

y su solución está dada por la curva

$$\gamma(s) = p \cosh\left(\frac{s}{a}\right) + av \sinh\left(\frac{s}{a}\right),$$

donde el vector velocidad inicial v , el cual satisface $\langle v, v \rangle = 1$, se escoge de tal manera que $\gamma(l) = q$ para cierto número real positivo l , la longitud de γ entre p y q . Vemos así que

$$v = \frac{a^2 q + \langle p, q \rangle p}{a \sqrt{\langle p, q \rangle^2 - a^4}},$$

y que la longitud de γ entre los puntos p y q está dada por

$$l = a \log \left(\frac{-\langle p, q \rangle + \sqrt{\langle p, q \rangle^2 - a^4}}{a^2} \right).$$

En estas expresiones, $\langle p, q \rangle = Q(p, q)$ cuando vemos a p y a q como vectores en el espacio-tiempo.

Recordemos que las geodésicas esféricas se pueden obtener como intersecciones de la esfera con los planos que pasan por su centro. Las geodésicas de la pseudo-esfera H_a se pueden obtener de manera similar, como intersecciones con planos. Sean p y q puntos distintos en H_a^+ . Ellos, junto con $(0, 0, 0)$ determinan de manera única un plano. La geodésica en H_a que conecta a p y a q es un segmento de curva que se obtiene intersectando tal plano con H_a . Tal afirmación se puede demostrar a partir de la expresión para la geodésica $\gamma(s)$ encontrada

anteriormente, la cual, para cada valor de s , es una combinación lineal de los vectores p y q que yacen en H_a .

La pseudo-esfera H_a tiene una realización *visualmente* acotada. Consideremos el ramo H_a^+ , y sobre este la función

$$(x, y, t) \mapsto (u, v) = \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t} \right).$$

Ella define un difeomorfismo isométrico entre H_a^+ y el disco $D_a = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < a^2\}$ cuando se dota a este último de la métrica*

$$ds^2 = \frac{(1 - \frac{1}{a^2}(u^2 + v^2))(du^2 + dv^2) + \frac{1}{a^2}(udu + vdv)^2}{(1 - \frac{1}{a^2}(u^2 + v^2))^2}, \quad (6)$$

y las geodésicas vistas en D_a son segmentos de rectas. No obstante, desde el punto de vista métrico, el disco D_a no es acotado. Su métrica (6) difiere notablemente de $du^2 + dv^2$, la estructura inducida por la métrica habitual del plano, y con ella, el borde $\partial D_a = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = a^2\}$ está a una distancia infinita de cualquiera de sus puntos interiores.

Las geodésicas en H_a se comportan de una manera interesante. Dada una y un punto exterior a ella, existe un número infinito de geodésicas a través de tal punto que no intersectan a la geodésica original. \square

Los ejemplos discutidos anteriormente tienen comportamientos radicalmente distintos. La razón de ser de esto se debe a una propiedad que estudiaremos en la próxima sección, y que ya se ha manifestado en las cosas que hemos hecho hasta ahora.

A título de ejemplo ilustrativo, consideremos la esfera \mathbb{S}^2 de radio 1, el plano Euclidiano \mathbb{R}^2 , y la pseudo-esfera H de (pseudo) radio $\sqrt{-1}$. En cada uno de estos casos, consideremos círculos y calculemos sus longitudes. Por definición, los círculos se describen dando un punto en el espacio, su centro, y un número real positivo r , su radio, y consisten del conjunto de puntos en la superficie que distan r unidades de su centro. En los tres ejemplos estudiados, las longitudes de tales círculos no dependen del punto escogido como centro, y son iguales a $2\pi \operatorname{sen} r$, $2\pi r$ y $2\pi \operatorname{senh} r$, respectivamente.

En el caso de \mathbb{S}^2 , el radio puede variar en el intervalo $(0, \pi)$, y la longitud del círculo de radio r es una función acotada que alcanza su máximo cuando

*La expresión ds^2 es una notación clásica para referirse al producto interno de vectores, de tal manera que si $U = \alpha(u, v)\partial_u + \beta(u, v)\partial_v$ y $V = \tilde{\alpha}(u, v)\partial_u + \tilde{\beta}(u, v)\partial_v$ son vectores tangentes a D_a en el punto (u, v) , su producto interno en la métrica (6) es la función

$$\frac{(1 - \frac{1}{a^2}(u^2 + v^2))(\alpha\tilde{\alpha} + \beta\tilde{\beta}) + \frac{1}{a^2}(u\alpha + v\beta)(u\tilde{\alpha} + v\tilde{\beta})}{(1 - \frac{1}{a^2}(u^2 + v^2))^2}.$$

Cuando $U = V$ es el vector tangente a una curva, la raíz cuadrada de esta expresión, es decir, ds , produce el elemento diferencial de longitud de la curva.

$r = \pi/2$, lo cual ocurre cuando el círculo es el meridiano ecuatorial, visto considerando su centro como uno de los dos polos esféricos.

Para el plano, los círculos de radio r tienen longitudes que varían linealmente con r , y puesto que este varía en $(0, \infty)$, tales longitudes no son acotadas superiormente.

Para la pseudo-esfera H , el radio puede variar en $(0, \infty)$ y la función longitud de un círculo de radio r no está acotada superiormente tampoco, así como ocurre en el caso del plano. No obstante, esta vez la longitud crece exponencialmente como función del radio.

Por ejemplo, si escogemos al metro como unidad de longitud, los círculos de radio $\pi/2$ en cada uno de los tres casos tendrían longitudes de 6,283 m, 9,870 m, y 14,459 m, respectivamente. Si escogemos un radio de 20 m, el círculo correspondiente en H tendría una longitud del orden de $1,5 \times 10^9$ m, es decir, del orden de un millón de kilómetros. En el plano, tal círculo tendría una longitud del orden de 125 m. En \mathbb{S}^2 , un tal radio es excesivamente grande, y no podemos hablar de un círculo con estas características. De cualquier manera, sabemos ya que la mayor longitud posible de círculo alguno en esta superficie es de 6,283 m.

Los resultados anteriores no dependen del punto escogido como centro porque las superficies estudiadas tienen una gran cantidad de simetrías. En torno a cualquier punto, tales superficies aparecen métricamente del mismo modo como aparecerían si cambiásemos al punto por otro.

2.2 Curvatura

En las tres superficies analizadas en la sección precedente, las geodésicas exhiben un comportamiento completamente distinto. Para la esfera, las geodésicas que pasan por un punto común inicialmente se separan para eventualmente invertir esa tendencia y volverse a intersectar en el punto antipodal. Para el plano, las geodésicas a través de un punto nunca se vuelven a encontrar, y la longitud del círculo con centro en tal punto crece proporcionalmente con la distancia a él. En el hiperboloide ó pseudo-esfera, las geodésicas a través de un punto común tampoco vuelven a encontrarse, más esta vez la longitud del círculo centrado en tal punto crece exponencialmente con la distancia al punto en cuestión. ¿Qué propiedad de la métrica en la superficie es responsable por este comportamiento tan distinto de las geodésicas que pasan por un punto común?

La propiedad en cuestión es local, es decir, lo que contribuye a este comportamiento es algo intrínseco a la métrica en la superficie cuyo efecto en un punto dado solamente depende de lo que acontece métricamente *cerca* de ese punto. El efecto total que produce *enfocamiento* ó *dispersión* de las geodésicas es la “suma de estas contribuciones locales” cuando nos movemos a lo largo de la curva. Por ahora, nos concentraremos en la definición y estudio de esta propiedad local, ó *curvatura*.

El término es apropiado. Analicemos el concepto primeramente a través del caso de una superficie inmersa dentro del espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 , y dada por la ecuación $z = f(x, y)$. Queremos ver cómo se deforma esta superficie en el punto $(0, 0, f(0, 0))$.

Por simplicidad, redefinimos las coordenadas, de ser necesario, para ponernos en la situación donde $f(0, 0) = 0$. El plano tangente en el punto $(0, 0, 0)$, cuya ecuación es $xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) - z = 0$, nos permite aproximar linealmente a la superficie. En otras palabras, si intentamos encontrar puntos (x, y, z) en S con x y y muy próximos a cero, la mejor aproximación lineal está dada por $z = xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0)$, donde (x, y) varía en el entorno de $(0, 0)$ donde consideramos la aproximación. Eso es bastante bueno, mas tal aproximación solamente refleja la estructura lineal de la superficie S en el punto $(0, 0, 0)$. Y nosotros queremos ver la deformación de S en $(0, 0, f(0, 0))$ que nos indica su curvatura.

Parece entonces razonable estudiar la diferencia $z = f(x, y) - xf_x(0, 0) - yf_y(0, 0)$, y ver el comportamiento de la superficie resultante en un entorno de $(0, 0, 0)$. Puesto que hemos removido los términos que aproximan linealmente a la superficie S en $(0, 0, 0)$, el estudio de esta nueva ecuación nos permitirá comprender la deformación de S en el entorno de $(0, 0, 0)$ que no es lineal, y por lo tanto, envuelve la torsión local que la superficie experimenta. Tal torsión dependerá de los términos cuadráticos de la función f que define a la superficie S en $(0, 0, 0)$, y resultará ser cero si estos se anulan en el punto. El concepto que intentamos entender es un concepto diferencial de orden por lo menos 2.

Así, supongamos que

$$z = f(x, y), \tag{7}$$

donde

$$f(0, 0) = 0, \quad (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) = (0, 0). \tag{8}$$

¿En qué sentido se tuerce la superficie S en el punto $(0, 0, 0)$?

Teniendo en cuenta las condiciones en (8), el plano tangente a S en el punto $(0, 0, 0)$ es horizontal (y coincide con el plano xy). La convexidad de S en $(0, 0, 0)$ mide su curvatura, siendo positiva, como la de la esfera, cuando todos los puntos de S cercanos a $(0, 0, 0)$ se encuentran del mismo lado del plano tangente, ó negativa si en cualquier entorno de $(0, 0, 0)$ hay puntos que se encuentran en distintos lados de tal plano. Esta explicación heurística adquiere precisión si definimos la curvatura K en $(0, 0, 0)$ como

$$K = \det \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(0, 0) & \partial_y \partial_x f(0, 0) \\ \partial_x \partial_y f(0, 0) & \partial_y \partial_y f(0, 0) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

el determinante del Hessiano de la función f en el origen.

Consideremos los autovalores λ_1 y λ_2 de la matrix simétrica dada por el Hessiano de f . Tenemos entonces que $K = \lambda_1 \lambda_2$. Luego, $K > 0$ si ambos

autovalores son no nulos y del mismo signo, $K < 0$ si los autovalores son no nulos de signos opuestos, y $K = 0$ si por lo menos uno de los autovalores es cero. La explicación heurística del concepto de curvatura dada en el párrafo anterior es perfectamente clara si escogemos las coordenadas (x, y, z) de tal manera que $f(x, y) = \frac{1}{2}\lambda_1 x^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 y^2 + o(x^2 + y^2)$, y estudiamos el gráfico de $z = f(x, y)$ en un entorno suficientemente pequeño del origen.

Usemos (9) para calcular la curvatura del plano. Esto es relativamente elemental. Dado cualquier punto p del plano xy , pensado como un plano contenido en \mathbb{R}^3 , podemos escoger las coordenadas de manera que p corresponda a $(0, 0, 0)$ y que z sea dada por la función $f(x, y) \equiv 0$. El Hessiano de tal función es la matriz cero. Luego, $K(p) = 0$ para cualquier punto p , lo cual era de esperarse pues el plano es exactamente eso, plano.

Ahora usemos (9) para calcular la curvatura de la esfera de radio a . Podemos hacerlo así pues la esfera también está inmersa en \mathbb{R}^3 y tiene la métrica que tal espacio induce sobre ella. El centro de la esfera es irrelevante, y dado un punto p cualquiera en ella, escogemos las coordenadas (x, y, z) de tal manera que p se corresponda con el punto $(0, 0, 0)$ y la esfera sea dada localmente por $z = -a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Observemos que la función que define a la esfera satisface la condición (8). Luego,

$$K(p) = \det \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(0, 0) & \partial_y \partial_x f(0, 0) \\ \partial_x \partial_y f(0, 0) & \partial_y \partial_y f(0, 0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2}.$$

Este resultado nos muestra que la curvatura de la esfera es positiva y no depende del punto donde se le calcula. Su valor a^{-2} disminuye cuadráticamente con el radio, lo cual es bastante razonable. Una esfera de radio cada vez mayor y mayor parece cada vez más y más plana. La Tierra, una (cuasi) esfera con un radio de aproximadamente 6.378, 15 km, se pensaba plana hasta hace relativamente poco tiempo. Esto no es sorprendente por parte del común de la gente, pues la curvatura terrestre (en km^{-2}) es del orden de $2,46 \times 10^{-8}$.

Ejercicio 3. Considere las superficies en \mathbb{R}^3 definidas por las ecuaciones

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Por la definición anterior, sabemos que sus curvaturas en el punto $(0, 0, 0)$ son 1 y -1 , respectivamente. Calcule la curvatura de cada una de estas superficies en un punto arbitrario. ¿Qué signo tienen los correspondientes resultados? \square

Ejercicio 4. Demuestre que la curvatura de un cilindro en cualquiera de sus puntos es cero. ¿Por qué tiene el cilindro la misma curvatura que el plano? \square

A pesar del avance que hemos hecho en el estudio del concepto de curvatura, la definición ha sido dada solamente para el caso de superficies contenidas en

el espacio Euclidiano, hecho no aplicable a la pseudo-esfera H_a discutida en el Ejemplo 5. ¿Cómo podemos dar una definición intrínseca, es decir, una definición que solamente dependa de S y no del espacio ambiente donde S pueda estar contenida? Podemos responder a tal pregunta de varias formas, y naturalmente, todas envuelven a la estructura métrica de la superficie.

Una primera forma consiste en definir la curvatura en el punto p por la expresión

$$K(p) = -3 \lim_{r \rightarrow 0} \Delta(\log r). \quad (10)$$

Aquí, Δ es el Laplaciano de la métrica en S , y $r = r(q)$ es la distancia geodésica de q al punto p . El Laplaciano actúa sobre la función $\log r$ como función de la variable q .

Veamos lo que (10) nos da en el caso del plano. La distancia geodésica de q a un punto fijo p es la longitud Euclidiana del vector $q - p$. Tomemos coordenadas que identifiquen a p con el origen. Luego, $r = \|q\|$ es la distancia geodésica entre p y q . Ahora bien, en coordenadas polares (r, θ) , el Laplaciano Δ es el operador dado por

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2.$$

Para funciones que solamente dependen del radio, el Laplaciano envuelve tan solo el cálculo de dos de sus derivadas con respecto a r . De tal manera que

$$-3\Delta(\log r) = -3 \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) \log r = -3 \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) = 0,$$

y por lo tanto, $K(p) = 0$, como sabíamos ya.

Veamos ahora lo que (10) nos da en el caso de la esfera de radio a . Sea p un punto dado en ella, y escojamos *coordenadas polares* (r, θ) en la esfera en torno a él: r es la distancia geodésica al punto p , el cual tomamos como uno de los polos de la esfera, y θ es el ángulo longitudinal del punto parametrizado por (r, θ) medido, modulo 2π , desde un meridiano fijo. En estas coordenadas, el Laplaciano de la esfera es el operador

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{a \operatorname{sen}\left(\frac{r}{a}\right)} \partial_r + \left(\frac{1}{a \operatorname{sen}\left(\frac{r}{a}\right)} \right)^2 \partial_\theta^2.$$

Para calcular $\Delta(\log r)$ podemos ignorar nuevamente el término que envuelve las derivadas con respecto a θ . Obtenemos

$$\Delta(\log r) = \left(\partial_r^2 + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{a \operatorname{sen}\left(\frac{r}{a}\right)} \partial_r \right) \log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{\cos\left(\frac{r}{a}\right)}{a \operatorname{arsen}\left(\frac{r}{a}\right)} = -\frac{1}{3a^2} + O(r^2),$$

donde la última igualdad sigue de una expansión de Taylor a orden 2 en torno a $r = 0$. Luego,

$$K(p) = -3 \lim_{r \rightarrow 0} \Delta(\log r) = \frac{1}{a^2},$$

reproduciendo el resultado para la curvatura de la esfera de radio a obtenido anteriormente.

Ejemplo 6. Ya que (10) parece funcionar bien para calcular la curvatura del plano y de la esfera, usemos tal definición para calcular la curvatura de H_a en un punto p .

En *coordenadas polares* centradas en p , la métrica de H_a se escribe como

$$ds^2 = dr^2 + a^2 \sinh^2\left(\frac{r}{a}\right) d\theta^2.$$

Implicítamente habíamos visto tal cosa al calcular la longitud del círculo de radio geodésico igual a r para esta superficie. Teniendo esto en cuenta, el Laplaciano de H_a está dado por

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{a \sinh\left(\frac{r}{a}\right)} \partial_r + \left(\frac{1}{a \sinh\left(\frac{r}{a}\right)}\right)^2 \partial_\theta^2,$$

análogo al Laplaciano de la esfera con el papel de las funciones trigonométricas jugado esta vez por las funciones trigonométricas hiperbólicas. Luego,

$$\Delta(\log r) = \left(\partial_r^2 + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{a \sinh\left(\frac{r}{a}\right)} \partial_r\right) \log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{\cosh\left(\frac{r}{a}\right)}{ar \sinh\left(\frac{r}{a}\right)} = \frac{1}{3a^2} + O(r^2),$$

y por lo tanto,

$$K(p) = -3 \lim_{r \rightarrow 0} \Delta(\log r) = -\frac{1}{a^2}.$$

Así vista, la curvatura de la pseudo-esfera H_a no depende del punto donde se le calcula, y es igual a la constante negativa $-1/a^2$. \square

Ejercicio 5. ¿Qué ocurre con los Laplacianos de la esfera de radio a y de H_a cuando $a \rightarrow \infty$? ¿Por qué sucede tal cosa? \square

Ejercicio 6. El ejercicio anterior sugiere el que podemos pensar al plano como un cierto límite de superficies de curvatura positiva, y como un cierto límite de superficies de curvatura negativa. ¿Qué propiedad topológica permitiría diferenciar tales límites? \square

Los resultados precedentes indican que las expresiones (9) y (10) producen resultados coherentes. ¿Cómo podemos justificar la equivalencia entre ambos conceptos? Responderemos a esta pregunta usando un argumento elemental, justificando nuestra respuesta a través del uso de un sistema de coordenadas muy útil.

Observemos que el plano tangente a la superficie S en el punto $(0, 0, 0)$ coincide con el plano xy , y que las direcciones a lo largo de los ejes de coordenadas

son *perpendiculares*. Tomemos el vector $u\partial_u + v\partial_v$ en el punto $(u, v, 0)$, y por translación pensemos en él como un vector en $(0, 0, 0)$. Queremos encontrar la geodésica $\gamma(s) = (x(s), y(s), f(x(s), y(s)))$ que en el origen tiene a tal vector como su vector velocidad.

Puesto que S es una superficie contenida en \mathbb{R}^3 , tiene perfecto sentido el calcular $\ddot{\gamma}$, y podemos definir tal expresión como el vector aceleración de la curva γ . Un argumento sencillo nos muestra que la curva es una geodésica sí, y solamente sí, su aceleración es perpendicular a la superficie, y como los vectores $\partial_x + f_x\partial_z$ y $\partial_y + f_y\partial_z$ son tangentes a S en $(x, y, f(x, y))$, concluimos que la ecuaciones para las componentes $x(s)$ y $y(s)$ de una geodésica están dadas por

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{f_x(f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2)}{\sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)}} &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{f_y(f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2)}{\sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)}} &= 0.\end{aligned}$$

Usamos tal resultado para encontrar el desarrollo en serie de Taylor de $\dot{x}(s)$ y $\dot{y}(s)$ a orden 2, y tomando el valor de γ correspondiente al parámetro $s = 1$, obtenemos un punto p en la superficie S cuyas coordenadas x y y tienen expansiones dadas por

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) = u - \frac{(f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2)(f_{xx}u + f_{xy}v)}{6} + o((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}), \\ y &= y(u, v) = v - \frac{(f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2)(f_{xy}u + f_{yy}v)}{6} + o((u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}),\end{aligned}\tag{11}$$

donde las derivadas de f son todas evaluadas en $(0, 0)$.

Lo que el resultado precedente nos dice es que si tomamos a un punto de coordenadas (u, v) en el plano tangente al origen y nos movemos a lo largo de la geodésica $\gamma(s)$ cuyo vector velocidad inicial es $u\partial_u + v\partial_v$, cuando $s = 1$ obtenemos un punto p en la superficie S cuyas coordenadas x y y poseen las expansiones dadas por (11). Decimos entonces que p tiene *coordenadas normales* (u, v) , y que las expansiones nos dan aproximaciones cuadráticas en u y v de las coordenadas $x(p)$ y $y(p)$ de p como un punto en \mathbb{R}^3 .

Podemos ahora proseguir de dos maneras distintas. En coordenadas normales, el Laplaciano en $(0, 0)$ está dado por el operador $\partial_u^2 + \partial_v^2$. Ciertamente, tenemos aún que definir este operador para superficies métricas en general, mas por ahora esto será suficiente, y esto es consistente con el Laplaciano de aquellas superficies métricas que conocemos bien al momento. Así, para calcular (10) y demostrar su equivalencia con (9), podríamos escribir la distancia geodésica r como función de (u, v) y usar (11) para encontrar su expansión en serie de Taylor a orden 2, a partir de lo cual sería fácil obtener el límite $\lim_{r \rightarrow 0} \Delta(\log r)$.

En lugar de eso, demostraremos la equivalencia entre los dos conceptos usando un argumento que envuelve a las *coordenadas polares*, justificando así también la manera como fueron presentados los cálculos ya realizado donde usamos la noción dada por (10).

De hecho, decimos que el punto p , al cual le hicimos corresponder sus coordenadas normales (u, v) , tiene coordenadas polares (r, θ) si $u = r \cos \theta$ y $v = r \sin \theta$. La función que asocia a (u, v) el valor en $s = 1$ de la geodésica que posee tal vector como velocidad inicial, tiene diferencial que asocia los vectores ∂_r y ∂_θ con vectores tangentes a S que son *perpendiculares uno al otro*. Abusando de la notación, llamaremos ∂_r y ∂_θ a estos últimos vectores también. Es evidente que $\|\partial_r\| = 1$, y por la perpendicularidad de ∂_r y ∂_θ , que la métrica se expresa como

$$ds^2 = dr^2 + g(r, \theta)^2 d\theta^2, \quad (12)$$

para cierta función no negativa $g(r, \theta)$. Claramente, tal función no es otra cosa sino la norma de ∂_θ .

¿Cómo podemos encontrar la expresión en coordenadas de ∂_θ ? En otras palabras, ¿cómo podemos encontrar los coeficientes que producen la igualdad

$$\partial_\theta = A\partial_x + B\partial_y + C\partial_z$$

en el punto con coordenadas polares (r, θ) ? Para eso, consideremos la curva $\gamma(s) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$ donde $u = u(s) = r \cos(\theta + s)$ y $v = v(s) = r \sin(\theta + s)$. Los coeficientes en cuestión están dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{ds}x(u(s), v(s)) \Big|_{s=0}, \\ B &= \frac{d}{ds}y(u(s), v(s)) \Big|_{s=0}, \\ C &= \frac{d}{ds}f(x(u(s), v(s)), y(u(s), v(s))) \Big|_{s=0}, \end{aligned}$$

y sus expansiones de Taylor son

$$\begin{aligned} A &= -v - \frac{\Pi(u, v)(-f_{xx}v + f_{xy}u)}{6} - \frac{\overset{\circ}{\Pi}(u, v)(f_{xx}u + f_{xy}v)}{3}, \\ B &= u - \frac{\Pi(u, v)(-f_{xy}v + f_{yy}u)}{6} - \frac{\overset{\circ}{\Pi}(u, v)(f_{xy}u + f_{yy}v)}{3}, \\ C &= (f_{xx}x(u, v) + f_{xy}y(u, v))A + (f_{xy}x(u, v) + f_{yy}y(u, v))B, \end{aligned}$$

donde $x(u, v)$ y $y(u, v)$ están dados por las expansiones (11), y

$$\Pi(u, v) = f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2$$

y

$$\mathring{\Pi}(u, v) = (f_{yy} - f_{xx})uv + f_{xy}(u^2 - v^2),$$

respectivamente.

La función $g(r, \theta) = \|\partial_\theta\|$ se obtiene calculando $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Puesto que $r^2 = u^2 + v^2$, es sencillo ver que

$$g(r, \theta) = \sqrt{r^2 - \frac{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}{3}r^4 + o(r^4)} = r\left(1 - \frac{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}{6}r^2 + o(r^2)\right).$$

Luego,

$$\Delta(\log r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{\partial_r g}{rg} = -\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{3} + o(1),$$

y la equivalencia entre (9) y (10) queda así establecida.

En realidad, la demostración de la equivalencia requiere el estudio de los términos negativos de las expansiones que usamos en nuestro argumento, demostrando que ellos no contribuyen al hallar el límite en cuestión. Esto se puede formalizar completamente si suponemos que la función f tiene por lo menos todas sus derivadas de hasta orden 3 continuas, porque en tal caso, la métrica es suficientemente regular para garantizar que tales términos se anulan, y todas las funciones usadas en el argumento son al menos continuas. De hecho, podemos hacer la demostración exigiendo un poco menos de la función f , mas omitiremos estos detalles técnicos aquí.

La definición de curvatura dada por (10) es intrínseca y nos permite que la calculemos para los tres modelos que hemos analizado hasta ahora. Ella envuelve al Laplaciano, operador diferencial asociado con la métrica de la superficie. Nos gustaría ver si podríamos redefinir este concepto apoyándonos en la noción de área en lugar del Laplaciano propiamente hablando.

La idea de cómo hacer esto es sugerida por los argumentos utilizados para llegar a la definición que nos dimos en el caso en el cual la superficie estaba contenida en el espacio Euclidiano. La curvatura $K(p)$ mide la distorsión local del disco de radio r en el plano tangente a la superficie en el punto p , cuando lo comparamos con el disco de radio r en la superficie misma. Tal distorsión es capturada a través de las áreas relativas de tales discos.

En efecto, dada la superficie S y un punto p en ella, trabajemos en coordenadas polares (r, θ) centradas en p , donde la métrica está dada como en (12) para cierta función no negativa $g(r, \theta)$. Sea D_r el disco en S de centro p y radio geodésico r . Sea D_r^0 el disco en el tangente a S en el punto p , de radio r . El tangente es un plano, y lo proveemos de la métrica usual, cosa que ya hicimos al hablar de la base ortonormal $\{\partial_u, \partial_v\}$. Luego, el área $A_0(r)$ de D_r^0 es igual a πr^2 . Por otro lado, el área $A(r)$ del disco D_r en S se puede calcular por la integral doble

$$A(r) = \iint_{D_r} g(s, \theta) ds d\theta. \tag{13}$$

Definimos entonces a $K(p)$ de acuerdo a la expresión

$$K(p) = 12 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{A_0(r) - A(r)}{r^2 A_0(r)}, \quad (14)$$

la cual usaremos inmediatamente para recalcular las curvaturas de los tres modelos hasta ahora considerados.

Para el plano, $g(r, \theta) = r$, y (13) en tal caso nos dice que $A(r) = \pi r^2$, que coincide con $A_0(r)$. Esto es bien natural: los discos D_r y D_r^0 son congruentes uno al otro, y no hay distorsión alguna. Calculando el límite (14), obtenemos que $K(p) = 0$.

Para la esfera de radio a , $g(r, \theta) = a \operatorname{sen} \left(\frac{r}{a} \right)$. Una integración sencilla nos dice que

$$A(r) = 2\pi a^2 \left(1 - \cos \left(\frac{r}{a} \right) \right).$$

Una expansión de Taylor nos dirá entonces que

$$A_0(r) - A(r) = \frac{\pi}{12} \frac{r^4}{a^2} + O(r^6),$$

y usando (14), obtenemos que $K(p) = 1/a^2$.

Finalmente, para H_a , tenemos que $g(r, \theta) = a \operatorname{senh} \left(\frac{r}{a} \right)$. En este caso,

$$A(r) = -2\pi a^2 \left(1 - \cosh \left(\frac{r}{a} \right) \right),$$

y concluimos que

$$A_0(r) - A(r) = -\frac{\pi}{12} \frac{r^4}{a^2} + O(r^6).$$

El límite definido por (14) produce entonces $K(p) = -1/a^2$.

Ejercicio 7. Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 definida por $z = f(x, y)$. Demuestre que la función K definida en (14) satisface la relación

$$(1 + f_x^2 + f_y^2)^2 K = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Concluya que (9) y (14) son equivalentes. □

2.3 Superficies Riemannianas: geodésicas y curvatura

Hasta ahora, a pesar de nuestro progreso en el entendimiento de las nociones de geodésicas y curvatura, no tenemos aún una definición general de lo que es una métrica en una superficie, y de hecho, ni siquiera una definición abstracta de lo que consideramos como una superficie. Dos de los tres modelos estudiados anteriormente se pueden pensar sumergidos en \mathbb{R}^3 , y el otro tuvo una realización

específica que usamos a nuestro antojo. Mas ¿cómo procederíamos si tuviésemos que considerar superficies métricas en general?

Comenzaremos definiendo un concepto local. Suponemos de partida que S es un espacio topológico Hausdorff, y consideramos un punto p en S . Sea U un entorno de p y $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo de U a un abierto $\varphi(U)$ del plano. Decimos entonces que la pareja (U, φ) es una carta local en p , ó sistema de coordenadas en el entorno U de p . Las funciones $U \ni q \mapsto x^i(q)$, $i = 1, 2$, tales que $\varphi(q) = (x^1(q), x^2(q))$ son las coordenadas del punto q . La pareja $(\varphi(U), \varphi^{-1})$ en el sentido opuesto se dice ser una parametrización de S en el entorno U .

Una colección de cartas locales $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ es un *atlas* de S si $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = S$, es decir, si los abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de las cartas locales constituyen un cubrimiento de S . El espacio S provisto de un atlas se dice ser una superficie topológica, el término superficie, ó dimensión 2, porque los abiertos de las cartas son homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n con $n = 2$. La superficie S se dice ser de clase C^k si para el abierto de puntos comunes a cualquier pareja de entornos U_α y U_β , homeomorfos a través de φ_α y φ_β a abiertos de \mathbb{R}^2 , la función de transición $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es continuamente diferenciable de orden k como función entre subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^2 . Una superficie topológica S provista de un atlas *maximal* de tipo C^k con $k \geq 1$ se dice ser una superficie diferenciable. Todas las superficies que consideramos aquí son de tipo C^∞ , o suaves como diremos también con frecuencia. Observemos que una superficie S de tipo C^k es automáticamente de tipo C^l para cualquier $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \leq k$. En todo nuestro trabajo aquí, es suficiente considerar superficies de tipo al menos C^3 .

En la práctica, proveemos a S de un atlas de tipo C^k , y luego consideramos el atlas maximal que este genera para definir así la estructura diferenciable de S . El atlas maximal generado por el inicialmente dado consiste del conjunto de todas las cartas locales C^k compatibles con las cartas locales del atlas de partida.

Si en las definiciones dadas anteriormente reemplazamos el 2 por un entero positivo general n , definiríamos lo que se conoce como una variedad C^k de dimensión n .

Ejercicio 8. Sea \mathbb{RP}^2 el conjunto de rectas a través del origen en \mathbb{R}^3 , es decir, el cociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ por la relación que identifica a $x = (x_0, x_1, x_2)$ con $\lambda x = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demuestre que \mathbb{RP}^2 es un espacio topológico compacto y provéale de una estructura diferenciable que lo haga una superficie de tipo C^∞ . Si en esta construcción se usa a \mathbb{C} en lugar de \mathbb{R} , demuestre que el conjunto \mathbb{CP}^2 resultante es una variedad diferenciable compacta de dimensión 4. Generalice la construcción a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ó $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ para cualquier entero $n \geq 1$, y obtenga variedades compactas \mathbb{RP}^n y \mathbb{CP}^n de dimensiones n y $2n$, respectivamente. \square

La definición anterior no es sorprendente, y el concepto corresponde a la manera como pensamos sobre la superficie de la Tierra: cuando queremos describir los alrededores de Barcelona, elaboramos un mapa del área el cual representamos en el plano. Si queremos describir los alrededores de Lisboa, hacemos lo mismo. A veces los mapas de estas dos regiones describen puntos comunes a ambos. Cuando nos encontramos frente a esta situación, podemos superponer perfectamente la región común de tales mapas, observando una transición continua, o mejor, de un mapa al otro. Finalmente, decimos tener un atlas cuando nuestra colección de mapas es tal que cada punto de la superficie de la Tierra está representado en al menos uno de ellos.

Observese que localmente, una variedad es modelada por un abierto de \mathbb{R}^n , y la variedad total se obtiene cosiendo perfectamente a través de las funciones de transición tales abiertos locales. De esta manera, los conceptos familiares de funciones en espacios Euclidianos pueden ser ahora definidos en superficies o variedades diferenciables a través del uso de las cartas locales. En particular, una función $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \mapsto S$, ó curva, es C^∞ si para toda carta (U, φ) en S tenemos que $\varphi \circ f$ es una función C^∞ del abierto $f^{-1}(U)$ en \mathbb{R} al abierto $\varphi(U)$ en \mathbb{R}^2 . De manera similar, podemos definir funciones de tipo C^k de una superficie a cualquier espacio Euclidianos, o funciones C^k entre dos superficies cualesquiera, etc.

El espacio tangente $T_p S$ a una superficie S en un punto p será justamente el conjunto de velocidades en p de curvas que pasan a través del punto. La velocidad $\dot{\gamma}(0)$ en el punto $p = \gamma(0)$ de una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es el vector velocidad en $t = 0$ de su expresión local en una carta (U, φ) tal que $p = \gamma(0) \in U$:

$$T_p S = \{\dot{\gamma}(0) : \gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto S, \gamma(0) = p\}.$$

La regla de la cadena hace de este un concepto bien definido sí tan solo requerimos el que S sea de tipo C^1 . Puesto que las velocidades expresadas localmente yacen en el espacio vectorial \mathbb{R}^2 , $T_p S$ adquiere la estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} .

Si consideramos la unión de todos los espacios tangentes parametrizados por los puntos de S , obtenemos el fibrado tangente

$$TS = \{(p, v) : p \in S, v \in T_p S\}.$$

Mostraremos en seguida que TS es una variedad de dimensión $2n = 4$. Por ahora, utilicemos la función proyección $\pi : TS \rightarrow S$ obvia para introducir una noción esencial. Un *campo vectorial* X en S se define como una función $X : S \rightarrow TS$ tal que la composición $\pi \circ X : S \rightarrow S$ es la función identidad. Nuestros campos vectoriales serán todos C^∞ .

Localmente, un campo vectorial X es bastante simple. Si $x = (x^1, x^2)$ es un sistema de coordenadas local, podemos expresar a X en la forma

$$X = a(x)\partial_{x^1} + b(x)\partial_{x^2},$$

para ciertas funciones $a(x)$ y $b(x)$ definidas en el entorno donde el sistema de coordenadas es válido. Vemos así que la función $x \mapsto (x^1, x^2, a(x), b(x))$ define un sistema de coordenadas local en TS . Y por cada carta (U, φ) de S , obtenemos una carta de la restricción $TS|_U$ de TS a U .

Si $y = y(x) = (y^1(x), y^2(x))$ es un otro sistema de coordenadas de S , la nueva representación de X se podrá determinar si usamos la regla de la cadena para concluir que

$$\partial_{x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \partial_{y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \partial_{y^2}, \quad \partial_{x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \partial_{y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \partial_{y^2},$$

y por lo tanto $X = \tilde{a}(y)\partial_{y^1} + \tilde{b}(y)\partial_{y^2}$, donde

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}(y) \\ \tilde{b}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x(y)) \\ b(x(y)) \end{pmatrix}.$$

Así pues, la función de transición en TS de la carta local $(x^1, x^2, a(x), b(x))$ a la carta local $(y^1, y^2, \tilde{a}(y), \tilde{b}(y))$ está dada por la función de transición de las x s a las y s, y la transpuesta de la matrix Jacobiana de $y = y(x)$. El atlas C^k de S determina un atlas C^{k-1} de TS . Esta observación completa la demostración de que TS es una variedad de dimensión el doble de aquella de S , cuyo tipo es menor en una unidad que el tipo de diferenciabilidad poseido por S .

Si bajo cambios de coordenadas, cambiamos consistentemente los campos locales $\partial_{x^1}, \partial_{x^2}$ de manera tal que la regla de la cadena sea satisfecha, podremos reconstruir un campo vectorial globalmente definido a partir de sus expresiones locales. Usando entonces una partición de la unidad subordinada al cubrimiento de S definido por un atlas, podemos pensar a X como una descripción consistente de campos vectoriales localmente definidos.

Esta última manera de proceder nos permite definir con facilidad la acción de un campo vectorial X sobre una función f , lo cual a su vez, nos permite pensar a X como una derivación en el anillo de funciones C^∞ en S . Escojamos una carta (U, φ) en un entorno de p . Si el punto p corresponde a las coordenadas (x^1, x^2) , la función resultante Xf será la función dada localmente por

$$(Xf)(p) = a(x)(\partial_{x^1} f)(x) + b(x)(\partial_{x^2} f)(x),$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son los coeficientes locales del campo X en las coordenadas $x = (x^1, x^2)$. De esta manera, pensamos en el campo vectorial X como un operador lineal en el anillo de funciones C^∞ de S . Dada la regla producto para el cálculo de derivadas, dicho operador es una derivación del anillo.

Podemos extender conceptos usuales para funciones entre conjuntos abiertos de espacios Euclidianos a funciones entre variedades diferenciables si trabajamos con expresiones locales. Por ejemplo, dadas las variedades diferenciables

M, \tilde{M} , consideremos una función f entre ellas. Si al expresar a f en coordenadas su diferencial df como función lineal del tangente $T_p M$ al tangente $T_{f(p)} \tilde{M}$ en cada punto $p \in M$ está definida y es continua como función de p , decimos que f es de tipo C^1 . Con frecuencia nos referiremos también a df como el Jacobiano de f . Dicho Jacobiano puede definirse usando curvas: si nos damos $v_p \in T_p M$, tomemos una curva $\gamma(t)$ en M que pase por p cuando $t = 0$ con velocidad $\dot{\gamma}(0) = v_p \in T_p M$. Luego $df_p(v_p)$ es la velocidad en $t = 0$ de la curva $f \circ \gamma$ en \tilde{M} . El concepto de diferenciabilidad se puede generalizar para definir funciones $f : M \rightarrow \tilde{M}$ de tipo C^k para cualquier entero positivo k , ó más aún, C^∞ ó suaves.

Una curva cuyo vector tangente en cada punto es el campo vectorial X se dice ser una curva integral de X . Tal curva es la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$$

de orden 1. Luego, dado $p \in S$, existe una única solución $\gamma_X(t)$ tal que $\gamma_X(0) = p$, definida en un entorno maximal de $t = 0$.

Ejercicio 9. ¿Cuáles son las curvas integrales del campo en la esfera que en coordenadas esféricas está dado por

$$X = \text{sen } \psi \partial_\theta ?$$

Para cada t , describa el difeomorfismo de la esfera en sí misma que asocia a cada punto p el valor en t de la curva integral de X que comienza en p . ¿Para qué valores de t está definido este difeomorfismo? ¿Por qué? \square

Consideremos campos vectoriales X y Y y un punto p de S . Usando las curvas integrales de los campos para valores pequeños del parámetro t , definimos una nueva curva $\gamma_0(t)$ que pasa por p en $t = 0$. En efecto, comenzando en p , $\gamma_0(t)$ será el punto de S que obtendremos si nos movemos t unidades de tiempo a lo largo de las curvas integrales de $X, Y, -X$ y $-Y$, consecutivamente y en el orden indicado.

La curva γ_0 así definida pasa por p cuando $t = 0$, y más aún, como función de t , $\gamma_0(t) - p$ se anula a orden dos en $t = 0$. Definimos el vector tangente $[X, Y]_p$ en el punto p como

$$[X, Y]_p = \frac{d}{dt} \gamma_0(\sqrt{t}) \Big|_{t=0}, \quad (15)$$

el vector velocidad en p de la curva $\gamma_0(\sqrt{t})$. Haciendo esto en cada punto de S , obtenemos un nuevo campo vectorial $[X, Y]$, el corchete de Lie de los campos X y Y de partida.

Ejercicio 10. Demuestre que el corchete $[X, Y]$ así definido coincide con la derivación

$$f \mapsto (XY - YX)f,$$

el conmutador de los campos X y Y . □

El conjunto de campos vectoriales es un módulo sobre el espacio de funciones suaves a valores reales definidas en S . Esto quiere decir solamente que podemos multiplicar campos vectoriales por funciones para obtener otros campos, y que tal operación tiene las propiedades obvias. Las uno formas en S son los elementos duales del conjunto de campos vectoriales como tal módulo. Así, si α es una uno forma, dado un campo X tenemos la función $p \mapsto \alpha(X)(p)$, y la acción de α sobre los campos es tal que $\alpha(fX + Y) = f\alpha(X) + \alpha(Y)$ para cualquier función suave f . Esta última propiedad nos dice que las uno formas son también un módulo sobre el espacio de funciones C^∞ .

Podemos escribir una uno forma α localmente. Si $x = (x^1, x^2)$ son coordenadas locales, entonces

$$\alpha = \tilde{a}(x)dx^1 + \tilde{b}(x)dx^2,$$

donde las formas locales dx^1 y dx^2 son duales a los campos ∂_{x^1} y ∂_{x^2} , respectivamente. Es decir, $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta_j^i$. Así como lo hicimos con los campos vectoriales, si transformamos consistentemente las definiciones locales de uno formas bajo cambios de coordenadas, podemos dar una uno forma globalmente definida a partir de sus expresiones locales. Recordemos que el cambio es consistente si la regla de la cadena es satisfecha al cambiar de coordenadas.

El espacio cotangente T_p^*S a una superficie S en el punto p es el conjunto de uno formas en p . Si consideramos la unión de todos los espacios cotangentes parametrizados por los puntos de S , obtenemos el fibrado cotangente

$$T^*S = \{(p, \alpha) : p \in S, \alpha \in T_p^*S\}.$$

Como en el caso del fibrado tangente, T^*S es una variedad de dimensión $2n = 4$, y cada carta local (x^1, x^2) induce una carta local $(x^1, x^2, \tilde{a}(x), \tilde{b}(x))$ determinada por las uno formas locales dx^1 y dx^2 en T^*S . En este caso, las funciones de transición en T^*S de la carta local $(x^1, x^2, \tilde{a}(x), \tilde{b}(x))$ a la carta local $(y^1, y^2, \tilde{a}(y), \tilde{b}(y))$ está dada por la función de transición de las x s a las y s, y la inversa de la matrix Jacobiana de $y = y(x)$. Si $\pi : T^*S \rightarrow S$ es la proyección natural, así pensadas, las *uno formas* en S están dadas por funciones $\alpha : S \rightarrow T^*S$ tales que la composición $\pi \circ \alpha : S \rightarrow S$ es la función identidad.

Toda función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ define una uno forma de manera canónica. En efecto, todo campo vectorial X actúa sobre f , y podemos definir la uno forma df , ó derivada exterior de f , por la identidad

$$df(X) = Xf. \tag{16}$$

Localmente df se representa como

$$df = (\partial_{x^1} f)dx^1 + (\partial_{x^2} f)dx^2.$$

2.3.1 Superficies Riemannianas Las propiedades que estudiamos en §2.1 y §2.2 son propiedades de las métricas dadas a las superficies modelos que allí consideramos. ¿Qué quiere decir entonces una métrica en una superficie arbitraria? La respuesta es, una vez más, muy sencilla: una métrica en una superficie es una manera diferenciable de medir la longitud de campos vectoriales y los ángulos que ellos forman en cada uno de los puntos de la superficie. Una tal estructura es hoy día llamada Riemanniana, en honor a B. Riemann.

De manera precisa, una métrica Riemanniana en S es una función suave $S \ni p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ la cual, para cada p en S , define un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en el espacio vectorial $T_p S$. Puesto que un producto interno define y es definido por una matriz definida positiva, una métrica Riemanniana no es otra cosa sino una función C^∞ de S en el espacio de tales matrices.

Teniendo una métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, podemos medir la longitud de un vector X_p en $T_p S$ por la expresión $\|X_p\| = \langle X_p, X_p \rangle_p^{\frac{1}{2}}$, y dada una curva $\gamma(t)$, la función $\|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}$ está bien definida. La longitud de γ entre los puntos $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ puede definirse, como ya lo hicimos, usando la expresión (1). Los puntos críticos de este funcional son, por definición, las curvas geodésicas entre los puntos indicados.

A fin de entender mejor este concepto y también el concepto de curvatura, necesitamos describir una noción adicional: la noción de derivada intrínseca que una métrica Riemanniana produce. Esta nos permite diferenciar un campo vectorial a lo largo de otro, y definir lo que es un campo constante a lo largo de una curva, generalizando así la conocida idea de transporte paralelo en el plano Euclidiano al caso de una superficie Riemanniana abstracta.

Para motivar este concepto, consideremos una vez más el ejemplo de la métrica Euclidiana en el plano, donde los campos

$$X = a_1(x, y)\partial_x + b_1(x, y)\partial_y \quad \text{y} \quad Y = a_2(x, y)\partial_x + b_2(x, y)\partial_y$$

tienen producto interno en cada punto (x, y) dado por

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^2} = a_1(x, y)a_2(x, y) + b_1(x, y)b_2(x, y).$$

En este caso particular, la expresión

$$\nabla_X^{\mathbb{R}^2} Y = (Xa_2)\partial_x + (Xb_2)\partial_y \tag{17}$$

define un nuevo campo vectorial. Simplificaremos la notación y lo llamaremos simplemente $\nabla_X Y$.

Si usásemos la expresión (17) para definir localmente un campo vectorial a partir de X e Y en una superficie Riemanniana arbitraria, en general sería imposible el conectar consistentemente dichas definiciones locales para obtener un campo vectorial $\nabla_X Y$ globalmente definido. El caso del plano es especial y

no hay tal problema porque las coordenadas (x^1, x^2) lo parametrizan completamente, y la expresión misma ya define un campo global.

Sin embargo, analicemos el campo vectorial $\nabla_X Y$ en \mathbb{R}^2 así definido, y extraigamos sus propiedades intrínsecas, aquellas independientes de las coordenadas utilizadas y que lo caracterizan. Esto es un hecho de fundamental importancia.

Primeramente, si además de X y Y nos damos un tercer campo Z y una función a valores reales f , tenemos que

$$\text{a) } \nabla_X(Y + fZ) = \nabla_X Y + (Xf)Z + f\nabla_X Z.$$

$$\text{b) } \nabla_{X+fZ}(Y) = \nabla_X Y + f\nabla_Z Y.$$

En efecto, la primera de estas propiedades para (17) sigue del hecho que la acción de un campo vectorial sobre una función satisface la regla del producto. La segunda es aún más simple, y sigue del hecho que $(X + fZ)a = Xa + f(Za)$ para una función a cualquiera.

La propiedad (a) implica que como función de Y , el valor de $\nabla_X Y$ en el punto p depende de los valores de Y próximos a p , en tanto que la propiedad (b) muestra que como función de X , el valor de $\nabla_X Y$ en p depende solamente de X_p , el valor del campo X en p . Esto contrasta, por ejemplo, con el corchete $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ definido en (15), operación que satisface la propiedad (a) mas no la propiedad (b).

Hasta ahora, todo bien. Mas la función $\nabla_X Y$ tiene dos propiedades adicionales, una que lo relaciona con el corchete de Lie y otra con la métrica:

$$\text{c) } \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

$$\text{d) } Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Claramente, (c) es casi obvia para (17), y (d) es una consecuencia también de la regla del producto, ya usada en la verificación de (a).

Una función $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ con las propiedades (a) y (b) anteriores es llamada una conexión. Si la conexión satisface la propiedad (c), decimos que esta tiene torsión nula, y si satisface la propiedad (d) decimos que es una conexión métrica.

Siempre que tengamos una conexión ∇ en una superficie S , podemos definir la noción de *transporte paralelo* de vectores tangentes a lo largo de cualquier curva $\gamma(t)$ en S . En efecto, consideremos un vector $X_{\gamma(0)}$ en el espacio tangente $T_{\gamma(0)}S$. Diremos entonces que $X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}S$ es el transporte paralelo de $X_{\gamma(0)}$ a lo largo de $\gamma(t)$ si $X_{\gamma(t)}$ es la solución de la ecuación

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_{\gamma(t)} = 0, \tag{18}$$

con condición inicial $X_{\gamma(0)}$. Si a manera de ilustración tomásemos la conexión del plano Euclidiano, podríamos facilmente verificar que el concepto introducido

corresponde de manera literal con el transporte paralelo de vectores del plano a lo largo de rectas, del cual hacemos uso frecuente en construcciones geométricas elementales.

Si para una métrica dada la conexión satisface la propiedad (d), entonces el producto interno de vectores es conservado por el transporte paralelo. Porque si tenemos que $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}X_{\gamma(t)} = 0$ y $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y_{\gamma(t)} = 0$, la propiedad (d) nos dice que la función $\langle X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)} \rangle_{\gamma(t)}$ es constante en t .

Toda métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ admite una única conexión con las propiedades (c) y (d). Como un campo vectorial queda completamente determinado si se conoce su producto interno con un campo arbitrario en cada punto de la superficie, dado los campos X , Y y Z , la expresión

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle. \quad (19)$$

define un campo vectorial $\nabla_X Y$, y tenemos así una función $X, Y \mapsto \nabla_X Y$ determinada completamente por la métrica.

Ejercicio 11. Demuestre que la función $\nabla_X Y$ así definida es una conexión métrica con torsión nula. \square

La conexión definida por (19) se conoce como la conexión de Levi-Civita de la métrica. Así pues, cada métrica nos provee de una noción intrínseca de derivada de vectores, noción que se puede extender de manera conveniente para definir operadores diferenciales en el álgebra tensorial de la superficie. El álgebra tensorial es aquella generada por productos tensoriales de los módulos TS y T^*S . La noción de derivada covariante es extendida al álgebra tensorial exigiendo que sea una derivación del álgebra que conmute con contracciones. Esta extensión nos permite a su vez estudiar la existencia de métricas canónicas en S como soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales naturales en el espacio de métricas, cuando vemos a las últimas como un subconjunto particular del álgebra tensorial.

Mas por ahora, retornemos a la función $L(\gamma)$ definida en (1), función que mide la longitud de su argumento γ para una γ que conecta los puntos fijados de antemano $p = \gamma(t_0)$ y $q = \gamma(t_1)$. Queremos calcular la derivada de L cuando variamos a γ entre todas las curvas con tal propiedad, y poder así determinar las características que una curva debe tener para ser un punto crítico de L . Para esto, consideremos una variación $\gamma_\tau(t)$ de $\gamma(t)$ parametrizada por τ . En otras palabras, para algún $\varepsilon > 0$, consideremos una función

$$\begin{aligned} [t_0, t_1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow S \\ (t, \tau) &\mapsto \gamma_\tau(t) \end{aligned}$$

tal que $\gamma_0(t) = \gamma(t)$. Supongamos que t es el parámetro longitud de arco de la curva $\gamma(t)$.

Sean T y V los vectores tangentes a las curvas $t \mapsto \gamma_\tau(t)$ y $\tau \mapsto \gamma_\tau(t)$ en el punto $\gamma_\tau(t)$, respectivamente. Luego,

$$\frac{d}{d\tau}L(\gamma_\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\gamma}_\tau(t), \dot{\gamma}_\tau(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t_0}^{t_1} V \langle T, T \rangle^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\langle T, T \rangle^{\frac{1}{2}}} V \langle T, T \rangle dt.$$

Observemos que $[T, V] = 0$, y usando la propiedad (c), obtenemos que $\nabla_V T = \nabla_T V$. Así, usando ahora la propiedad (d), tenemos que

$$V \langle T, T \rangle = 2 \langle \nabla_V T, T \rangle = 2 \langle \nabla_T V, T \rangle = 2T \langle V, T \rangle - 2 \langle V, \nabla_T T \rangle.$$

Como t es el parámetro longitud de arco de $\gamma(t)$, $\|T\| = 1$ cuando $\tau = 0$. Concluimos así que

$$\frac{d}{d\tau}L(\gamma_\tau) |_{\tau=0} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\langle \nabla_T V, T \rangle}{\|T\|} dt = \langle V, T \rangle |_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \langle V, \nabla_T T \rangle dt. \quad (20)$$

Si escogemos ahora variaciones $\gamma_\tau(t)$ de $\gamma(t)$ arbitrarias tales que $p = \gamma_\tau(t_0)$ y $q = \gamma_\tau(t_1)$ para todo τ , los términos de borde se anulan, y concluimos que $\gamma(t)$ es un punto crítico de L si se satisface la ecuación

$$\nabla_T T = 0. \quad (21)$$

Una curva $\gamma(t)$ es pues una geodésica si el vector velocidad $\dot{\gamma}(t)$ a lo largo de $\gamma(t)$ es paralelo a sí mismo.

La ecuación (21) para una geodésica es una ecuación diferencial ordinaria de grado dos. Así, dada una posición p y velocidad inicial X_p , el teorema de existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales garantiza la existencia de una geodésica $\gamma(t)$ definida en un entorno maximal de $t = 0$.

Ejercicio 12. Encuentre ejemplos de superficies Riemannianas con puntos que no se pueden conectar por geodésica alguna. \square

Ejercicio 13. Para la esfera con la métrica inducida por la métrica Euclidiana en \mathbb{R}^3 , todo meridiano que pasa por los polos norte y sur es una geodésica que los conecta. En coordenadas esféricas (θ, ψ) , dichos meridianos son descritos por la ecuación $\theta = \theta_0$. Dado un $\varepsilon > 0$ pequeño, encuentre una métrica en la esfera para la cual las únicas geodésicas que conectan a estos polos sean los meridianos que corresponden a valores de θ_0 en el intervalo $\pi - \varepsilon < \theta_0 < \pi + \varepsilon$. \square

Retornemos a la discusión de S como espacio métrico. La métrica Riemanniana g en S induce una noción de distancia d_S entre puntos p y q dada por la expresión (2). Y esta a su vez, induce una topología en S . ¿Cómo se relacionan la topología original en S con la inducida por d_S ? Dichas topologías resultan ser equivalentes, hecho cuya demostración detallada dejamos en manos del lector.

La métrica en una superficie Riemanniana S se dice completa si toda sucesión de Cauchy converge en S . Trabajando con métricas completas evitamos la

situación planteada en el Ejercicio 12. Cuando nos damos una superficie S con una métrica d_S que tiene esta propiedad, decimos que (S, d_S) es un espacio métrico *completo*. Por la compatibilidad de las topologías en S y la topología inducida por d_S , si S es compacta sigue que (S, d_S) es un espacio métrico completo. El resultado claro está es cierto para variedades Riemannianas compactas de cualquier dimensión. Y también la compacidad es suficiente mas no necesaria para que (S, d_S) sea un espacio completo.

Este es un buen momento para indicar el por qué debemos insistir en una definición general de superficies Riemannianas, mas allá de aquellas que se pueden obtener como subconjuntos del espacio Euclidiano de dimensión tres con la métrica inducida. El lector puede releer la discusión sobre la definición de curvatura (9) en el caso en el cual la superficie es localmente un gráfico, y analizar la situación que surge al alejarnos de una geodésica en la superficie dada por la segunda de las ecuaciones del Ejercicio 3, siempre moviendonos en direcciones ortogonales a la geodésica misma. Este tipo de análisis resulta ser muy útil.

Ejercicio 14. Demuestre que no existe ninguna superficie C^∞ completa dentro del espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 donde la métrica inducida tiene la geometría intrínseca de la pseudo-esfera. \square

Dado un número real k , el modelo de superficie Riemanniana con curvatura constante k estudiado en la sección §2.2 será llamado S^k . Así, S^k es la pseudo-esfera de radio $1/\sqrt{-k}$, el plano Euclidiano, ó la esfera de radio $1/\sqrt{k}$ si $k < 0$, $k = 0$ ó $k > 0$, respectivamente.

2.3.2 Curvatura Recordemos la curva γ_0 que usamos en (15) para definir el corchete $[X, Y]$ de los campos X y Y . Esta es una curva que comienza en p y termina en el punto obtenido después de movermos sucesivamente t unidades de tiempo a lo largo de las curvas integrales de X , Y , $-X$ y $-Y$, respectivamente. Si entonces nos movemos un poco más a lo largo de la curva integral de $-[X, Y]$, también t unidades de tiempo, obtenemos una curva que comienza y termina en p a orden 2. Llamemos $\gamma_{X,Y}(t)$ a la curva resultante. Ella es cerrada módulo terminos de orden tres o mayores en t .

Sea S una superficie Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y conexión de Levi-Civita ∇ . Si Z es un campo y hacemos su transporte paralelo a lo largo de $\gamma_{X,Y}$, obtenemos un vector de la forma

$$t^2(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z + o(t^2).$$

Así, la contribución más significativa de transportar paralelamente a Z a lo largo de $\gamma_{X,Y}$ está dada por el vector

$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z, \quad (22)$$

una manera de medir la extensión en la cual el conmutador de los operadores ∇_X y ∇_Y difiere del operador $\nabla_{[X,Y]}$.

El valor del campo $R(X, Y)Z$ en el punto p depende solamente de los valores de X , Y y Z en el punto mismo. En otras palabras, si alguno de estos tres campos es cero en p , entonces $R(X, Y)Z$ será también cero en p . Una tal función es un elemento del algebra tensorial, y R es el llamado tensor de curvatura de la métrica en S , ó simplemente tensor de curvatura de Riemann.

Usaremos ahora el hecho de que S es una superficie para simplificar notablemente el estudio de R . La clave de esta simplificación radica en que la dimensión del espacio tangente a S en cada punto es dos, y por lo tanto, solamente se requieren dos vectores para generarlo.

Observemos que $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$. Por esta razón, suponemos que X y Y son linealmente independientes; de otra forma, $R(X, Y)Z$ sería cero. Y puesto que como función de Z el vector $(R(X, Y)Z)_p$ solamente depende del valor de Z en p , podemos escribirlo como una combinación lineal de $(R(X, Y)X)_p$ y $(R(X, Y)Y)_p$, cuyos coeficientes se pueden obtener a partir de los productos internos de ellos y esos de $(R(X, Y)Z)_p$ con X_p y Y_p , respectivamente.

Relativo a la base $\{X_p, Y_p\}$ de T_pS , $(R(X, Y)Y)_p$ tiene componente no trivial solamente en la dirección de X_p , en tanto que $(R(X, Y)X)_p$ tiene componente no trivial solamente en la dirección de Y_p . Más aún, $\langle R(X, Y)Y, X \rangle = -\langle R(X, Y)X, Y \rangle$. Por lo tanto, los coeficientes del vector $(R(X, Y)Z)_p$ quedan completamente determinados si además de sus productos internos con X_p y Y_p , sabemos también quién es $\langle (R(X, Y)Y)_p, X_p \rangle$. Y si esta última cantidad fuese cero, tendríamos que $R(X, Y)Z$ sería cero también.

Así pues, la expresión $\langle (R(X, Y)Y)_p, X_p \rangle$ resulta ser una función escalar muy razonable que nos permite medir la diferencia entre $[\nabla_X, \nabla_Y]$ y $\nabla_{[X,Y]}$. A fin de considerar algo que sea independiente de la base escogida, definimos

$$K(p) = K(X, Y)_p = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle_p}{\|X \wedge Y\|_p^2}. \quad (23)$$

El termino $\|X \wedge Y\|_p^2$ es el cuadrado del área del paralelogramo en T_pS generado por X_p y Y_p , respectivamente.

La expresión (23) depende del espacio generado por los vectores mas no de los vectores escogidos propiamente. Ella define en p la *curvatura seccional* de la sección generada por X_p y Y_p , la cual en el caso de una superficie, es todo el espacio tangente T_pS . La función $p \mapsto K(p)$ es la *curvatura de Gauss* de la métrica en S . Así definida, ella coincide con (9) si la superficie es un gráfico. Ó con (10) ó (14) en el caso general.

Para comenzar la verificación de este último hecho, definimos la coordenadas normales en general. Sea p un punto de S . Diagonalizamos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en T_pS , y escogemos una base orthonormal $\{\partial_u, \partial_v\}$. Dicha base nos

permite identificar un vector de coordenadas (u, v) en \mathbb{R}^2 con el vector $u\partial_u + v\partial_v$ en el espacio tangente T_pS . Podemos así considerar la geodésica $\gamma(s)$ que comienza en p con velocidad $u\partial_u + v\partial_v$. La función *exponencial* en el punto p hace corresponder a (u, v) con el punto $q = \gamma(1)$, $\exp_p(u, v) = q$. Decimos que el punto q tiene coordenadas normales (u, v) .

Las geodésicas $\gamma(s)$ podrían no estar definidas en $s = 1$ para todas las velocidades iniciales posibles en T_pS , o aún peor, geodésicas diferentes a través de p podrían terminar en el mismo punto cuando $s = 1$. No obstante, el Jacobiano de la función exponencial en el origen de T_pS es la función identidad, y por el teorema de la función inversa, ella define un difeomorfismo entre un entorno del origen en T_pS y un entorno de p en S .

Escojamos un entorno $D_\varepsilon(0) = \{(u, v) : r^2 := u^2 + v^2 < \varepsilon^2\}$ del origen en T_pS de radio ε suficientemente pequeño tal que $\exp_p|_{D_\varepsilon(0)}$ es un difeomorfismo de $D_\varepsilon(0)$ en $U = \exp_p(D_\varepsilon(0))$. En U definimos la función $r(q) := |\exp_p^{-1}(q)| = \sqrt{u^2(q) + v^2(q)}$, la distancia entre el punto $(u(q), v(q))$ y el origen en la métrica Euclídeana en T_pS . Observemos que

$$\partial_r = (d\exp_p)(\partial_r) = \frac{1}{r}(u\partial_u + v\partial_v), \quad (24)$$

expresión a la cual arribamos una vez identificamos al espacio vectorial $T_{(u,v)}(T_pS)$ con T_pS mismo. La función $r(q)$ así definida en U satisface la propiedad de que $\nabla r = \partial_r = (d\exp_p)(\partial_r)$. Tal resultado, conocido como el *lema de Gauss*, nos permite demostrar que para todo vector $(u, v) \in D_\varepsilon(0)$, la curva $\gamma_{(u,v)}(t) = \exp_p(t(u, v))$ en U conecta a p y $q = \gamma_{(u,v)}(1)$, y minimiza la distancia en M entre p y cualquiera de sus puntos $\gamma_{(u,v)}(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Y esto a su vez nos dice que la función $d_S(p, q)$ en (2) se anula sí, y solo sí, $p = q$, completando la demostración de que d_S define una métrica en S .

En efecto, por conveniencia pongamos $w = (u, v)$. Luego las curvas integrales de ∂_r en $D_\varepsilon(0)$ son dadas por los segmentos $\gamma(t) = t \cdot w / \|w\|$ con velocidades de norma 1. Así pues, las curvas integrales del gradiente de la función r en U están dadas por las geodésicas $\gamma_w(t) = \exp_p(t \cdot w / \|w\|)$. El lema de Gauss nos dice que esta geodésica es la curva en U de menor longitud entre p y cualesquiera de sus puntos. Si consideramos cualquier otra curva en M que une a p y a q y que en algún momento sale de U , su longitud es al menos mayor que $\varepsilon > \gamma_w(1)$. Luego, $\gamma_w(1) = d_S(p, q)$.

El lema de Gauss requiere demostrar que el gradiente ∇r de la función r coincide con el campo ∂_r en (24), es decir, que $dr(w) = \langle \partial_r, w \rangle$ para todo campo w en U , donde $dr = (udu + vdv)/r$. Evidentemente, esta identidad tensorial se satisface para $w = \partial_r$. Escojamos ahora a w igual a $w = (u\partial_v - v\partial_u)/r$, campo para el cual $dr(w) = 0$. Puesto que este w y ∂_r forman una base del tangente a U en cada punto, el resultado quedaría completamente demostrado si lográsemos demostrar que $\langle \partial_r, w \rangle = 0$. Observemos que $[\partial_r, w] =$

0. Como $\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0$ y puesto que la conexión es métrica, vemos que $\partial_r\langle\partial_r, w\rangle = \langle\partial_r, \nabla_{\partial_r}w\rangle = \langle\partial_r, \nabla_w\partial_r\rangle = (1/2)w(\langle\partial_r, \partial_r\rangle)$, lo cual es cero porque $\langle\partial_r, \partial_r\rangle = 1$. Luego, $\langle\partial_r, w\rangle$ es constante a lo largo de geodésicas que parten de p , y por ende constante en U . Mas tenemos también la estimación $|\langle\partial_r, w\rangle_q| \leq r(q)(\|\partial_u\| + \|\partial_v\|)$, y tomando el límite cuando $q \rightarrow p$, concluimos que la constante deber ser cero, y $\langle\partial_r, w\rangle = 0$, como queríamos.

Si las coordenadas normales de q se escriben como $u = r \cos \theta$ y $v = r \sin \theta$, decimos que q tiene coordenadas geodésicas polares (r, θ) . En tal caso, r es la longitud del segmento de geodésica que conecta a p con q , y cuya velocidad en p es $u\partial_u + v\partial_v$.

En coordenadas geodésicas polares (r, θ) , la métrica tiene la expresión (12) en terminos de una función positiva $g(r, \theta)$. Los vectores

$$X = \partial_r, \quad Y = -\frac{1}{g}\partial_\theta, \quad (25)$$

son ortonormales y generan al espacio tangente. Y ahora es fácil calcular la expresión (23) usando estos vectores.

En efecto, sabemos ya que ∂_r es paralelo a sí mismo porque r es la distancia geodésica a partir de p . Usando el hecho de que la conexión es métrica, podemos facilmente deducir también que el vector $-\frac{1}{g}\partial_\theta$ es paralelamente constante a lo largo de la curva radial. Así,

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0, \quad \nabla_{\partial_r}\left(-\frac{1}{g}\partial_\theta\right) = 0.$$

Usando ahora la propiedad de que la conexión tiene torsión nula, podemos determinar la derivada de ∂_r en la dirección de $-\frac{1}{g}\partial_\theta$ como función del corchete de los vectores. Eso, y la propiedad métrica de la conexión una vez más, nos permite hallar la derivada de $-\frac{1}{g}\partial_\theta$ con respecto a sí mismo:

$$\nabla_{-\frac{1}{g}\partial_\theta}\partial_r = \frac{g_r}{g}\left(-\frac{1}{g}\partial_\theta\right), \quad \nabla_{-\frac{1}{g}\partial_\theta}\left(-\frac{1}{g}\partial_\theta\right) = -\frac{g_r}{g}\partial_r.$$

Tenemos entonces que

$$K = -\left(\frac{g_r}{g}\right)_r - \left(\frac{g_r}{g}\right)^2 = -\frac{g_{rr}}{g}. \quad (26)$$

Usaremos esta expresión para verificar que (23) y (10) son iguales, una vez hallamos definido al Laplaciano de una métrica en general.

2.3.3 El Laplaciano de una métrica: la curvatura El Laplaciano de una métrica en S es la composición de dos operadores. El primero de ellos

no está relacionado con la métrica, mas es muy importante en el estudio de la topología de S . Este es el operador *derivada exterior* d , el cual lo necesitaremos por ahora tan solo actuando sobre funciones como ya fue descrito en (16). El segundo operador en la composición que define al Laplaciano es el dual métrico de d a nivel de funciones.

Como la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nos da un producto interno en cada punto, podemos identificar de una manera C^∞ al espacio tangente en cada punto con su espacio dual. Así, toda una forma α corresponde via la métrica con un campo vectorial $\alpha^\#$ definido por la identidad $\langle \alpha^\#, \cdot \rangle = \alpha$. En particular, el gradiente ∇f de una función f es definido por la identidad

$$\langle \nabla f, \cdot \rangle = df,$$

el campo dual a la forma df . Obtenemos así el operador gradiente

$$f \mapsto \nabla f, \quad (27)$$

el cual actúa sobre funciones, y para cada una de ellas, produce un campo vectorial.

Observemos que la misma idea anterior puede ser usada para extender la métrica a las uno formas: dadas formas α y β , definimos su producto interno en cada punto por

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha^\#, \beta^\# \rangle.$$

Más aún, si cambiamos de sentido, vemos que un campo vectorial X corresponde a la uno forma X^\flat definida por $\langle X, \cdot \rangle = X^\flat$. Y dada una función f y un campo X , tenemos que

$$\langle \nabla f, X \rangle = \langle df, X^\flat \rangle,$$

lo cual nos presenta al operador gradiente como la versión dual del operador derivada exterior a nivel de funciones.

La métrica también define una medida que nos permite integrar funciones. En coordenadas normales (u, v) ella está definida por $dudv$, y podemos definirla globalmente si cambiamos su representación local consistentemente cuando cambiamos de un sistema de coordenadas a otro. Llamaremos $d\mu$ a esta medida.

Definimos entonces al operador δ como el dual métrico de la derivada exterior d . Es decir,

$$\int \langle df, \alpha \rangle d\mu = \int f(\delta\alpha) d\mu.$$

Este operador δ produce la función $\delta\alpha$ a partir de la uno forma α .

Si nuevamente consideramos campos y uno formas como duales los unos a las otras a través de la métrica, podemos ver al operador δ a nivel de campos vectoriales y producir así el concepto de divergencia. En efecto, la divergencia $\text{div} X$ del vector X es la función definida por la expresión

$$\int f(\text{div} X) d\mu = - \int f(\delta X^\flat) d\mu.$$

El Laplaciano Δ de la métrica, actuando sobre funciones, es la composición de los operadores gradiente y divergencia:

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = -\delta df.$$

En coordenadas polares, donde la métrica admite la representación (12) para cierta función g , tenemos que

$$\nabla f = (\partial_r f) \partial r + \frac{1}{g} \partial_\theta f.$$

Por otro lado, dado el campo $X = a \partial_r + b \partial_\theta$, tenemos que

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{g} \left(\partial_r (ga) + \partial_\theta \left(\frac{1}{g} b \right) \right).$$

Luego, el Laplaciano de f está dado por

$$\Delta f = \frac{1}{g} \left(\partial_r (g \partial_r f) + \partial_\theta \left(\frac{1}{g} \partial_\theta f \right) \right) = \partial_r^2 f + \frac{g_r}{g} \partial_r f + \frac{1}{g} \partial_\theta \left(\frac{1}{g} \partial_\theta f \right). \quad (28)$$

El lector puede proseguir de una manera similar, y obtener la expresión para el Laplaciano en coordenadas normales. Si así lo hiciese, se encontrará con algo consistente a una expresión descrita con anterioridad, la cual es perfectamente conocida en el caso del plano Euclidiano.

Volvamos ahora a la expresión (26). Ella nos da la curvatura de Gauss en el punto de coordenadas polares (r, θ) , con r la distancia geodésica medida desde p . Tomando el límite cuando $r \rightarrow 0$ obtendríamos la curvatura en el punto p . ¿Por qué sería el resultado igual a aquel producido por (10)? Usaremos la expresión (28) del Laplaciano en coordenadas polares para demostrar este hecho.

Tenemos que

$$\Delta \log r = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{g_r}{g}.$$

Ahora bien, la función $g(r, \theta)$ satisface las condiciones asintóticas

$$g(0, \theta) = 0, \quad \partial_r g(0, \theta) = 1, \quad \partial_r^2 g(0, \theta) = 0.$$

Luego, la expansión de Taylor a orden dos de la función g nos permite concluir que

$$-3 \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{g_r}{g} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_{rr}}{g},$$

lo cual es precisamente lo que queríamos.

Ejercicio 15. Encuentre el grupo de isometrías G de \mathbb{S}^2 , \mathbb{R}^2 y de la pseudo-esfera H_1 . Dicho grupo actúa sobre la superficie en cuestión transitivamente.

Fije un punto p en la superficie. Demuestre que $H_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ es un subgrupo cerrado de G , y que el grupo factor G/H_p queda naturalmente identificado con la superficie misma. \square

El ejercicio anterior ilustra un punto de vista alternativo que se puede utilizar al estudiar una variedad con alguna estructura geométrica en ella. Comenzamos con una pareja de grupos de Lie (G, H) , donde H es un subgrupo cerrado de G tal que G/H es conexo. Dicho factor es el modelo de la geometría en cuestión, mas el énfasis se traslada ahora al grupo G y la dinámica que este genera sobre los puntos del modelo.

3 Curvatura y Topología

Ahora discutiremos cómo el efecto combinado de la geometría local determina, y es determinado por, la topología de la superficie. En particular, si g es una métrica Riemanniana en la superficie S , estudiaremos la integral de la función curvatura K_g con respecto a la medida $d\mu_g$ que la métrica define,

$$\int_S K_g d\mu_g.$$

Dicha expresión se conoce como la curvatura total de g en S . La integral restringida a un subconjunto dado de S es la curvatura total de g sobre el subconjunto en cuestión.

3.1 La curvatura total sobre triángulos suficientemente pequeños

En una superficie Riemanniana S , definimos primeramente un *triángulo geodésico* como el conjunto acotado por tres segmentos geodésicos cada uno de los cuales termina donde comienza el siguiente. Los tres puntos determinados por los segmentos constituyen los vértices del triángulo en cuestión.

Consideremos un triángulo geodésico suficientemente pequeño de modo tal que este esté contenido en un dominio de S parametrizado por coordenadas polares. Es decir, el triángulo está contenido dentro de la imagen de un cierto abierto bajo la función exponencial desde cierto punto p . Como lo hicimos anteriormente, llamaremos (u, v) y (r, θ) a las coordenadas normales y polares en un entorno de p , respectivamente.

Supongamos adicionalmente que el punto p es uno de los vértices del triángulo, y rotando el triángulo si es necesario, que los lados asociados al vértice p de este estén dados por las geodésicas

$$\begin{aligned}\gamma_1(r) &= \exp_p(rV_1), \quad r \in [0, l_1], \\ \gamma_2(r) &= \exp_p(rV_2), \quad r \in [0, l_2],\end{aligned}$$

donde l_i es la longitud de γ_i , y los vectores velocidades V_1 y V_2 están dados por $V_1 = \partial_u$ y $V_2 = \cos \alpha \partial_u + \sin \alpha \partial_v$, respectivamente, de modo tal que α es el ángulo que los segmentos γ_1 y γ_2 forman en el vértice p .

Los restantes dos vértices del triángulo geodésico son los puntos $q_1 = \gamma_1(l_1)$ y $q_2 = \gamma_2(l_2)$, y el tercero de sus lados es un segmento geodésico γ que conecta a q_1 y a q_2 .

La región triangular bajo consideración es barrida por las geodésicas $r \mapsto \exp_p(rV_\theta)$, donde $V_\theta = \cos \theta \partial_u + \sin \theta \partial_v$ para cada uno de los ángulos θ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \alpha$. Si $l(\theta)$ es la longitud de la porción de dicho segmento geodésico que va de p al lado opuesto a p del triángulo, el tercero de los segmentos geodésicos que definen al triángulo se puede describir como la curva γ dada por

$$[0, \alpha] \ni \theta \rightarrow (l(\theta), \theta),$$

la cual queda parametrizada complementamente por el ángulo θ restringido al intervalo indicado. Así, el vector velocidad de γ no es otra cosa sino

$$\dot{\gamma}(\theta) = \dot{l}(\theta)\partial_r + \partial_\theta = \dot{l}(\theta)X - gY$$

donde los vectores X y Y son los mismos aquellos descritos en (25).

Ya hemos encontrado las derivadas covariantes de X y de Y , cosa que hicimos con el objeto de obtener la expresión (26). Esto nos permitirá estudiar con más detalle el comportamiento de los vectores $\dot{\gamma}$ y ∂_r a lo largo de la curva γ .

En efecto, a lo largo del segmento γ , el ángulo ψ entre los vectores $\dot{\gamma}$ y ∂_r está dado por

$$\psi = \cos^{-1} \left(\frac{\langle \dot{\gamma}, \partial_r \rangle}{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Puesto que γ es una geodésica, tenemos que

$$\frac{d}{d\theta} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{1}{g} \frac{d}{d\theta} \langle \dot{\gamma}, X \rangle = -\frac{1}{g} \langle \dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} X \rangle = \langle \dot{\gamma}, \nabla_Y X \rangle = \frac{g_r}{g} \langle \dot{\gamma}, Y \rangle = -g_r. \quad (29)$$

Podemos ahora deducir el resultado siguiente:

Teorema 7. *En una superficie Riemanniana, sea T un triángulo geodésico contenido en una región parametrizada por coordenadas polares, y sean α , β y γ los ángulos definidos por los lados del triángulo en cada uno de sus tres vértices, respectivamente. Entonces*

$$\int_T K d\mu = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Demostración. Proseguimos como en el preámbulo al enunciado, con los ángulos en p , q_1 y q_2 dados por α , β y γ , respectivamente. En coordenadas polares, la medida Riemanniana está dada por

$$d\mu = gdrd\theta.$$

Así pues, usando (26) y (29), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_T K d\mu &= - \int_0^\alpha \int_0^{l(\theta)} g_{rr} drd\theta = \alpha - \int_0^\alpha g_r(l(\theta), \theta) d\theta \\ &= \alpha + \int_0^\alpha \frac{d\psi}{d\theta}(l(\theta), \theta) d\theta = \alpha + \gamma - \psi(0), \end{aligned}$$

porque sabemos que $g_r(0, \theta) = 1$. El resultado deseado se obtiene usando el hecho que $\psi(0) = \pi - \beta$. \square

Podemos aplicar el teorema en superficies Riemannianas de curvatura arbitraria, más si lo aplicamos en el caso donde K es constante, obtenemos resultados interesantes. Por ejemplo, si consideramos el triángulo geodésico sobre la superficie de la Tierra con vértices en el polo norte, Nairobi y Singapur, su área será de aproximadamente 47,57 millones de kilómetros cuadrados, lo cual representa un 9,31% del área total. Esto sigue del hecho que las ciudades en cuestión están esencialmente localizadas sobre el ecuador, con longitudes de $36,55^\circ\text{E}$ y $103,55^\circ\text{E}$, respectivamente.

Consideremos ahora una región triangular T donde los lados son simplemente segmentos de curvas, no necesariamente geodésicos. Insistamos en que el triángulo sea suficientemente pequeño, contenido en un entorno parametrizado por coordenadas polares, que p sea un vértice con lados adyacentes γ_1 y γ_2 de longitudes l_1 y l_2 , y que γ sea el lado opuesto de longitud l . Parametricemos dichos lados por la longitud de arco y consecutivamente: a γ_1 en $[0, l_1]$ y comenzando en p , a γ en $[l_1, l_1 + l]$ y comenzando en $q_1 = \gamma_1(l_1)$, y a γ_2 en $[l_1 + l, l_1 + l + l_2]$ y comenzando en $q_2 = \gamma(l_1 + l)$. Llamemos $c : [0, l_1 + l + l_2] \rightarrow S$ a la curva cerrada y C^∞ por trozos que se obtiene uniendo a los tres lados en ese orden. Por conveniencia a ser usada posteriormente, definimos $s_1 = l_1$ y $s_2 = l_1 + l$, las longitudes de c desde p a los puntos q_1 y q_2 , respectivamente. La longitud total de la curva cerrada c es $s_3 = l_1 + l + l_2$.

Recordemos que $\{\partial_u, \partial_v\}$ es una base ortonormal de T_pM . Usando el transporte paralelo, podemos extender esta base a campos vectoriales $\{e_1, e_2\}$ que son ortonormales en cada punto del entorno donde las coordenadas normales son válidas.

El vector velocidad de la curva c está bien definido excepto en los puntos p , q_1 y q_2 donde experimenta una rotación dada por los correspondientes ángulos exteriores al triángulo. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\dot{c}(0) =$

$\partial_u = e_1|_p$, y definimos una función $\theta(s)$, suave por trozos, tal que

$$V = \dot{c} = \cos(\theta(s))e_1 + \text{sen}(\theta(s))e_2.$$

$\theta(s)$ es una función bien definida a lo largo de la curva $c(s)$ excepto para los valores del parámetro s correspondientes a los vértices, donde θ experimenta un salto. Mas es de observar que aún así, la singularidad de $\theta(s)$ es integrable. Dicha función mide la rotación total experimentada por el vector V a lo largo de la curva cuando nos movemos desde su punto de partida $c(0)$ al punto $c(s)$. Nótese que usando límites a izquierda y derecha, $\theta(s_1^+) - \theta(s_1^-)$ y $\theta(s_2^+) - \theta(s_2^-)$ son los ángulos exteriores al triángulo en los vértices q_1 y q_2 , respectivamente. Por otro lado, puesto que $c(s)$ se cierra cuando $s = s_3$, tenemos que el ángulo exterior en p está dado por $2\pi + \theta(0^+) - \theta(s_3^-)$.

Sea $N = -\text{sen}(\theta(s))e_1 + \cos(\theta(s))e_2$. Los campos vectoriales V y N son ortonormales y poseen la misma orientación que la de e_1 y e_2 .

Consideremos las formas duales $\{w^1, w^2\}$ a los campos normales $\{e_1, e_2\}$. En el entorno de p donde las coordenadas normales están definidas, el elemento de área $d\mu$ de la métrica no es otra cosa sino $w^1 \wedge w^2 = \frac{1}{2}(w^1 \otimes w^2 - w^2 \otimes w^1)$.

A este punto, necesitamos extender el operador *derivada exterior* d a nivel de uno formas, y lo hacemos de manera similar a la definición (16) de d sobre 0 formas, ó funciones. En efecto, si α es una uno forma, $d\alpha$ será el tensor antisimétrico, ó dos forma, cuya evaluación en cualquier pareja X, Y de campos vectoriales satisface la identidad

$$d\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])). \quad (30)$$

Si expresamos a α en coordenadas locales (x^1, x^2) como $\alpha = \tilde{a}(x)dx^1 + \tilde{b}(x)dx^2$, tal como lo fue hecho anteriormente, tenemos que

$$d\alpha = \left(\frac{\partial \tilde{b}}{\partial x^1} - \frac{\partial \tilde{a}}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2,$$

donde $dx^1 \wedge dx^2$ es la dos forma alternante que evaluada en la pareja $(\partial_{x^1}, \partial_{x^2})$ produce 1/2. Nótese que si f es cualquier función en S , se tiene que $d^2 f = d(df) = 0$.

Usando a la base local ortonormal $\{e_1, e_2\}$, definamos

$$\Omega_g(X, Y) = \langle R_g(X, Y)e_2, e_1 \rangle, \quad (31)$$

donde $R(X, Y)Z$ es el tensor de curvatura de Riemann de la métrica g . La expresión anterior es tensorial en X y Y , y su definición no depende de la base ortonormal orientada $\{e_1, e_2\}$ escogida. Así pues, Ω_g es una dos forma en la superficie Riemanniana S , la forma de Gauss-Bonnet.

Puesto que $\{e_1, e_2\}$ es una base local ortonormal del tangente a S , podemos definir unas formas locales w_i^j por la identidad

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^2 w_i^j e_j. \quad (32)$$

Es decir, si e es cualquier campo vectorial local, $\nabla_e e_i = \sum_j (w_i^j(e)) e_j$. Usando la propiedad métrica de la conexión, es fácil ver que $w_1^1 = w_2^2 = 0$, y que $w_2^1 = -w_1^2$. Un cálculo sencillo nos muestra que

$$\begin{aligned} K_g = \langle R_g(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle &= \langle (\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} - \nabla_{[e_1, e_2]})e_2, e_1 \rangle \\ &= e_1(w_2^1(e_2)) - e_2(w_2^1(e_1)) - w_2^1([e_1, e_2]) \\ &= 2dw_2^1(e_1, e_2), \end{aligned}$$

y por ende,

$$\Omega_g = K_g d\mu_g = \langle R_g(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle w^1 \wedge w^2 = dw_2^1. \quad (33)$$

Observemos que a pesar de definirse a través de una forma local, dw_2^1 es una forma globalmente definida. Por otro lado, la forma así obtenida no es necesariamente exacta, es decir, en general no existe una forma α en S tal que $d\alpha = K_g d\mu_g$.

Retornemos ahora al análisis de la curva c borde de nuestra región triangular T . Puesto que V es de norma 1 donde está definido, la derivada covariante $\nabla_V V$ apunta en la dirección del vector normal N . Definimos así la curvatura geodésica k de c por la expresión

$$\nabla_V V = kN.$$

Dicha función está definida a lo largo de c excepto en los vértices p , q_1 y q_2 , y tenemos que

$$k = V\theta - w_2^1(V) = \frac{d\theta(s)}{ds} - w_2^1(V).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_c k &= \int_0^{s_1} d\theta(s) + \int_{s_1}^{s_2} d\theta(s) + \int_{s_2}^{s_3} d\theta(s) - \int_c w_2^1 \\ &= \theta(s_1^-) - \theta(0^+) + \theta(s_2^-) - \theta(s_1^+) + \theta(s_3^-) - \theta(s_2^+) - \int_c w_2^1 \\ &= \alpha + \beta + \gamma - \pi - \int_c w_2^1, \end{aligned}$$

donde la última igualdad sigue de expresar los ángulos exteriores en los vértices del triángulo T , cuyo borde es c , en términos de sus ángulos interiores α , β , γ . Usando el teorema de Stokes y (33), calculamos la integral sobre c de w_2^1

como la curvatura total de la métrica g sobre T , obtenemos así la siguiente generalización del Teorema 7:

Teorema 7'. *Sea T una región triangular como en el Teorema 7 pero con lados que no son necesariamente segmentos de geodésicas. Sea c la curva cerrada obtenida conectando los tres lados. Entonces se tiene que*

$$\int_T K d\mu + \int_c k = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \quad (34)$$

donde k es la curvatura geodésica de c , es decir, k es la función definida sobre c (excepto en los vértices de T) por la expresión $\nabla_T T = kN$, T y N vectores ortonormales, T tangente a c .

3.2 La curvatura total: el teorema de Chern-Gauss-Bonnet

Para globalizar el resultado estudiado en la sección anterior, necesitamos agregar un par de condiciones topológicas. La primera es que la superficie Riemanniana S sea compacta como espacio topológico. La segunda, que S sea orientable.

Sea M una variedad diferenciable provista de un atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$. Decimos que el atlas es orientable si los Jacobianos de los difeomorfismos locales $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son todos de determinante positivo. La variedad M se dice orientable si está provista de un atlas orientable. Si suponemos el concepto de formas en general, no es difícil demostrar que M es orientable sí, y solo sí, M posee una n -forma que nunca se anula, n la dimensión de M . El argumento natural que demuestra este hecho en el caso de superficies no depende de la dimensión y se puede dar para cualquier n .

Ejercicio 16. Para las variedades diferenciables del Ejercicio 8, demuestre que $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es orientable y que $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ no lo es. En general, demuestre que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es orientable, y que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es orientable sí, y solo sí, n es impar. \square

Ejercicio 17. Demuestre que si M es una variedad diferenciable arbitraria, su tangente TM como variedad diferenciable es orientable. \square

Toda superficie compacta S posee triangulaciones finitas. Una tal triangulación \mathcal{K} consiste de una partición de S en un número finito de triángulos $\{T_i\}$, lados $\{L_i\}$ y vértices $\{V_i\}$, a quienes consideramos con una orientación apropiada, y los pensamos como generadores de grupos libres en dimensiones 2, 1 y 0, respectivamente. Cada lado de un triángulo T_j en \mathcal{K} es un elemento de $\{L_i\}$, y cada vértice de un lado L_j en \mathcal{K} es un elemento de $\{V_i\}$. La intersección de triángulos en $\{T_i\}$ es un subconjunto de $\{L_i\}$, y la intersección de lados en $\{L_i\}$ es un subconjunto de $\{V_i\}$. El conjunto soporte $|\mathcal{K}|$ de \mathcal{K} es por definición la unión de todos los elementos de \mathcal{K} , y la definición nos provee de un homeomorfismo de $|\mathcal{K}|$ en la superficie S .

Usando la noción de borde topológica, obtenemos correspondientes homomorfismos bordes $\{\partial_n\}$, $n = 2, 1, 0$. entre los grupos libres generados por los triángulos, lados y vértices, respectivamente. Y puesto que el borde de una región topológica tiene ella misma borde vacío, la composición de dos de estos homomorfismos es el homomorfismo trivial. A cada nivel i , el cociente del núcleo del homomorfismo en ese nivel por la imagen del anterior define el i -ésimo grupo de homología de S con coeficientes en \mathbb{Z} , un grupo Abelianamente finitamente generado al cual llamamos $H_i(S; \mathbb{Z})$. A nivel dos, entendemos al subgrupo trivial como la “imagen del anterior,” mientras que a nivel cero, el “núcleo del homomorfismo” es entendido como el grupo libre todo en esa dimensión. Modulo isomorfismos, la clase definida por los grupos $H_2(S; \mathbb{Z})$, $H_1(S; \mathbb{Z})$ y $H_0(S; \mathbb{Z})$ es independiente de la triangulación \mathcal{K} de S usada para definirlos.

Sea $T_i(S; \mathbb{Z})$ el subgrupo de elementos torsión de $H_i(S; \mathbb{Z})$. El i -ésimo número de Betti $b_i(S)$ se define como el rango del grupo $H_i(S; \mathbb{Z})/T_i(S; \mathbb{Z})$, y el número de Euler $\chi(S)$ de S es definido como $\chi(S) = \sum_i (-1)^i b_i(S)$. Dada una triangulación finita \mathcal{K} de S , sean t , l y v el número de triángulos, lados y vértices en \mathcal{K} , respectivamente. Entonces,

$$\chi(S) = v - l + t.$$

Consideremos ahora una superficie compacta S con métrica Riemanniana g . Supongamos que S es conexa. Usando la compacidad de S y la función exponencial en cada punto, podemos encontrar una descomposición finita $\{T_i\}$, $\{L_i\}$, $\{V_i\}$ de S en triángulos, lados y vértices, tal que cada triángulo T_i junto a sus tres lados yace completamente dentro de un abierto de S parametrizado por coordenadas geodésicas polares. Así pues, podemos usar la expresión (34) para relacionar la curvatura Gaussiana total sobre cada T_i con la curvatura total de su borde $c_i = \partial T_i$ y los ángulos interiores α_i , β_i y γ_i del triángulo. Si la superficie S es orientable, podemos darle a cada triángulo T_i una orientación de manera tal que si $\sum_i [T_i]$ es el elemento del grupo libre en dimensión dos generado por la suma de todos los triángulos, tenemos que $\partial_2(\sum_i [T_i]) = 0$, y cualquier otro elemento en el núcleo de ∂_2 es un múltiplo entero de $\sum_i [T_i]$. La orientación de cada triángulo induce una orientación de cada uno de sus tres lados, y por ende, una orientación de todos los elementos de $\{L_i\}$. Puesto que cada lado de un T dado en el conjunto $\{T_i\}$ es un lado de exactamente otro triángulo T' en dicho conjunto, la contribución de este lado a la integral $\int_{\partial T} k$ cancela la contribución correspondiente en la integral $\int_{\partial T'} k$ porque dicho lado aparecerá recorrido con orientaciones opuestas en ∂T y $\partial T'$, respectivamente. Si v , l y t son el número de vértices, lados y triángulos en K , usando (34) y la

discusión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \int K_g d\mu_g &= \sum_{i=1}^t \int_{T_i} K_g d\mu_g = \sum_{i=1}^t (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - \pi t \\ &= 2\pi v - \pi t \\ &= 2\pi(v - l + t), \end{aligned}$$

donde las últimas dos igualdades siguen de los hechos siguientes: si sumamos todos los ángulos interiores en un vértice de los triángulos en $\{T_i\}$ que contienen a dicho vértice, obtenemos 2π por cada vértice en $\{V_i\}$, y si contamos cada triángulo tres veces de acuerdo a su número de lados, llegamos a contar cada lado dos veces, de manera tal que $3t = 2l$. Obtenemos así el teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 8. *Sea S una superficie compacta orientable, y sea g una métrica Riemanniana en S . Sean K_g y $d\mu_g$ la curvatura Gaussiana y la forma de área de la métrica g , respectivamente. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K_g d\mu_g = \chi(S), \tag{35}$$

donde $\chi(S)$ es el número de Euler de S .

Nótese que para definir el lado derecho de (35) solamente se requiere el que S sea una superficie topológica. Por otro lado, la definición de una métrica requiere el que podamos hablar del fibrado tangente de S , y a su vez, la definición de la curvatura de la métrica requiere el que podamos diferenciar campos vectoriales al menos un par de veces, y ello requiere el que trabajemos con una superficie S de tipo C^k con $k \geq 3$. El promedio obtenido por el proceso de integración en el lado izquierdo de (35) olvida la alta diferenciabilidad requerida sobre S para poder definirlo.

Es tremendamente resaltante el que podamos interconectar información métrica e información topología, herramienta de poder en ambas direcciones. Por ejemplo, consideremos al toro como nuestra superficie S . Argumentos sencillos nos llevan a la conclusión de que su clase de Euler es cero, y más aún, que este admite una métrica g de curvatura K_g nula. Es concebible el pensar que usando un proceso de deformación continuo podríamos transformar dicha métrica en una cuya curvatura sea una función pequeña en magnitud pero de un signo dado, ó bien positivo ó bien negativo. Más (35) implica que una tal deformación es imposible. Por otro lado, si g es una métrica de curvatura $K_g > 0$ en una superficie compacta orientable S , podemos concluir que S es topológicamente igual a la esfera.

La demostración de (35) que hemos dado es el producto de globalizar el argumento local que nos dió (34) como resultado. Un argumento de Chern

[9, 10] nos permite demostrar dicho resultado globalmente, y la semilla de tal está englosada en las formas definidas por (32) y (33). Este argumento envuelve el primer uso histórico fundamental del fibrado de esferas $T_1M = \{(p, v) \in TM : \|v\|_p = 1\}$, una variedad de dimension $2n - 1$ en el caso cuando la dimension de M es n . Para una superficie tenemos así un fibrado por círculos cuyo espacio total es de dimensión 3.

Los espacios tangentes a S son todos isomorfos a \mathbb{R}^2 como espacios vectoriales. Si S es orientable, los puntos de T_1S nos determinan un sistema referencial ortonormal $\{e_1, e_2\}$ orientado positivamente, donde e_2 coincide con la fibra del punto de T_1S donde estemos parados, y la expresión (32) nos define formas w_i^j en T_1S . La identidad (33) es aún válida, más ha de interpretarse como tal entre dos formas en la variedad tres dimensional T_1S . En realidad tenemos una función proyección $\pi : T_1S \rightarrow S$ que nos permite retraer el fibrado tangente sobre S a un fibrado sobre T_1S , y retraer también la forma de Gauss-Bonnet Ω_g definida en (31) a una dos forma sobre T_1S , la cual no es otra cosa sino $K_g d\mu_g$ así interpretada. Retraemos también la forma w_2^1 a una uno forma en T_1S . Abusando de la notación, llamemos Ω_g y w_2^1 a tales formas en T_1S . En esta última variedad, tenemos la relación $\Omega_g = dw_2^1$ entre la formas así obtenidas.

Consideremos un campo vectorial V en S con un número finito de ceros, ó singularidades como se les llama comunmente. En torno a cada uno de los puntos singulares, removamos una bola geodésica de radio arbitrariamente pequeño. Sobre los puntos no singulares, el campo vectorial define de manera obvia una subvariedad \tilde{S} de T_1S de dimensión dos, con borde consistente de las círculos de T_1S sobre todas las finitas singularidades del campo. Usando el teorema de Stokes, tenemos que

$$\int_{\tilde{S}} \Omega = \sum \int_{\mathbb{S}^1} w_2^1.$$

El lado derecho es el índice del campo V , el cual ya se sabía al momento de Chern coincide con el número de Euler de S . El lado izquierdo coincide con la evaluación (ó integración) de la forma $K_g d\mu_g$ sobre el ciclo fundamental S puesto que los puntos singulares del campo tienen medida cero, y su exclusión del dominio de integración no cambia la integral de la forma indicada.

El argumento de Chern presentado anteriormente para superficies orientables se extiende a variedades M compactas orientables de dimensión par. La evaluación de la forma de Gauss-Bonnet-Chern en tal caso sobre el ciclo fundamental M produce el número de Euler de M , la suma alternada de los rangos de sus grupos de homología. El resultado se conoce hoy día como el teorema de Chern-Gauss-Bonnet.

4 Subvariedades y Homología

En el caso en el cual M es una variedad compacta de dimensión n , podemos definir sus grupos de homología $H_j(M; \mathbb{Z})$, $j = n, \dots, 1, 0$, de manera similar a como se lo hizo para el caso de superficies, donde $n = 2$. Necesitamos usar ahora una triangulación de M dada por un complejo simplicial \mathcal{K} de dimensión n , cuyos elementos debidamente orientados en dimensión j se toman como generadores de un grupo libre $C_j(\mathcal{K})$, $n \geq j \geq 0$. Entre tales grupos definimos homomorfismos bordes $\partial_j : C_j(\mathcal{K}) \rightarrow C_{j-1}(\mathcal{K})$ con la propiedad de que $\partial_{j+1} \circ \partial_j = 0$. La triangulación provee de un homeomorfismo del soporte $|\mathcal{K}|$ de \mathcal{K} en M , donde $|\mathcal{K}|$ es el espacio obtenido como la unión topológica de todos los simplices del complejo. Un simplex de dimensión j es el conjunto de combinaciones lineales convexas de $j + 1$ vectores geoméricamente independientes en \mathbb{R}^N , para algún N suficientemente grande. Las combinaciones lineales convexas de un subconjunto propio de tales vectores es por definición una cara del simplex. Requerimos de \mathcal{K} el que tenga la propiedad de que cada cara de sus simplices sea un simplex en \mathcal{K} , y que la intersección de cualesquiera dos de los simplices de \mathcal{K} sea una cara de cada uno de ellos. La dimensión de \mathcal{K} se define como la mayor de las dimensiones de sus simplices, en caso en el cual haya una tal. Si M es compacta, podemos encontrar una triangulación de M con un número finito de elementos. Definimos $H_j(M; \mathbb{Z}) = \text{Núcleo } \partial_j / \text{Imagen } \partial_{j+1}$, con los correspondientes ajustes para los casos $j = n$ y $j = 0$. La clase de isomorfismos de dichos grupos Abelianos no depende de la triangulación \mathcal{K} de M que sea escogida. Funciones continuas $f : M \rightarrow \tilde{M}$ entre espacios topológicos M y \tilde{M} inducen homomorfismos $f_* : H_j(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_j(\tilde{M}; \mathbb{Z})$. La definición de tal requiere el que usemos triangulaciones de M y \tilde{M} de manera tal que todos los simplices que contengan a un vértice dado cualquiera sean enviados por f en simplices que contengan a la imagen por f del vértice en cuestión, y esto se puede conseguir escogiendo triangulaciones de los espacios topológicos que sean suficientemente “finas”.

Ejercicio 18. Sea $\mathbb{H} = \{q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k : (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4\}$ el cuerpo (no conmutativo) de cuaterniones. Definamos por $Sp(n)$ al grupo de matrices $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{H} tal que $\langle Mx, My \rangle_{\mathbb{H}} = \langle x, y \rangle_{\mathbb{H}}$, donde $\langle x, y \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_i \bar{x}_i y_i$ es la forma bilineal cuaterniónica estandar en \mathbb{H}^n . Provea a $Sp(n)$ de una estructura diferenciable y demuestre así que $Sp(n)$ es una variedad diferenciable de dimension $2n^2 + n$.

Identificando a cuaterniones con puntos en \mathbb{R}^4 , concluya que $Sp(1) = \mathbb{S}^3$. Considere la acción de $Sp(1)$ en $Sp(2)$ definida por la regla

$$q \circ (q_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{q} \end{pmatrix}.$$

para cualquier $q \in Sp(1)$. Demuestre que el cociente de $Sp(2)$ por la relación que identifica a puntos que pertenezcan a una misma órbita de la acción es una variedad diferenciable, y como tal, isomorfa a la esfera \mathbb{S}^7 . Use esta propiedad para concluir que $H_j(Sp(2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ para $j = 0, 3, 7, 10$, y que dicho grupo es trivial en cualquier otro caso. \square

Supongamos que $f : M \rightarrow \tilde{M}$ es una función C^∞ entre las variedades M y \tilde{M} . El rango de f en un punto p es por definición el rango de df_p . Asumamos que la dimensión n de M es menor ó igual que la dimensión \tilde{n} de \tilde{M} . Decimos que f es una inmersión de M en \tilde{M} si el rango de f es igual a n en cada punto de M , y la llamamos una inmersión inyectiva si $f : M \rightarrow f(M) \subset \tilde{M}$ es un difeomorfismo. Si M es un subconjunto de \tilde{M} que tiene su propia estructura diferenciable, decimos que M es una subvariedad inmersa de \tilde{M} si la inclusión $i : M \hookrightarrow \tilde{M}$ es una inmersión, y decimos que M es una subvariedad si la inclusión es una inmersión inyectiva. En el último caso, la llamamos una subvariedad cerrada si como subconjunto de \tilde{M} , M es cerrado.

Sea \tilde{M} una variedad compacta orientable de dimensión \tilde{n} , y sea M una subvariedad compacta orientable de dimensión n . Consideremos la clase $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$. La inclusión $i_*[M]$ nos produce una clase particular en $i_*[M] \in H_n(\tilde{M}; \mathbb{Z})$. El problema que deseamos discutir es el inverso a este: si nos damos una clase $D \in H_n(\tilde{M}; \mathbb{Z})$, ¿existirá una subvariedad M tal que $i_*[M] = D$? De ser así, decimos que una variedad M con esta propiedad realiza a la clase entera D . Entre las subvariedades que realizan a D , ¿cómo escogemos una de manera canónica?

Una de las contribuciones más importantes de R. Thom [20] concierne la primera de las preguntas anteriores, a la cual él le dió hace ya medio siglo una respuesta negativa. Existen variedades con clases de homología que no son realizables por subvariedad alguna. De hecho, como fué demostrado recientemente [6], cualquier generador de $H_7(Sp(2); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ nos da un tal ejemplo. En tal caso, la órbita \mathbb{S}^3 de cualquier punto de $Sp(2)$ bajo la acción de $Sp(1)$ sobre él representa al generador de $H_3(Sp(2); \mathbb{Z})$, y por ende tal generador es realizable por cada una de las órbitas.

No obstante, insisterimos en tratar de formular un método apropiado para responder a la segunda pregunta en el caso en que hayan realizaciones de una clase D dada. El método es métrico, y está esencialmente inspirado por lo ya hecho con geodésicas. Pues si nos damos una clase de homología D de dimensión uno en una variedad Riemanniana, buscamos entre todas las curvas cerradas en la variedad que representan a dicha clase, aquella que tenga la menor longitud. Más para clases $D \in H_j(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ con $j > 1$, la noción de longitud del representante debe reemplazarse por una apropiada. Esto nos fuerza a considerar con más detalle de aquellos dados anteriormente los aspectos métricos de una subvariedad cuya métrica Riemanniana es inducida por la métrica del ambiente.

Dada una variedad Riemanniana (M, g) , la expresión (19) define $\nabla_X^g Y$, la derivada métrica de Y en la dirección de X , y (22) nos da el operador diferencial de orden dos $R^g(X, Y)Z$ el cual mide la diferencia entre el conmutador de las derivadas en dos direcciones y la derivada en la dirección del conmutador de ellas. A partir de este, y en el caso en que $M = S$ es una superficie, definimos la curvatura de la sección de $T_p S$ expandida por X, Y por la expresión (23), la cual por razones dimensionales no depende de la base de $T_p S$ escogida. Mas observemos que la última definición se puede reformular equivalentemente como la traza del operador lineal $L \rightarrow R^g(L, X)Y$, concepto de completo sentido para variedades M de dimensión arbitraria, mas en dimensiones mayores a dos dependiente de los campos X y Y escogidos. Definimos así al tensor de Ricci como

$$r_g(X, Y) = \text{traza } L \rightarrow R^g(L, X)Y = \sum_{i=1}^n g(R^g(e_i, X)Y, e_i), \quad (36)$$

donde $\{e_i\}$ es un sistema referencial ortonormal. Nótese que en principio la función $(X, Y, Z, W) \rightarrow g(R^g(X, Y)Z, W)$ tiene n^4 grados de libertad, mas las simetrías de g y R reducen dicho número y cuando se les cuentan todos, terminamos con tan solo $n^2(n^2 - 1)/12$ de ellos. Cuando $n = 2$, tal número de grados de libertad es 1, como ya lo sabíamos. Las simetrías de tal tensor permiten concluir también que r_g es simétrico, es decir, $r_g(X, Y) = r_g(Y, X)$. La curvatura escalar s_g de g se define como la traza métrica de r_g :

$$s_g = \text{traza } r_g = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n g(R^g(e_i, e_j)e_j, e_i), \quad (37)$$

Supongamos que (\tilde{M}, \tilde{g}) es una variedad Riemanniana compacta de dimensión \tilde{n} . Sea (M, g) una otra variedad Riemanniana inmersa dentro de \tilde{M} isométricamente. Podemos así pensar a M como una variedad en sí misma contenida en \tilde{M} , a la función inclusión $i : M \hookrightarrow \tilde{M}$ una inmersión, y las métricas relacionadas por $i^* \tilde{g} = g$.

La métricas g y \tilde{g} definen operadores derivadas covariantes ∇^g y $\nabla^{\tilde{g}}$ de manera única. Consideremos campos vectoriales X, Y en M , y extendamoslos como campos vectoriales \tilde{X}, \tilde{Y} a un entorno de M en \tilde{M} . Observemos que la métrica \tilde{g} nos permite definir una descomposición ortogonal $T\tilde{M}|_M = TM \oplus \nu(M)$, donde $\nu(M)$ es el fibrado de campos ortogonales a M , definido por $\nu(M) = \{(p, \nu) \in T_p \tilde{M} : p \in M, \tilde{g}(\nu, v) = 0 \text{ para todo } v \in T_p M\}$. Sea π_{TM} la proyección ortogonal sobre TM . Observemos que $\pi_{TM}(\nabla_{\tilde{X}}^{\tilde{g}} \tilde{Y}|_M)$ solo depende de X y de Y , y no de la extensiones suyas que hayamos escogido. Como función de X y Y , $\pi_{TM}(\nabla_{\tilde{X}}^{\tilde{g}} \tilde{Y}|_M)$ satisface las propiedades (a), (b), (c) y (d), página 141, de la conexión métrica ∇^g de g . Por la unicidad de la última, concluimos que $\nabla_X^g Y = \pi_{TM}(\nabla_{\tilde{X}}^{\tilde{g}} \tilde{Y}|_M)$, y si definimos $\alpha(X, Y)$ como la componente normal de

$\nabla_{\tilde{X}}^{\tilde{g}} \tilde{Y} |_M$, tenemos que

$$\nabla_{\tilde{X}}^{\tilde{g}} \tilde{Y} |_M = \pi_{TM}(\nabla_{\tilde{X}}^{\tilde{g}} \tilde{Y} |_M) + (1 - \pi_{TM})(\nabla_{\tilde{X}}^{\tilde{g}} \tilde{Y} |_M) = \nabla_X^g Y + \alpha(X, Y).$$

La relación anterior entre las derivadas covariantes $\nabla^{\tilde{g}}$ y ∇^g es conocida como la identidad de Gauss. La sección α del fibrado $T^*M \otimes T^*M \otimes \nu(M)$ así definida es la segunda forma fundamental de la subvariedad inmersa M . Puesto que el campo $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ es tangente a M , sigue que $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$.

Ejemplo 9. Consideremos a la esfera $\mathbb{S}_a^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de radio a con centro en el origen provista de la métrica Riemanniana g inducida por la métrica Euclídeana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el espacio ambiente. Sean ∇^g y ∇ las derivadas covariantes de estas métricas. Si X y Y son campos tangentes a \mathbb{S}_a^n , tenemos que

$$\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} |_M = \nabla_X^g Y - \frac{1}{a} \langle X, Y \rangle N,$$

donde N es el campo normal a \mathbb{S}_a^n . Puesto que la curvatura $([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z$ de \mathbb{R}^{n+1} es cero, la identidad anterior nos lleva a la conclusión que

$$R^g(X, Y)Z = \frac{1}{a^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y). \quad (38)$$

Sigue fácilmente que

$$r_g(X, Y) = \frac{1}{a^2} (n-1) \langle X, Y \rangle = \frac{1}{a^2} (n-1) g(X, Y),$$

y por lo tanto,

$$s_g = \frac{1}{a^2} n(n-1).$$

Así pues, la métrica g en \mathbb{S}_a^n tiene como tensor de Ricci a un múltiplo escalar de g . Métricas con tal propiedad se dicen ser métricas Einstein. \square

Supongamos se tiene una conexión métrica ∇^g , un campo vectorial X y una uno forma η . Podemos definir la acción de ∇_X^g sobre η por dualidad y de manera única si exigimos que actúe como una derivación sobre el producto tensorial $\eta \otimes Y$, Y un campo vectorial arbitrario, y que commute con la contracción $\eta \otimes Y \rightarrow \eta(Y)$. Sigue entonces que

$$(\nabla_X^g \eta)(Y) = X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X^g Y).$$

Obtenemos así un tensor $\nabla \eta$ definido por

$$(\nabla \eta)(X, Y) = (\nabla_X^g \eta)(Y).$$

Usando (30) y el hecho que ∇^g tiene torsión nula, vemos con facilidad que

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2} ((\nabla_X^g \eta)(Y) - (\nabla_Y^g \eta)(X)).$$

Si $\eta = df$ para una función f , concluimos que $(\nabla_X^g df)(Y) = (\nabla_Y^g df)(X)$. Por lo tanto, $\nabla^g df$ es un tensor simétrico. Este es por definición el Hessiano de f . Si usamos la dualidad entre formas y campos dada por la métrica, puesto que df se corresponde con el gradiente ∇f , obtenemos la definición equivalente $\nabla^g \nabla f$ dada por $(\nabla^g \nabla f)(X, Y) = g(\nabla_X^g \nabla f, Y)$. Es por ello que nos referiremos a $\nabla^g df$ y a $\nabla^g \nabla f$ como el Hessiano de f , sin distinción alguna porque no la hay.

Ejemplo 10. Con algunas imprecisiones notacionales, la segunda forma fundamental de la superficie (7) definida por el gráfico de la función f fué llamada Π con anterioridad (véase la página 132). Puesto que α es una forma bilineal con valores en el fibrado normal, en el caso de una superficie en \mathbb{R}^3 ella se corresponde a una forma cuadrática, la aludida Π . Generalicemos ahora tal resultado.

Consideremos el gráfico M de una función f en \mathbb{R}^n , $M = \{(x, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)\}$. Sea $x = (x^1, \dots, x^n)$, y $F(x, x^{n+1}) = x^{n+1} - f(x)$. Luego, $\nabla F = (-\partial_{x^1} f, \dots, -\partial_{x^n} f, 1)$ es ortogonal a M , $\|\nabla F\| = (1 + \sum_{i=1}^n (\partial_{x^i} f)^2)^{\frac{1}{2}}$, y tenemos que

$$\langle \alpha(X, Y), \nabla F \rangle = -\langle Y, \nabla_X \nabla F \rangle = -\nabla \nabla F(X, Y),$$

el opuesto de la matrix Hessiana de F evaluada sobre los campos X y Y tangentes a M , cuya normalización identificamos con α . Puesto que los vectores $e_1 = (1, 0, \dots, 0, \partial_{x^1} f), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1, \partial_{x^n} f)$ son una base de TM , si $X = \sum u^i e_i$ and $Y = \sum v^i e_i$, la forma bilineal α se identifica con

$$\Pi(u, v) = \frac{1}{(1 + \sum_{i=1}^n (\partial_{x^i} f)^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^n u^i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} v^j \right),$$

donde u y v son los vectores coordenadas de X y Y en \mathbb{R}^n . Dicha expresión se simplifica a la dada con anterioridad cuando $n = 2$ si asumimos que $\nabla f = 0$ en el punto en cuestión. \square

Dado un campo vectorial V en M , llamaremos \tilde{V} a una extensión suya como campo vectorial en \tilde{M} . Consideremos campos X, Y, Z y W en M . La función en M definida por la expresión $\tilde{g}(R^{\tilde{g}}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}, \tilde{W})|_M$ es independiente de las extensiones de los campos consideradas, y por tal motivo la definimos como $\tilde{g}(R^{\tilde{g}}(X, Y)Z, W)$. Por otro lado, la función $g(R^g(X, Y)Z, W)$ está definida de manera intrínseca. ¿Cuál es la relación entre ellas? Usando las propiedades de la conexión $\nabla^{\tilde{g}}$ y la identidad de Gauss, vemos con facilidad que

$$\tilde{g}(R^{\tilde{g}}(X, Y)Z, W) = g(R^g(X, Y)Z, W) + \tilde{g}(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W)) - \tilde{g}(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)). \tag{39}$$

Si K_g es la curvatura seccional de la métrica g , dados campos ortonormales X y Y , tenemos la relación

$$K_{\tilde{g}}(X, Y) = K_g(X, Y) + \tilde{g}(\alpha(X, Y), \alpha(X, Y)) - \tilde{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y)),$$

la cual nos da la curvatura seccional intrínseca de (M, g) en términos de cantidades extrínsecas que dependen de su inmersión dentro de \tilde{M} . Esto abre la posibilidad de buscar la inmersión isométrica de M que sea óptima tratando de hacer alguna de sus curvaturas lo más simple posible. Es común el referirse a (39) como la ecuación de Gauss. Ella nos dió ya la curvatura de Riemann de la esfera (38), expresión que obtuvimos usando el hecho que $\alpha(X, Y) = (1/a)\langle X, Y \rangle N$ en tal caso.

La conexión $\nabla^{\tilde{g}}$ induce la función $(X, N) \mapsto \nabla_X^\nu N = (1 - \pi_{TM})\nabla_X^{\tilde{g}}\tilde{N}$ para X y N campos vectoriales tangente y normal a M , respectivamente. Tal función solo depende de X y N , y satisface las propiedades (a) y (b) de la página 141. Tenemos así una conexión en $\nu(M)$. Definamos al operador de forma A de la inmersión por la expresión

$$A_N X = -\pi_{TM}(\nabla_X^{\tilde{g}} N),$$

de manera tal que

$$\nabla_X^{\tilde{g}} \tilde{N} = -A_N X + \nabla_X^\nu N.$$

Observemos que $\langle \alpha(X, Y), N \rangle = \langle A_N X, Y \rangle$, y la simetría de α es codificada en la simetría de A_N como operador lineal para cada campo normal N . Las curvaturas principales en la dirección N se definen como los autovalores de A_N .

Siguiendo el argumento que nos llevó a (39), podemos obtener una relación del género para la componente normal de $R^{\tilde{g}}(X, Y)Z$, a la cual llamaremos $(R^{\tilde{g}}(X, Y)Z)^\nu$. En efecto, obtenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\tilde{g}} \alpha(Y, Z) &= (R^{\tilde{g}}(X, Y)Z)^\nu + \nabla_Y^{\tilde{g}} \alpha(X, Z) + A_{\alpha(X, Z)} Y - A_{\alpha(Y, Z)} X \\ &\quad \alpha(Y, \nabla_X^g Z) - \alpha(X, \nabla_Y^g Z) + \alpha([X, Y], Z), \end{aligned} \tag{40}$$

identidad conocida como la ecuación de Codazzi.

Sea $\{e_1, \dots, e_{\tilde{n}}\}$ una base ortonormal para la métrica \tilde{g} en un entorno de M tal que $\{e_1, \dots, e_n\}$ constituya una base ortonormal para g en puntos de M . Definimos al vector de curvatura media H de la inmersión como la traza de la segunda forma fundamental α , es decir

$$H = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i).$$

Luego, a partir de la definición y usando (39), obtenemos que

$$r_g(X, Y) = r_{\tilde{g}}(X, Y) - \sum_{i=n+1}^{\tilde{n}} \tilde{g}(R^{\tilde{g}}(e_i, X)Y, e_i) + \tilde{g}(H, \alpha(X, Y)) - \sum_{i=1}^n \tilde{g}(\alpha(e_i, X), \alpha(e_i, Y)).$$

Y calculando las trazas de los tensores de Ricci r_g y $r_{\tilde{g}}$ sobre puntos de M , obtenemos que

$$s_g = s_{\tilde{g}} - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\tilde{n}} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) - \sum_{i,j>n} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) + \tilde{g}(H, H) - \tilde{g}(\alpha, \alpha). \quad (41)$$

Esta última relación entre las curvaturas escalares será nuestro punto de partida para proponer un plan de ataque al problema que plateamos al principio. Si D es una clase de homología uno dimensional, su representante óptimo natural es la geodésica de menor longitud en la clase de D , una subvariedad de dimension uno cuya segunda forma fundamental es idénticamente nula. De hecho curvas isométricamente inmersas en \tilde{M} no poseen curvatura, y en la expresión anterior tenemos $s_g = 0$, $\alpha = H$, y $s_{\tilde{g}} = \sum_{j>1} K_{\tilde{g}}(e_1, e_j)$ en un tal caso. En dimensiones más altas, si M representa a D , la curvatura de (M, g) , la cual podría ser ahora no trivial, debería jugar un papel de importancia en el determinar el mejor de los representantes de D , y el problema deviene en encontrar la mejor manera de sumergir a M en \tilde{M} dentro de los representantes de D . Observemos que $\tilde{g}(H, H)$ y $\tilde{g}(\alpha, \alpha)$ son los términos de orden 1 en $\nabla^{\tilde{g}}$ en el lado derecho de (41). Una manera natural de buscar la inmersión óptima prodría ser aquella en la cual la diferencia de estos términos sea lo más pequeña posible.

Ejemplo 11. La hipersuperficie $x^{n+1} = f(x^1, \dots, x^n)$ en \mathbb{R}^{n+1} tiene vector normal $N = (1 + \|\nabla f\|^2)^{-\frac{1}{2}}(-\partial_{x^1} f, \dots, -\partial_{x^n} f, 1)$ y segunda forma fundamental paralela a N con componentes dadas por

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(1 + \|\nabla f\|^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right),$$

como ya lo vimos en el Ejemplo 10. Las componentes g_{ij} de la métrica sobre la hipersuperficie están dadas por

$$g_{ij} = \delta_{ij} + (\partial_{x^i} f)(\partial_{x^j} f),$$

donde δ_{ij} es la función de los índices con valor 1 si $i = j$ y valor 0 si $i \neq j$. Sigue entonces que

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{1 + \|\nabla f\|^2} (\partial_{x^i} f)(\partial_{x^j} f).$$

El vector H de curvatura media es de la forma $H = hN$, donde

$$h = \sum_{ij} g^{ij} \alpha_{ij} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{(1 + \|\nabla f\|^2)^{\frac{1}{2}}} \nabla f \right) = \frac{1}{\|N\|} \Delta f - \frac{1}{\|N\|^3} \langle \nabla f, \nabla \nabla f \rangle, \nabla f \rangle,$$

donde las expresiones geométricas en el lado derecho son aquellas de la métrica Euclídeana. Similarmente,

$$\begin{aligned} \alpha^{ij} &= \frac{1}{\|N\|} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial_{x^j} f}{\|N\|^3} \sum_l \partial_{x^l} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^i} - \frac{\partial_{x^i} f}{\|N\|^3} \sum_l \partial_{x^l} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^j} \\ &\quad + \frac{\partial_{x^i} f \partial_{x^j} f}{\|N\|^5} \sum_{lr} \partial_{x^l} f \partial_{x^r} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^r}, \end{aligned}$$

expresión a partir de la cual podemos calcular la norma puntual de α . Obtenemos

$$\|\alpha\|^2 = \frac{1}{\|N\|^2} \|\nabla \nabla f\|^2 - 2 \left(\frac{\langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle}{\|N\|^2} \right)^2 + \left(\frac{\langle \langle \nabla f, \nabla \nabla f \rangle, \nabla f \rangle}{\|N\|^3} \right)^2.$$

Usando (41), y puesto que la métrica Euclídeana es plana, vemos que la curvatura escalar s_g de la hipersuperficie está dada por

$$s_g = \frac{1}{\|N\|^2} ((\Delta f)^2 - \|\nabla \nabla f\|^2) - \frac{2}{\|N\|^4} (\Delta f \langle \nabla f, \nabla \nabla f \rangle, \nabla f) - \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle^2.$$

Dicha expresión describe explícitamente a s_g como un operador no lineal de orden 2 en g . Su no linealidad ocurre en los términos de mayor orden, 2 en el caso. Se describe tal propiedad del operador con el término “complemento no lineal”. \square

4.1 La norma L^2 de la segunda forma fundamental de una inmersión

Puesto que M está isométricamente inmersa en (\tilde{M}, \tilde{g}) , definiremos la forma métrica óptima como aquella dada por una inmersión óptima. Esto limita el conjunto de métricas Riemannianas a considerar en M al momento de escoger la mejor entre ellas.

Si estuviésemos considerando todas las métricas Riemannianas posibles, podríamos analizar el funcional curvatura escalar total, dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int s_g d\mu_g. \end{aligned} \quad (42)$$

El integrando en esta expresión es la curvatura escalar s_g de la métrica g , y la medida de integración es la inducida por g . El dominio es el conjunto de métricas Riemanniana respecto de las cuales M tiene volumen uno. La razón para la normalización de la métrica es simple: el funcional (42) es homogéneo de grado $(n-2)/2$ bajo dilataciones $t \rightarrow tg$ de la métrica argumento g , y por

ende el funcional no podría tener puntos críticos aislados si no normalizásemos a g de alguna forma.

Sea $\mathcal{S}^p(M)$ el fibrado de p -tensores simétricos en M . La derivada covariante nos produce una función

$$\nabla_g^p : \mathcal{S}^p(M) \rightarrow \Omega^1 M \otimes \mathcal{S}^p(M),$$

la cual se puede componer con la simetrización para definir así el operador

$$\delta_g^* : \mathcal{S}^p(M) \rightarrow \mathcal{S}^{p+1}(M).$$

Sea entonces

$$\delta = \delta_g : \mathcal{S}^{p+1}(M) \rightarrow \mathcal{S}^p(M) \tag{43}$$

el dual métrico de δ_g^* .

El conjunto de métricas Riemannianas \mathfrak{M} tiene como espacio tangente en cada punto g a la fibra $\mathcal{S}^2(M)$. El producto interno definido por g se puede extender a un producto interno en $T_g \mathfrak{M}$ definiendo $\langle h, k \rangle_g = \sum_{i,j,l,r} g^{il} g^{jr} h_{lr} k_{ij}$ donde h_{lk} es la expresión en coordenadas de h , y h^{lk} es la inversa de h_{lk} . Nótese que el producto interno en g de g y h está dado por $\langle g, h \rangle_g = \sum_{i,j} g^{ij} h_{ij} = \text{traza}_g h$.

Si consideramos una curva $g_t = g + th$ de métricas que comienza en g con velocidad dada por el tensor simétrico h , las variaciones infinitesimales de la curvatura escalar y el volumen de la métrica están dadas por las formulas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_{g+th} \Big|_{t=0} &= -\Delta_g(\text{traza}_g h) + \delta_g(\delta_g h) - \langle r_g, h \rangle_g, \\ \frac{d}{dt} d\mu_{g+th} \Big|_{t=0} &= \frac{1}{2} \text{traza}_g h \, d\mu_g, \end{aligned} \tag{44}$$

donde $\Delta_g = -\delta_g d$ es el Laplaciano de g sobre funciones. Usando el teorema de la divergencia concluimos que

$$\frac{d}{dt} \int s_{g+th} d\mu_{g+th} \Big|_{t=0} = \int \left(\frac{s_g}{2} g - r_g, h \right)_g d\mu_g.$$

Si esta expresión es igual a cero para toda variación de g donde el volumen de M se mantiene constante, g es un punto crítico del funcional (42). En dimensión dos, esto ocurre para toda g pues el mencionado funcional es una contante topológica, hecho ya demostrado por el Teorema 8 de Gauss-Bonnet. Si por otro lado $n \geq 3$, tendremos que el tensor $(s_g/2)g - r_g$ debe ser perpendicular en el sentido L^2 a los tensores simétricos cuyas trazas son ortogonales a las constantes, y esto implica que

$$\frac{s_g}{2} g - r_g = \lambda g,$$

para cierta función a valores reales λ . Las simetrías diferenciales de la curvatura fuerzan a λ a ser una constante, y tomando trazas de ambos lados concluimos que $\lambda = (s_g/2n)(n-2)$, y los puntos críticos son métricas Einstein: $r_g = (s_g/n)g$.

Mas el problema es que las inmersiones isométricas de M en un espacio Riemanniano ambiente fijo no nos permiten en principio deformar a M en todas las direcciones métricas posibles. Tratemos pues de encontrar inmersiones canónicas minimizando las contribuciones globales de algunos de los sumandos en (41), en particular los dos últimos en su lado derecho.

Consideremos la inmersión isométrica $f : M \rightarrow \tilde{M}$ de M en (\tilde{M}, \tilde{g}) . Sea α su segunda forma fundamental, y sea $\|\alpha\|^2$ el cuadrado de su norma como función del punto, es decir, $\langle \alpha, \alpha \rangle$, expresión la cual por supuesto involucra a la métrica de \tilde{M} si bien sobre puntos de M . Si $d\mu = d\mu_M$ es la medida volumen de $f(M)$, definimos entonces

$$\Pi(M) = \int_M \|\alpha\|^2 d\mu. \quad (45)$$

De manera similar, definimos

$$\Psi(M) = \int_M \|H\|^2 d\mu. \quad (46)$$

La subvariedad M se dice minimal si su vector de curvatura media H es idénticamente nulo. En tal caso, M es un punto crítico del funcional volumen, pues H es el gradiente de tal bajo deformaciones de la inmersión. Y evidentemente, variedades minimales realizan el mínimo absoluto del funcional (46). Queremos ahora analizar los puntos críticos de (45) y de (46) bajo deformaciones de la inmersión isométrica de M en (\tilde{M}, \tilde{g}) . El resultado es un tanto más elaborado que aquel concerniente a variedades minimales.

Teorema 12. *Sea M una variedad de dimensión n y codimensión q inmersa isométricamente en (\tilde{M}, \tilde{g}) . Supongamos que $\{\nu_1, \dots, \nu_q\}$ es un sistema referencial ortonormal del fibrado normal de la inmersión tal que $H = h\nu_1$. Luego, M es un punto crítico del funcional (45) sí, y solo sí,*

$$0 = 2\Delta h + 2\langle R^{\tilde{g}}(\alpha(e_i, e_j), e_j)e_i + \nabla_{e_i}^{\tilde{g}}(R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^\nu, \nu_1 \rangle - 2h\|\nabla_{e_i}^\nu \nu_1\|^2 - h\|\alpha\|^2 + 2\text{traza } A_{\nu_1} A_{\nu_k}^2,$$

y para todo m en el rango $2 \leq m \leq q$, tenemos que

$$0 = 2\langle R^{\tilde{g}}(\alpha(e_i, e_j), e_j)e_i + \nabla_{e_i}^{\tilde{g}}(R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^\nu + 2e_i(h)\nabla_{e_i}^\nu \nu_1, \nu_m \rangle + 2he_i\langle \nabla_{e_i}^\nu \nu_1, \nu_m \rangle - 2h\langle \nabla_{e_i}^\nu \nu_1, \nabla_{e_i}^\nu \nu_m \rangle + 2\text{traza } A_{\nu_m} A_{\nu_k}^2.$$

M es un punto crítico del funcional (46) sí, y solo sí,

$$0 = 2\Delta h + 2h(K_{\tilde{g}}(e_1, \nu_1) + \dots + K_{\tilde{g}}(e_n, \nu_1)) - 2h\|\nabla_{e_i}^\nu \nu_1\|^2 - h^3 + 2h\text{traza } A_{\nu_1}^2,$$

y para todo m en el rango $2 \leq m \leq q$, tenemos que

$$0 = 2h \langle R^{\tilde{g}}(\nu_1, e_i)e_i, \nu_m \rangle + 4e_i(h) \langle \nabla_{e_i}^\nu \nu_1, \nu_m \rangle + 2he_i \langle \nabla_{e_i}^\nu \nu_1, \nu_m \rangle - 2h \langle \nabla_{e_i}^\nu \nu_1, \nabla_{e_i}^\nu \nu_m \rangle + 2h \text{traza } A_{\nu_1} A_{\nu_m}.$$

Es estas expresiones, usamos la convención de Einstein y sumamos sobre cualquier índice que aparezca repetido. \square

Una detallada demostración de este resultado puede encontrarse en [18].

4.2 Ejemplos de puntos críticos

En el caso cuando M es una hipersuperficie en \mathbb{S}^{n+1} con su métrica estandar, (41) nos dice que

$$s_g = n(n-1) + \|H\|^2 - \|\alpha\|^2,$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange de (45) y (46) se reducen a

$$2\Delta h + 2h - h\|\alpha\|^2 + 2(k_1^3 + \dots + k_n^3) = 0,$$

y

$$2\Delta h + 2nh + 2h\|\alpha\|^2 - h^3 = 0,$$

respectivamente. En estas expresiones, k_1, \dots, k_n son las curvaturas principales en la dirección normal, y claro está, $h = \sum k_i$ y $\|\alpha\|^2 = \sum k_i^2$.

Dada una hipersuperficie M dentro de una variedad Riemanniana (\tilde{M}, \tilde{g}) , definamos M_t como el subconjunto de puntos cuya distancia geodésica a M es igual a t , una subvariedad para al menos valores suficientemente pequeños de t . Una hipersuperficie M se dice *isoparamétrica* si para cada uno de estos valores de t , el vector de curvatura media de M_t es constante. El estudio y teoría de este tipo de variedad fué desarrollado por Cartan [7]. El ejemplo a continuación se debe a Nomizu [16], y coincide con uno ya presentado por Cartan en el caso en que $n = 4$.

Sea $F(z) = (\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4(x, y)^2$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Luego $M_t^{2n} = \{z \in \mathbb{S}^{2n+1} : F(z) = \cos^2 2t\}$ for $0 < t < \pi/4$ es una familia de hipersuperficies isoparamétricas en \mathbb{S}^{2n+1} . Para cada $t \in (0, \pi/4)$, M_t tiene curvaturas principales $k_1 = (1 + \sin 2t)/\cos 2t$ y $k_2 = (-1 + \sin 2t)/\cos 2t$ con multiplicidad 1, y $k_3 = \tan t$ y $k_4 = -\cot t$ con multiplicidad $n - 1$, respectivamente.

Usando las hipersuperficies isoperimétricas de Nomizu, podemos concluir que el conjunto de puntos críticos de (45) conforman una clase mayor que la clase de variedades minimales. En efecto, consideremos la función curvatura media $h = h(t) = k_1(t) + k_2(t) + (n-1)(k_3(t) + k_4(t))$ de las hipersuperficies M_t^{2n} . Para $n = 2$, M_t^4 es una superficie minimal para el valor de t dado por la raíz de $h(t) = k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) + k_4(t)$ en el intervalo $(0, \pi/4)$, la cual coincide con la raíz de $2h(t) - \|\alpha\|^2 h(t) + 2(k_1^3(t) + k_2^3(t) + k_3^3(t) + k_4^3(t))$. Su

valor es aproximadamente $t = 0.3926990817$, y el correspondiente valor crítico del funcional (45) es 12 veces el volumen de la hipersuperficie.

Sin embargo, para $n \geq 3$, las funciones $2h(t) - \|\alpha\|^2 h(t) + 2(k_1^3(t) + k_2^3(t) + (n-1)(k_3^3(t) + k_4^3(t)))$ y $h(t)$ tienen raíces distintas en el intervalo $(0, \pi/4)$, y obtenemos así un punto crítico de (45) que no es minimal. Por ejemplo, para $n = 3$, la raíz de la primera de estas funciones es $t = 0.3775786497$, y el correspondiente valor crítico de (45) es 18.57333958 veces el volumen. En este caso, la función $h(t)$ tiene raíz $t = 0.4776583091$.

La clase de puntos críticos de (46) conforman también un conjunto más grande que la clase de hipersuperficies minimales. Pues cuando $n = 4$, la función $2n + 2\|\alpha\|^2 - h^2(t)$ tiene una raíz es $t = 0.2153460562$, donde $h(t)$ no es cero. Así, M_t^8 es una hipersuperficie crítica de (46) en \mathbb{S}^9 . Su valor crítico es 147.3776409 veces el volumen. Observemos que la función en cuestión es positiva para n igual a 2 ó 3, respectivamente.

Por otro lado, consideremos al grupo de Lie $Sp(2)$ del Ejercicio 18, y provémoslo de la métrica invariante por traslaciones a izquierda y derecha dada por

$$g \left(\begin{pmatrix} p_1 & -\bar{q}_1 \\ q_1 & r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_2 & -\bar{q}_2 \\ q_2 & r_2 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \bar{p}_1 p_2 + \bar{q}_1 q_2 + \frac{1}{2} \bar{r}_1 r_2 \right),$$

donde los argumentos son vectores tangentes a $Sp(2)$ en la identidad. El propósito del ejercicio es el obtener una fibración

$$\pi : Sp(2) \rightarrow \mathbb{S}^7,$$

cuyas fibras son isomorfas a \mathbb{S}^3 . La proyección π sobre \mathbb{S}^7 no es otra cosa sino el par de cuaterniones (p, q) dados por la primera columna de la matriz en $Sp(2)$ al cual se le aplica[†]. Cada fibra de esta submersión es una esfera totalmente geodésica de dimensión tres dentro de $(Sp(2), g)$, cuya curvatura seccional es constante e igual a 2. Y por ende, las fibras son todas puntos críticos de los funcionales (45) y (46).

4.3 La variedad $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ con la métrica producto

Consideremos $\tilde{M} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ provista de la métrica \tilde{g} dada por el producto de las métricas estándares en cada uno de los factores. Todo campo vectorial X se puede descomponer de la forma $X = X_1 + X_2$, donde $X_i = \pi_i^* V_i$, V_i un campo tangente al i -ésimo factor \mathbb{S}^2 , y π_i la proyección correspondiente. Luego si $Y = Y_1 + Y_2$ con $Y_i = \pi_i^* W_i$, tenemos que $\tilde{g}(X, Y) = \langle V_1, W_1 \rangle + \langle V_2, W_2 \rangle$.

[†]Si proveemos a $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{R}^8 = \mathbb{C}^4$ de la métrica \tilde{g} que dilata la métrica usual de la fibra de Hopf $\mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ por un factor 1/2, la fibración $\pi : (Sp(2), g) \rightarrow (\mathbb{S}^7, \tilde{g})$ se convierte en una submersión Riemanniana, es decir, una fibración donde $T_M Sp(2)$ se descompone en la suma del tangente a la fibra y de un espacio "horizontal" que es isométrico via π a $T_{\pi(M)} \mathbb{S}^7$, esto para todo M en $Sp(2)$.

Los grupos de homología con coeficientes en \mathbb{Z} no triviales de \tilde{M} son \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y \mathbb{Z} en dimensiones 0, 2 y 4, respectivamente, con $\alpha = [\mathbb{S}^2 \times \{q\}]$ y $\beta = [\{p\} \times \mathbb{S}^2]$ una base de $H_2(\tilde{M}; \mathbb{Z})$. Consideremos ahora el problema de representar canónicamente a la clase $\gamma = \alpha + \beta$.

Observemos que las variedades $A = \mathbb{S}^2 \times \{q\}$ y $B = \{p\} \times \mathbb{S}^2$ se intersectan en $p \times q$, y por ende el espacio topológico $D = A \cup B$, el cual representa a la clase $\alpha + \beta$, deja de ser una subvariedad precisamente por la existencia de un tal punto “singular”.

Veamos a cada factor esférico como el plano complejo \mathbb{C} junto con el punto en infinito. Usemos coordenadas complejas z^1 y z^2 en los factores respectivos, con los puntos p y q correspondiendo al origen en cada caso. La singularidad de D es modelada por el conjunto $L = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 : z^1 z^2 = 0, |z^1| + |z^2| \leq 1\}$. Consideremos la bola B en \mathbb{C}^2 con centro en el origen y de radio 1. Removamos de \tilde{M} el par (B, L) y reemplacemoslo por el par (B, L') , donde L' se obtiene perturbando a $\tilde{L} = \{(z^1, z^2) : z^1 z^2 = \varepsilon, |z^1| + |z^2| \leq 1, 0 < \varepsilon \ll 1\}$ de manera tal que $\partial L = \partial L' \subset \partial B$. De esta manera, eliminamos el punto singular de D y producimos una subvariedad D' sin cambiar a \tilde{M} , esto porque quitamos y reintegramos a la bola B . Tampoco cambiamos las clases de homología pues $[D] = [D']$, esto último porque los conjuntos L y L' son homólogos en $(B, \partial B)$.

La subvariedad D' representa a γ , y es homóloga a la diagonal $\mathcal{D} = \{(p, p) : p \in \mathbb{S}^2\}$, también un representante de γ . La última es un punto crítico de (45), como demostraremos a continuación. Y de hecho es minimal, por ende un punto crítico de (46) también.

En efecto, la variedad $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ tiene una estructura compleja natural \tilde{J} proveniente de la estructura compleja J en cada factor. Definamos a $\tilde{\omega}$ por la expresión $\tilde{\omega}(X, Y) = \tilde{g}(\tilde{J}X, Y)$. La forma $\tilde{\omega}$ es alternante, y se tiene que $d\tilde{\omega} = 0$. Luego, el triple $(\tilde{M}, \tilde{J}, \tilde{g})$ es una variedad Kähler. La diagonal \mathcal{D} es una subvariedad compleja de esta, y es un hecho ya clásico que toda subvariedad compleja de una variedad Kähler es minimal. Así, el verificar que \mathcal{D} es un punto crítico de (45) requiere el demostrar que

$$0 = 2\langle R^{\tilde{g}}(\alpha(e_i, e_j), e_j)e_i + \nabla_{e_i}^{\tilde{g}}(R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^\nu, \nu_m \rangle + 2\text{traza } A_{\nu_m} A_{\nu_k}^2,$$

para $m = 1, 2$, y donde $\{e_1, e_2\}$ y $\{\nu_1, \nu_2\}$ son una base ortonormal del tangente y del normal a \mathcal{D} , respectivamente.

La base ortonormal del tangente puede ser escogida de la forma $\{e, \tilde{J}e\}$. Puesto que para cualquier campo normal ν se tiene que $A_\nu \tilde{J} = -\tilde{J}A_\nu$, la traza cúbica es cero porque

$$\begin{aligned} \text{traza } A_{\nu_m} A_{\nu_k}^2 &= \langle A_{\nu_m} A_{\nu_k}^2 e, e \rangle + \langle A_{\nu_m} A_{\nu_k}^2 \tilde{J}e, \tilde{J}e \rangle \\ &= \langle A_{\nu_m} A_{\nu_k}^2 e, e \rangle - \langle \tilde{J}A_{\nu_m} A_{\nu_k}^2 e, \tilde{J}e \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

dada la invariancia por \tilde{J} de $\tilde{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Por otro lado, podemos escoger los

campos $\{\nu_1, \nu_2\}$ de manera que $(\nabla^{\tilde{g}}\nu_i)^\nu_x = 0$ en el punto x donde hacemos las cuentas. Luego,

$$\langle \nabla_{e_i}^{\tilde{g}}(R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^\nu, \nu_m \rangle = e_i \langle R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j)^\nu, \nu_m \rangle = e_i \langle R^{\tilde{g}}(e_j, e_i)e_j, \nu_m \rangle,$$

el cual es cero porque el tensor de curvatura de Riemann es la suma de los tensores de curvatura de Riemann en cada uno de los factores, y cada vector normal tiene componentes iguales en magnitud más opuestas en signo a lo largo de cada factor. Finalmente, descompongamos a $\alpha(e_i, e_j)$ como $\alpha(e_i, e_j) = \langle A_{\nu_l} e_i, e_j \rangle \nu_l$. Luego, tenemos que

$$\langle R^{\tilde{g}}(\alpha(e_i, e_j), e_j)e_i, \nu_m \rangle = \langle A_{\nu_l} e_i, e_j \rangle \langle R^{\tilde{g}}(\nu_l, e_j)e_i, \nu_m \rangle.$$

Si escogemos una base $\{e_i\}$ que diagonalice a A_{ν_l} , usando la forma de la curvatura de cada factor esférico ya dada en el Ejemplo 9, concluimos con facilidad que si $l \neq m$ este término es cero, mientras que resulta ser cero en el caso cuando $l = m$ porque la traza de A_{ν_l} es cero.

4.4 El aspecto ideal de una clase de homología

Escojamos y fijemos una clase de homología $D \in H_n(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ in \tilde{M} , y definamos el espacio

$$\mathcal{M}_D(\tilde{M}) = \{M : M \hookrightarrow \tilde{M} \text{ inmersión isométrica inyectiva, } [M] = D\}. \quad (47)$$

Puesto que la métrica \tilde{g} en \tilde{M} está fija, la eliminamos completamente de la notación usada.

Motivados por la identidad (41), buscamos el representante óptimo de la clase D a través de los puntos críticos del funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_D(\tilde{M}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto \int_M (\tilde{g}(\alpha, \alpha) - \tilde{g}(H, H)) d\mu_g \end{aligned} \quad (48)$$

que sean mínimos. Observemos que los puntos críticos del funcional podrían tener componentes conexas que sean bordes, y que por ende producirían en sí mismos puntos críticos homologicamente triviales. Por ello buscamos los mínimos de menor volumen, en caso en que tales existan. Un tal mínimo de menor volumen se dirá ser un *representante canónico* de D .

Proposición 13. *Consideremos a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ con la métrica producto, y sea \mathcal{D} la subvariedad diagonal representante de la clase de homología entera $D = [\mathbb{S}^2 \times \{q\}] + [\{p\} \times \mathbb{S}^2]$. Luego, \mathcal{D} es un punto crítico de (48) que minimiza el volumen entre todos los representantes de D . De hecho, \mathcal{D} es un punto crítico de (45) y (46) separadamente. En cada caso, el valor crítico es cero.*

Demostración. Una subvariedad compleja de una variedad Kähler es minimal, y minimiza el funcional volumen en el conjunto de subvariedades homólogas a ella. Por lo tanto, la diagonal \mathcal{D} en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ es minimal, y minimiza el volumen entre todos los representantes de la clase D . Esto demuestra que \mathcal{D} en un punto crítico de (46), y el que es un punto punto crítico del funcional (45) fué demostrado ya en la sección anterior.

El que el valor crítico es cero se puede demostrar por un cálculo directo, ó por un argumento que use a (41). Escogemos este último método. En efecto, cualquiera de las proyecciones en los factores del producto nos da un difeomorfismo isométrico de \mathcal{D} y de la esfera de dimensión dos provista de la métrica usual dilatada por el factor 2. Luego, la curvatura escalar de \mathcal{D} es $s_g = 1$ y su volumen es 8π . Por ende, la curvatura escalar total es igual a 8π , el mismo valor que la curvatura escalar de la esfera con su métrica usual como era de esperarse gracias al Teorema de Gauss-Bonnet. Por otro lado, la curvatura escalar del producto de esferas es igual a $s_{\tilde{g}} = 4$, mientras que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\tilde{n}} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) = 1$ y $\sum_{i,j>n} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) = \frac{1}{2}$, respectivamente. Luego, $s_g = s_{\tilde{g}} - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{\tilde{n}} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j) - \sum_{i,j>n} K_{\tilde{g}}(e_i, e_j)$, y puesto que sabemos ya que $\tilde{g}(H, H) = 0$, comparando con la identidad general (41), sigue que $\tilde{g}(\alpha, \alpha) = 0$. El integrando de (48) para la subvariedad crítica \mathcal{D} es idénticamente nulo, y por ende el valor crítico es cero. \square

Teorema 14. *La diagonal $\mathcal{D} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ es un representante canónico de la clase de homología entera $D = [\mathbb{S}^2 \times \{q\}] + [\{p\} \times \mathbb{S}^2]$.*

Demostración. Sabemos por la Proposición 13 que \mathcal{D} es un punto crítico de (48) de valor crítico 0, y de volumen mínimo entre todos los elementos de $\mathcal{M}_D(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$. Así pues, solo necesitamos demostrar que el funcional (48) está acotado inferiormente por cero.

Sea M una subvariedad orientada y conexa isométricamente sumergida en la variedad producto ambiente. Puesto que la curvatura seccional de la métrica ambiente es no negativa, el funcional (48) evaluado en M es no negativo si M tiene característica de Euler no positiva. Luego, podemos asumir adicionalmente que M es topológicamente una esfera.

Sean X, Y una base ortonormal del espacio tangente $T_p M$ en un punto p arbitrario de M . Puesto que ambas proyecciones en los factores esféricos estandares definen inmersiones Riemannianas, vemos que $K_{\tilde{g}}(X, Y) = |X_1 \wedge Y_1|^2 + |X_2 \wedge Y_2|^2$, donde $X = X_1 + X_2$ y $Y = Y_1 + Y_2$ son las descomposiciones de X y Y en sus componentes tangentes a los factores, respectivamente. Por (41) y el teorema de Gauss-Bonnet, concluimos que

$$8\pi = 2 \int_M (|X_1 \wedge Y_1|^2 + |X_2 \wedge Y_2|^2) d\mu - 4\pi \int_M (\|\alpha\|^2 - \|H\|^2) d\mu.$$

El integrando $|X_1 \wedge Y_1|^2 + |X_2 \wedge Y_2|^2$ está acotado inferiormente por $1/2$. Puesto que el menor volumen de los elementos de $\mathcal{M}_D(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ es 8π , concluimos

que

$$4\pi \int_M (\|\alpha\|^2 - \|H\|^2) d\mu \geq \int_M d\mu - 8\pi \geq 0.$$

Luego, (48) está acotado inferiormente por 0, y \mathcal{D} realiza su valor mínimo. Esto completa la demostración. \square

Ejercicio 19. En coordenadas complejas (z^1, z^2) en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, las líneas complejas $z^2 = az^1$, $a \neq 0 \neq 1/a \in \mathbb{C}$, son homólogas a \mathcal{D} . Demuestre que todas ellas son representantes canónicos de la clase D , y en particular, todas ellas están asociadas al mismo valor crítico del funcional (48) en este caso.

Ejercicio 20. Dados enteros arbitrarios m y n , consideremos la clase entera $D_{m,n} = m[\mathbb{S}^2 \times \{q\}] + n[\{p\} \times \mathbb{S}^2]$. Demuestre directamente que el conjunto $\mathcal{M}_{D_{m,n}}$ es no vacío, y trate de probar la existencia de un representante canónico de $D_{m,n}$.

5 Breve perspectiva histórica

El concepto de curvatura para superficies se debe a Carl F. Gauss (1777-1855) [14], quien parece haber dedicado unos 15 años al desarrollo y depuración de sus ideas. Como en varias otras también, su contribución en esta área de las matemáticas fué seminal, y tuvo una influencia determinante en el desarrollo posterior de la Geometría Diferencial.

Para una superficie S inmersa en \mathbb{R}^3 , Gauss definió la función $\zeta : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, la normal de S en cada punto (hoy en día, nos referimos a ella como el *mapa de Gauss*). Definió entonces el valor absoluto de la curvatura comparando las áreas de $\zeta(D_r)$ y de D_r en \mathbb{S}^2 y S , respectivamente, siendo D_r un disco de radio r en S . Con más precisión, definió el mencionado concepto como el límite cuando $r \rightarrow 0$ del cociente de las áreas de $\zeta(D_r)$ y D_r . Aparte de eso, definió el signo de la curvatura considerando la orientabilidad del diferencial de ζ en p , pensado como una aplicación del tangente $T_p S$ en sí mismo.

Gauss estudió la curvatura de una superficie en gran detalle, considerando a la superficie S desde varios puntos de vista: como superficie de nivel, como la imagen bajo una inmersión, ó como el gráfico de una función. En el último caso, demostró la identidad contenida en el Ejercicio 7. Su resultado fundamental la constituyó la demostración de que la curvatura es independiente de la manera como S está contenida en \mathbb{R}^3 , y que es invariante bajo la acción en S de las isometrías, es decir, bajo la acción de transformaciones de la superficie que preservan distancias entre dos puntos cualesquiera. Gauss logró así probar que su concepto de curvatura era una propiedad intrínseca de la superficie, es decir, independiente de la manera como S estuviese contenida dentro del espacio Euclideo ambiente.

Gauss parece haber sabido de la existencia de superficies de curvatura negativa, para las cuales hay un número infinito de geodésicas que pasan por un punto común y que no intersectan a una otra geodésica dada. No obstante, se abstuvo de publicar sus resultados. Nikolay Lobachevsky (1792-1856) comenzó el estudio de geometrías no Euclidianas en 1829. En 1868, Eugenio Beltrami (1835-1900) probó que tal problema no era otra cosa sino el estudio de superficies de curvatura constante negativa, e introdujo el modelo analizado en el Ejemplo 5 [2]. Felix Klein (1849-1925) reinterpreto este modelo en 1871, y popularizó su versión proyectiva, es decir, aquella dada por el disco D_a con la métrica (6). Klein introdujo el término hiperbólica, que hoy día es mucho más popular al referirse a este tipo de geometría. Dos años después de la muerte de Bernhard Riemann (1826-1866) en 1866, se publicó su famosa *clase inaugural* de 1854, conteniendo los fundamentos generales de la Geometría Riemanniana, y donde las superficies pasaron a ser un caso particular. Beltrami conoció de esto, y en 1868 terminó él mismo generalizando el ejemplo de la pseudo-esfera al caso de una dimensión mayor que dos [3].

Gauss estudió el concepto de geodésica para superficies en \mathbb{R}^3 , y su comportamiento cuando la superficie en cuestión tiene curvatura de cierto signo. Demostró que si se usa la longitud de arco como el parámetro de la curva, el vector aceleración de una geodésica debe ser siempre perpendicular a la superficie. Este resultado había sido descubierto por Leonhard Euler (1707-1783) en 1744 [12]. Euler fué estudiante de Johann Bernoulli (1667-1748). Este último, junto con sus hijos, particularmente Daniel Bernoulli (1700-1782), había resuelto diversos problemas variacionales importantes en la primera mitad del siglo XVIII.

Gauss consideró la curvatura total de triángulos geodésicos, la integral de la curvatura sobre una tal región, y probó el Teorema 7 exactamente de la manera como lo hicimos aquí. Así, él descubrió que los triángulos esféricos tienen ángulos que suman a un valor mayor que π , así como también que los triángulos hiperbólicos hacen lo contrario y sus ángulos suman a un valor menor que π , pudiendo concluir entonces que la curvatura influencia la topología de la superficie, abriendo una nueva línea de investigación que aún continúa con vigor hoy día.

El Teorema 7 fué extendido por Pierre O. Bonnet (1819-1892) en 1848 a regiones poligonales, donde las curvas que lo limitan no son necesariamente geodésicas. Esa extensión es el contenido esencial del Teorema 7'. Bonnet publicó su resultado en un artículo bastante difícil de encontrar hoy [4], y no parece haberse percatado que la suma de las expresiones (34) sobre todos los triángulos de una triangulación de una superficie compacta orientable S producen el hecho que la curvatura total sobre S es igual a $4\pi(1 - g)$, siendo g el género ó número de huecos de S . La primera demostración intrínseca de este resultado fué dada por S.S. Chern (1911-2004) en 1944 [9], resultado conocido hoy como

el teorema de Chern-Gauss-Bonnet. Vale la pena mencionar la versión del teorema presentada por Allendoefer [1] y Fenchel [13] unos pocos años antes, una demostración dada tan solo bajo la suposición innecesaria de que S estaba inmersa isométricamente en un espacio Euclidiano de cierta dimensión. El teorema de Chern-Gauss-Bonnet es un caso particular del teorema del índice de Michael Atiyah (1929-) e Isadore Singer (1924-), un notable resultado demostrado en los años 60.

El Teorema 7 puede ser pensado también como un teorema de comparación. En esa área, el Teorema de comparación demostrado por Viktor A. Toponogov (1930-) en 1959 [21] es una herramienta fundamental. Este, y otras ideas de la geometría de comparación pueden encontrarse en el ahora clásico libro [8] de Jeff Cheeger (1943-) y David Ebin (1941-). Es de hacer notar que en los alrededores de 1855, Bonnet demostró [5] que si $K \geq k > 0$, entonces la distancia máxima entre puntos de S , ó diámetro, es acotada superiormente por π/\sqrt{k} . Este resultado es válido más generalmente para superficies completas, si bien Bonnet lo haya demostrado bajo hipótesis más restrictivas de lo necesario.

Muchas de las ideas discutidas aquí fueron desarrolladas antes de que la noción de variedad fuese definida de manera general, ó antes de que algunos conceptos topológicos tales como compacidad fuesen entendidos bien. No es entonces difícil creer que el resultado del Ejercicio 14, debido a David Hilbert [15] (1862-1943), fuese demostrado solamente en 1901. Este contribuyó a recalcar la necesidad de estudiar intrínsecamente los conceptos geométricos.

El último de los temas que hemos abordado contiene una proposición reciente fundamentada en una fórmula clásica. La derivada covariante $\nabla_X^g Y$ para campos vectoriales tangentes a una subvariedad se descompone como la suma de la derivada covariante intrínseca $\nabla_X^g Y$ y la segunda forma fundamental. El uso iterado de tal identidad nos lleva al descubrimiento de una relación entre las curvaturas escalares de la subvariedad y de la variedad ambiente en puntos de la primera, relación en la cual aparecen las curvaturas seccionales mixtas y normales, así como también los cuadrados de las normas del vector de curvatura media y de la segunda forma fundamental. La idea es minimizar la contribución a la curvatura escalar total de la subvariedad que proviene de los últimos dos de los términos mencionados para tratar de producir la forma canónica de la inmersión. Si bien tenemos ya notables ejemplos de puntos críticos del funcional resultante, queda aún mucho por hacer para desarrollar una teoría general sobre la existencia de sus puntos extremos.

La literatura existente para los temas aquí estudiados es bastante amplia. Como punto de partida, el lector puede referirse a [11], y analizar algunos de los artículos citados en su bibliografía. Esta publicación apareció en ocasión de la conmemoración de las 200 años del nacimiento de Gauss, e incluye una traducción al Inglés de su trabajo seminal [14], cuya lectura es aún hoy muy placentera. En lo que se refiere a la última parte, y a manera de establecer

un contacto más fuerte con el tema, le recomendaríamos al lector el estudio de subvariedades minimales como un buen punto de partida, sin llegar a ser este el tema de objeto mismo. La literatura específica sobre el tema de variedades minimales es también amplia, con un influjo tremendo en los últimos años a pesar de su gran edad de más de 250 años. El lector podría tomar sus primeros pasos en el asunto con el precioso artículo de J. Simons [19], y profundizar en el tema a partir de él.

Bibliografía

- [1] C.B. Allendoerfer, *The Euler number of a Riemann manifold*, Amer. J. Math. 62 (1940), pp. 243-248.
- [2] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometría non-euclidea*, Gior. Mat. 6, pp. 248-312 (ver también Op. Mat. 1, pp. 374-405; Ann. École Norm. Sup., 6 (1869), pp. 251-288).
- [3] E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, Annali di Mat. Ser. II, 2 pp. 232-255 (ver también Op. Mat. 1, pp. 406-429; Ann. École Norm. Sup., 6 (1869), pp. 345-375).
- [4] P.O. Bonnet, J. de l'Ecole Polytechnic, 19 (1848), p. 131.
- [5] P.O. Bonnet, *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, 40 (1855), pp. 1311-1313.
- [6] C. Bohr, B. Hanke & D. Kotschick, *Cycles, submanifolds, and structures on normal bundles*, Manuscripta Math. 108 (2002), pp. 483-494.
- [7] E. Cartan, *Familles des surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Annali di Mat. 17 (1938), pp. 177-191.
- [8] J. Cheeger & D.E. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland Publishing Company, 1975.
- [9] S.S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Ann. Math., 45 (1944), pp. 747-752.
- [10] S.S. Chern, *On the curvatura integra in a Riemannian manifold*, Ann. Math., 46 (1945), pp. 674-684.
- [11] P. Dombrowski, *150 years after Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas*, with the original text of Gauss, Astérisque 62, Société Mathématique de France, 1979.

- [12] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne, 1744.
- [13] W. Fenchel, *On total curvature of Riemannian manifolds I*, J. London Math. Soc. 15 (1940), pp. 15-22.
- [14] C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Gottingensis, 1827.
- [15] D. Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc., 2 (1901), pp. 87-99.
- [16] K. Nomizu, *Some results in E. Cartan's theory of isoparametric families of hypersurfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) (6), pp. 1184-1188.
- [17] S.R. Simanca, *Geodésicas y Curvatura: una introducción elemental*, Misc. Math., 35 (2002), pp. 17-40.
- [18] S.R. Simanca, *The L^2 -norm of the second fundamental form of isometric immersions in Riemannian manifolds*, in preparation.
- [19] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. Math. 2 (1968), pp. 62-105.
- [20] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helv. 28 (1954), pp. 17-86.
- [21] V.A. Toponogov, *Riemann spaces with curvature bounded below*, Uspehi Mat. Nauk, 14 (1959), pp. 87-130.

Santiago R. Simanca
Departamento de Matemáticas y Estadística,
Universidad de Nuevo México,
Albuquerque, NM 87131, EEUU
e-mail: santiago@math.unm.edu

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

El problema del área en los *Elementos* de Euclides

Douglas Jiménez

Resumen. El estudio riguroso del área de una figura plana – así como la medida de cualquier magnitud – necesita del concepto de número real para una completa comprensión. En este artículo veremos cómo los matemáticos griegos clásicos pudieron resolver el problema del área, aún sin disponer de una elaboración precisa del conjunto de los números reales, usando como principal herramienta la proporción o analogía, a manera de comparación de figuras geométricas. Concentraremos el tratamiento del tema en los *Elementos* de Euclides, por considerar que cada uno de los aspectos principales de la materia encuentra expresión en alguna de las proposiciones de este texto.

Abstract. The rigorous study of the area of a plane figure – as well as the measure of any size – requires the concept of real number for a complete understanding. In this article we will see how classical Greek mathematicians could solve the problem of the area, even without having a precise elaboration of the set of real numbers, using as main tool the proportion or analogy, as a comparison of geometric shapes. Treatment of the subject focus on the *Elements* of Euclid, considering that each of the main aspects of the subject finds expression in some of the propositions of this text.

1. Introducción

Hace algunos años (más de treinta, estoy seguro) leí en alguna revista algo panfletaria la siguiente afirmación:

Los críticos son a la literatura lo que los eunucos al harem: saben todo lo que pasa adentro, pero no pueden hacer nada.

A despecho de lo que pueda pensar algún crítico literario de una afirmación tan lapidaria acerca de su oficio, siempre me pregunto por qué razón especial quedó la frase clavada en mi memoria. No tuve la respuesta hasta comenzar a leer los textos de los matemáticos griegos clásicos, en particular los *Elementos* de Euclides.⁽¹⁾

Pues la cita –el nombre de cuyo autor, afortunada o desafortunadamente, olvidé– es todo un símil de la exposición completa de una proposición de este texto clásico: primero el enunciado: “*Los críticos son a la literatura lo que los eunucos al harem*”, y finalmente la demostración: “*saben todo lo que pasa adentro, pero no pueden hacer nada*”. Por supuesto, no espero que todo el mundo esté de acuerdo en que tal demostración está redactada con la misma rigurosidad con la que se puede leer, por ejemplo, el teorema de Pitágoras (que es la proposición 47 del primer libro), mas lo que quiero resaltar ahora no va orientado a la rigurosidad sino a la estructura.

En ese sentido me interesa aún más que la demostración el propio enunciado, pues los griegos eran maestros en el arte de la analogía. El siglo XVII⁽²⁾ inventó una notación para recortar el tamaño de una construcción gramatical que se usaba con harta frecuencia: los dos puntos (:) significaban “es a” y una pareja de puntos dobles (::) significaba “como”; así el enunciado de la afirmación que nos ha ocupado quedaría abreviado de la forma:

crítico : literatura :: eunuco : harem

construcción con la cual el carácter analógico queda de bulto al presentar como equivalentes dos afirmaciones de comparación, cada una de las cuales recibió el nombre genérico de *razón*. De esta manera, la razón

crítico : literatura

se hace equivalente a la razón

eunuco : harem

y así se logra que palabras disímiles y de improbable combinación hagan pleno sentido en una oración.

Euclides dedicó el quinto de los trece tomos de su obra *Elementos*⁽³⁾ para el estudio de la razón (λόγος, logos) y de la proporción (ἀνάλογον, analogía), trabajo en el que recoge los frutos de un matemático genial de la escuela platónica que respondía al nombre de Eudoxo. Imposibilitado por espacio de dar detalles⁽⁴⁾ me queda el recurso de citar la definición V.3 (tercera definición del libro V) de los *Elementos*:

Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas

con lo cual quedan al descubierto dos debilidades de mi propio intento de comparación.

En primer lugar: *magnitudes homogéneas*. Es difícil pensar en alguna homogeneidad entre *crítico* y *literatura* (o *eunuco* y *harem*) como conceptos; pero después de todo lo que Euclides tenía en mente era matemática y eso reduce el campo de acción del pensamiento. Luego está lo de *respecto a su tamaño*, en tanto la analogía que ofrecí trata más de cualidad que de cantidad.

No obstante –para no perder todo el esfuerzo– seguiré empeñado en que mi interés se dirige más a la estructura que al contenido. La propia definición euclidiana de razón deja vacíos en su contenido; para el lector de los *Elementos* nunca estarán del todo claros los conceptos de magnitud y tamaño. A pesar de ello, el autor no tiene problemas en presentarnos proposiciones como la XII.2:

Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros

en la seguridad de que la analogía hará su trabajo aún dejando indefinida parte de la naturaleza de los términos que la componen.

Al matemático moderno este dilema le parece extraño; después de todo, la proposición anterior se puede despachar con una simple ecuación:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

o, más fácil todavía:

$$A = \pi r^2;$$

pero esto sólo muestra que el avance tecnológico es una muy poderosa forma de ir desdibujando la verdadera apariencia de los actos históricos. La proposición XII.2 no compara números, *compara figuras geométricas*: compara círculos con cuadrados, esto es, figuras planas de frontera curva con figuras planas de frontera rectilínea.

El punto central del asunto es que el matemático griego carecía del concepto de número real. Cuando se dice que los pitagóricos demostraron la irracionalidad de $\sqrt{2}$ no se está diciendo toda la verdad; había mucha más geometría que aritmética en el auténtico proceder griego y nuestra visión del asunto es absolutamente aritmética. Esto puede explicarse además por qué no conseguimos en los *Elementos* u otros textos griegos precisiones conceptuales relativas a términos tales como longitud, área y volumen: el número real es inherente a ellas. La vaguedad conceptual se sustituye entonces por la analogía que da un marco

suficientemente aceptable a la comprensión, con la ayuda siempre presente de la intuición.

Una analogía física podría ayudar.⁽⁵⁾ Imaginemos una moneda construida de cierto material y con determinado espesor. Usando el mismo material construyamos un cuadrado cuyo lado sea el diámetro de la moneda; debemos suponer también que el espesor del cuadrado es el mismo que el de la moneda. Si construimos ahora (ver la figura 1) una balanza que mantenga el equilibrio entre la

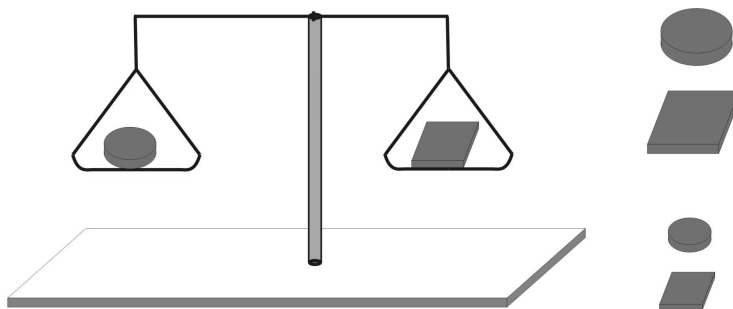


Figura 1: Balanza de proporcionalidad

moneda y el cuadrado, es evidente que esta balanza ha de tener los brazos desiguales, siendo más largo aquel del lado del cual está la moneda. La afirmación “*los círculos están entre sí como los cuadrados de sus diámetros*” significa que esta misma balanza equilibrará cualquier otra moneda y cuadrado construidos con las mismas especificaciones, aún cuando varíemos el diámetro de la moneda. Esto es: si construimos moneda y cuadrado con el mismo material y espesor.

Es claro que para concebir lo expresado en el párrafo anterior no necesitamos los números. La balanza (que, además, es una balanza ideal) juega el papel de nuestra constante de proporcionalidad π . En realidad, esta última fue concebida para despojar la proporcionalidad o analogía de cualquier alusión física o extramatemática, pero fue una concepción muy posterior en el tiempo.

2. Triángulos y paralelogramos

La consideración de problemas de área comienza muy temprano en los *Elementos*, en el mismo primer libro. En efecto, las proposiciones I.35 a I.41 contienen todas las formas posibles de entender las ideas que hoy representamos por las ecuaciones $A = bh$ y $A = \frac{1}{2}bh$, para las áreas de los paralelogramos y los triángulos, respectivamente.

Hay en tales proposiciones un trasfondo terminológico que las hace interesantes históricamente. Antes de ellas Euclides había usado la igualdad con un sentido estricto de congruencia, y solo había aplicado la idea a rectas,** ángulos y triángulos. Al llegar a la proposición 35, sin previo aviso el autor afirma igualdad de paralelogramos aún teniendo formas distintas, esto es, afirma *igualdad de contenido*. ¿Cómo asumir la igualdad en este sentido? Por un lado, ayuda la imagen ya comentada de la balanza en la página 182: figuras iguales equilibrarían una balanza de brazos iguales. Pero hace falta un sustento teórico y Euclides lo consigue con las nociones comunes 2 y 3 del primer libro, las cuales afirman que si a iguales se suman o restan iguales los resultados son iguales.

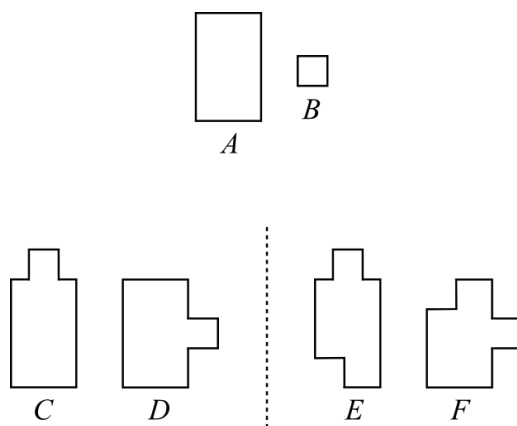


Figura 2: Igualdad de figuras en el sentido de áreas

La figura 2 muestra cómo se pueden aplicar estas nociones. En la parte superior del dibujo tenemos un rectángulo A y un pequeño cuadrado B . En la parte inferior a la izquierda de la línea punteada se construyen dos figuras C y D , la primera tomando un rectángulo igual a A y colocando en el centro de su lado superior un cuadrado igual a B ; la figura D se forma colocando al centro del lado derecho de un rectángulo como A un cuadrado como B ; C y D resultan iguales porque provienen de sumar iguales a iguales. Por el lado derecho de la línea punteada tenemos dos figuras E y F que provienen: E de quitar un cuadrado como B en la esquina inferior izquierda de C y F de quitar un cuadrado idéntico a la esquina superior izquierda de D ; por restar iguales de iguales resulta ser E igual a F .

**La palabra *recta* en la matemática griega clásica se aplicaba a lo que hoy llamamos *segmento*. La infinitud de la recta era solo una potencialidad de prolongación en cualquier sentido, permitida por el segundo postulado.

La proposición I.35 dice:

Los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí

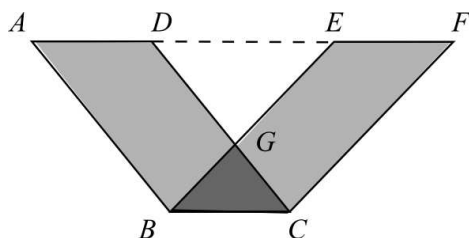


Figura 3: Proposición I.35 de Euclides

y la figura 3 ayuda a entender la demostración de Euclides.

Los paralelogramos en cuestión son $ABCD$ y $EBCF$, quienes comparten la base BC y suben ambos hasta la paralela AF . Se debe observar que el triángulo BCG (en gris oscuro en nuestra figura) es común a los dos paralelogramos, por lo que la demostración estaría lista si comprobáramos la igualdad de los trapecios en gris claro ($ABGD$ y $FEGC$). Para hacer evidente tal igualdad observamos que ambos trapecios provienen de quitar el triángulo DEG (en blanco) a los triángulos EAB y FDC que son iguales (congruentes) por la igualdad de sus tres lados. Esta igualdad de lados la justifica Euclides por consideraciones sobre paralelas.⁽⁶⁾

La demostración anterior refuerza nuestro punto principal: *no hay números involucrados en el discurso*; se demuestra a partir del reacomodo de las piezas geométricas, casi como un rompecabezas, lo que le da un carácter algo lúdico. Esta característica es común a todas las demostraciones de áreas que encontramos en los libros I y II,⁽⁷⁾ pero cambia radicalmente (sin perder su carácter estrictamente geométrico) a partir del libro VI, donde los problemas se resuelven con la teoría de la proporción estudiada en el libro V.

No daremos la demostración de las otras proposiciones relacionadas, pero sí sus enunciados:

Proposición I.36

Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Proposición I.37

Los triángulos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Proposición I.38

Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Proposición I.39

Los triángulos iguales que están sobre la misma base y en el mismo lado, están también entre las mismas paralelas.

Proposición I.40

Los triángulos iguales que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están también sobre las mismas paralelas.

Proposición I.41

Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

Proclo,⁽⁸⁾ hace un interesante análisis de la proposición I.35 y siguientes. En principio, se refiere a la proposición como el primer *teorema de lugar geométrico* de los *Elementos*. Proclo explica:

Llamo “teoremas de lugar geométrico” aquellos en los cuales la misma propiedad se cumple en toda la extensión de un lugar geométrico, y llamo “lugar geométrico” a la posición de una línea o una superficie que define una propiedad única.

...

Porque todo el espacio entre las rectas paralelas es el lugar geométrico de los paralelogramos contruidos sobre la misma base, de los cuales el autor de los *Elementos* demuestra que son iguales unos con otros.⁽⁹⁾

Posteriormente, Proclo califica este teorema como “paradójico” pues si se usa como patrón el rectángulo que tiene la base común de la hipótesis, resultan ser iguales a él algunos paralelogramos que tienen los lados no paralelos a la base de mucha mayor longitud.

En todo caso, en el libro VI –también lo menciona Proclo– la primera proposición dice:

Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases

proposición que abarca por sí sola el contenido de I.35 a I.38, aunque precise para su demostración de I.38 y I.41 así como de la teoría de la proporción desarrollada en el libro V.

Las dos proposiciones a continuación (I.42 y I.43) son un importante apoyo para Euclides en buena cantidad de resultados relacionadas con el tema. La primera es un problema:

Construir en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado

el cual es resuelto con una ilustración como la de la figura 4, en la que se

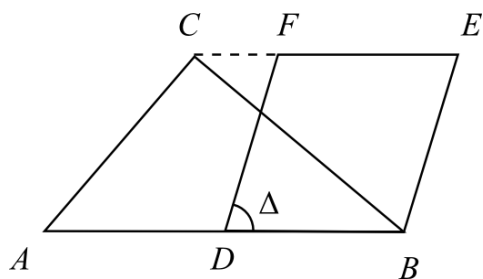


Figura 4: Proposición I.42 de Euclides

muestra que el paralelogramo buscado se construye con la mitad DB de la base AB , trazando el lado DF en el ángulo Δ dado; el punto F está, por supuesto, en la paralela a AB por C .

Por su parte I.43 se refiere a los *complementos*, que son los paralelogramos en gris claro que vemos en la figura 5; éstos aparecen a ambos lados de la diagonal cuando desde un punto cualquiera de ella se trazan paralelas a los lados del

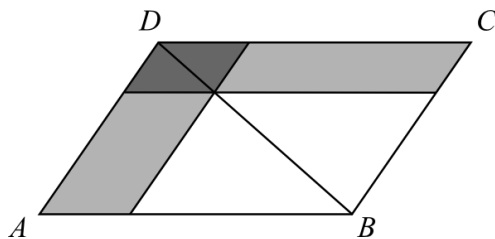


Figura 5: Proposición I.43 de Euclides

paralelogramo. La proposición dice:

En todo paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.

La demostración procede observando que la diagonal define dos triángulos iguales (congruentes) en cada uno de los paralelogramos que cruza, lo que hace tres pares de triángulos congruentes; los complementos son las piezas que quedan de los triángulos mayores al retirar los triángulos menores.

De nuevo, ambas demostraciones tienen un carácter irreductiblemente geométrico que no precisa de números, como no sea para llevar recuento de las figuras involucradas.

3. El libro II y las identidades y ecuaciones de segundo grado

El segundo libro de los *Elementos* de Euclides está dedicado en su totalidad a problemas de área. Es el más corto de los trece: consta de solo catorce proposiciones asociadas con triángulos y rectángulos, precedidas de dos definiciones, la segunda de las cuales tiene relación con la figura 5 que acabamos de ver. El término definido es extraño para nosotros y, de hecho, lo conocemos por su nombre griego: *gnomon* (γνώμων); identifica a la zona completamente gris de la figura 5, esto es los complementos y uno cualquiera de los paralelogramos internos alrededor de la diagonal. Esta forma geométrica es fundamental para muchas de las demostraciones euclidianas relacionadas con áreas de paralelogramos.

Las proposiciones del libro II han recibido por algunos la denominación de *álgebra geométrica*. La razón de este nombre proviene de que las proposiciones pueden ser interpretadas en términos de identidades o ecuaciones de segundo grado. La construcción de un rectángulo con dos lados indeterminados se puede asociar modernamente al producto ab de los números a y b que son la longitud de los lados; un producto de esta naturaleza es un término de segundo grado.

Por ejemplo, la proposición II.1 dice:

Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos.

La figura 6 ilustra la proposición: las dos rectas son AE y AF , la primera de las cuales se divide en los segmentos AB , BC , CD , DE (número de segmentos que puede incrementarse) los cuales se usan como lado de rectángulos parciales con rectas iguales a AF . Como es obvio, el rectángulo total se forma de la

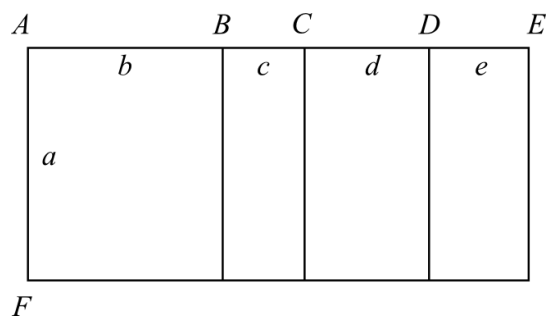


Figura 6: Proposición II.1 de Euclides

unión de los rectángulos parciales. Si usamos las letras minúsculas del dibujo como representación moderna de las longitudes de los segmentos indicados, la proposición en cuestión equivale a la propiedad distributiva:

$$a(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae.$$

La proposición II.4 afirma:

Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.

Un poco de atención le mostrará al lector que la proposición se puede interpretar por la identidad algebraica:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

pero Euclides la demuestra a partir de la figura 7 en la que construye un cuadrado $ABCD$, a partir de la recta AB como lado. Esta recta se divide en un punto E de ella, de manera arbitraria. Euclides traza la diagonal BD y la paralela a AD por E , las cuales se cortan en un punto J , sobre el cual se traza la paralela GH a AB . Por consideraciones angulares sobre paralelas cortadas por secantes, Euclides demuestra que las figuras en gris son cuadrados y las figuras en blanco dos rectángulos congruentes, lo que significa que el cuadrado mayor está hecho de los dos cuadrados menores y los dos rectángulos congruentes. Las longitudes las hemos indicado en el dibujo por las letras a y b pero, por supuesto, éstas no aparecen en el diagrama original.

La proposición siguiente (II.5) es una de las tantas donde se usa el gnomon en la demostración; reza así:

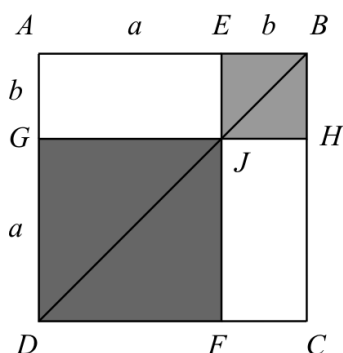


Figura 7: Proposición II.4 de Euclides

Si se corta una línea recta en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

Al estudiante de matemática de hoy se le dificulta la lectura de estos textos escritos en lenguaje arcaico, en un estilo de mucha verbalización que se aleja de la profusión actual de símbolos específicos, para la encriptación del discurso matemático en muy poco espacio gráfico. Sin embargo, es la interpretación de este lenguaje lo que hace interesante la investigación histórica, pues es así que puede medirse en su verdadera dimensión la proeza de estos grandes pensadores.

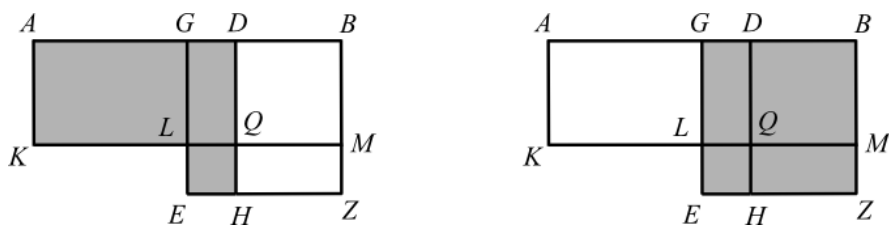


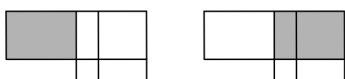
Figura 8: Proposición II.5 de Euclides

La figura 8 ilustra el enunciado por la vía de hacer dos réplicas del dibujo mostrado en el texto euclidiano. En ambos se tiene la recta AB en la que se marcan dos puntos internos: G , el punto medio de ella y D , un punto cualquiera distinto de G . Se construye: (1) el rectángulo de lados AD , AK con AK igual

a DB ; (2) el cuadrado $GBZE$, cuyo lado es la mitad de la recta AB ; (3) el cuadrado $LQHE$, de lado LQ igual a GD (la recta que está entre los puntos de sección) y (4) la recta DQ paralela a AK . La proposición afirma la igualdad de las dos zonas grises de ambas réplicas.

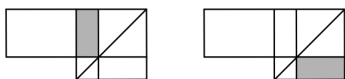
Enfrentados a la demostración, vale de nuevo el comentario acerca de la dificultad del lenguaje, pero la esencia de la prueba la podemos ilustrar de una manera bastante elemental en apenas cuatro pasos. Para ello usaremos nuevas réplicas a pares en una escala bastante más pequeña.

Primer paso



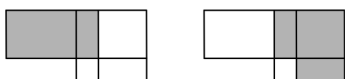
Los rectángulos sombreados son iguales, pues uno de sus lados es la mitad de la recta y el otro una recta igual al “segmento desigual”.

Segundo paso



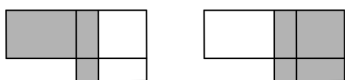
Los rectángulos sombreados son iguales, pues son los complementos respecto a la diagonal del cuadrado de la mitad de la recta, tal como lo establece la proposición I.43 (ver página 186 de este artículo).

Tercer paso



A la figura del lado izquierdo del primer paso se le añade el complemento vertical, mientras que a la de la derecha se le añade el complemento horizontal. El resultado es la igualdad del rectángulo de la izquierda con el gnomon de la derecha.

Cuarto paso



Solo queda añadir a ambas figuras el cuadrado pequeño para obtener el resultado que ofrecía la figura 8.

Insistimos: es solo un juego de comparación de figuras geométricas; la interpretación algebraica es a posteriori. En este caso, para la figura 8 serían válidas las siguientes igualdades:

$$AD = a, \quad DB = b, \quad AG = GB = \frac{a+b}{2}, \quad GD = \frac{a-b}{2},$$

admitiendo las dos primeras de manera arbitraria y las dos últimas como consecuencia de ellas. Entonces, la traducción algebraica del teorema es

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

fórmula que se usó para conseguir ternas pitagóricas, esto es soluciones enteras de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

El libro continúa por este estilo y hasta la proposición II.10 todas las proposiciones (referentes bien sea a rectángulos, bien sea a triángulos, bien sea a ambos) admiten una interpretación en forma de identidad algebraica de segundo grado. La proposición II.11 cambia algo la tendencia pues en vez de una identidad, su interpretación se hace mediante una ecuación (también de segundo grado, por supuesto); corresponde al tipo de proposiciones euclidianas que la posteridad conoció como *problemas*. Dice así:

Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

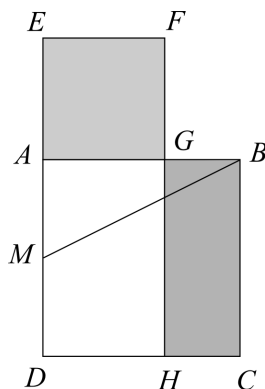


Figura 9: Proposición II.11 de Euclides

En la figura 9 tenemos el planteamiento gráfico del problema: la recta AB ha de cortarse por un punto G de ella de manera que el cuadrado y el rectángulo sombreados sean iguales. En el dibujo, $ABCD$ es el cuadrado de lado AB . La determinación del punto G , en el puro estilo geométrico de los *Elementos*, es una delicia que el lector no debería perder en el texto euclidiano; pero podemos acercarnos a su interpretación algebraica haciendo notar que la clave está en el trazo de la recta BM , donde M es el punto medio del lado AD del cuadrado

$ABCD$. Evidentemente BM es mayor que AM ; lo que no es tan evidente es que su diferencia hace el lado del cuadrado buscado. El lector disfrutará realizando la demostración.⁽¹⁰⁾

De las tres proposiciones que faltan, II.12 y II.13 constituyen lo que hoy llamamos el *teorema del coseno*. Al lector cuya curiosidad pueda ser despertada por el hecho de que se trata de un teorema trigonométrico en una época en la que todavía no había nacido la trigonometría, le daré satisfacción con el enunciado de II.12:

En los triángulos obtusángulos el cuadrado del lado que subtiende al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

La proposición II.14, última del libro, define el problema del área en su parte más esencial:

Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada.

El problema del área fue el *problema de la cuadratura*, vale decir, dada una figura plana conseguir un cuadrado igual a la figura dada, donde la igualdad tiene el sentido explicado en la página 183; II.14 garantiza la solución para cualquier figura poligonal con un número finito de lados.⁽¹¹⁾ Esta proposición se relaciona de manera directa con VI.13, problema en el que se exige la búsqueda de una

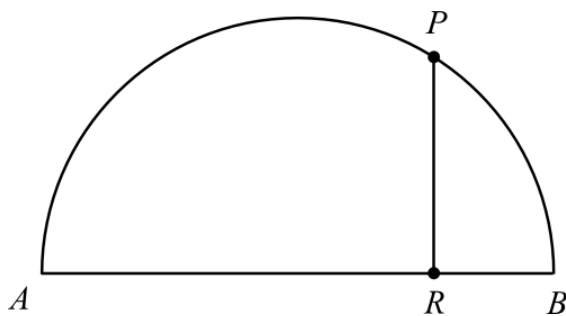


Figura 10: Proposición II.14 de Euclides (relacionada con VI.13)

media proporcional entre dos magnitudes dadas. Ambas proposiciones caracterizan a la circunferencia de diámetro AB (figura 10) como el lugar geométrico de los puntos P tales que la recta PR —con R en la recta AB — es perpendicular a AB y el cuadrado de PR es igual al rectángulo formado con AR y RB .⁽¹²⁾

Las demostraciones, sin embargo, difieren considerablemente. VI.13 se apoya en la teoría eudoxiana de las razones y proporciones estudiada en el libro V; carente de este recurso para II.14, Euclides hace uso del teorema de Pitágoras (I.47) y de la proposición I.45, que es una generalización de I.44. Esta última nos interesa de manera muy especial pues constituye el primer *teorema de aplicación de áreas*, tema de la próxima sección de este artículo.

4. Problemas de aplicación de áreas

La proposición I.44 se plantea como un problema:

Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado.

Para entender el sentido del verbo en este problema, vale la pena leer nuevamente a Proclo:

Se dan tres datos en este problema: una línea recta, a lo largo de la cual se aplicará el área, de modo que la recta como un todo sea un lado del área; un triángulo al cual debe ser igual el área aplicada y un ángulo al cual debe ser igual el ángulo del área. De nuevo, es evidente que cuando el ángulo es recto, el área aplicada es un cuadrado o un rectángulo y cuando es agudo u obtuso, el área será un rombo o un romboide.

...

Como ya se ha dicho, aplicación y construcción no son la misma cosa. La construcción le da el ser a la figura completa, tanto a su área como a todos sus lados, mientras que la aplicación se genera a partir de un lado dado y construye el área sobre él, ni cubriendo menos de la longitud de la línea ni excediéndola, si no más bien usándola como uno de los lados del área encerrada.⁽¹³⁾

La figura 11 muestra el diagrama euclidiano y los datos indicados por Proclo: el triángulo T , cuya área se reproducirá en un paralelogramo; el ángulo Δ , que dará la inclinación de dos lados del susodicho paralelogramo y la recta AB que será uno de los lados del paralelogramo. Los pasos son los siguientes:

- Usando la proposición I.42 (ver Pág. 186 de este artículo), Euclides construye el paralelogramo $BCDE$, en la prolongación por B de la recta AB , de manera que este paralelogramo sea igual al triángulo T y sus lados (los que concurren en el vértice B) estén en un ángulo igual a Δ .
- Por A se traza la paralela a BE y por E se traza la paralela a AB . Ambas se cortan en F .

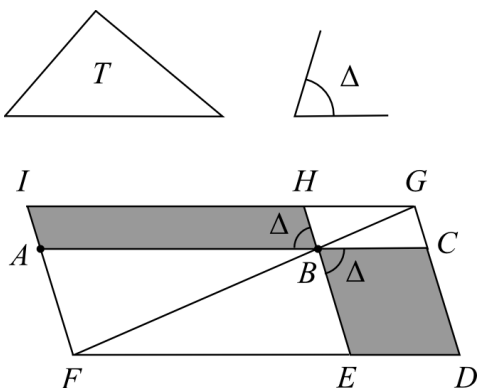


Figura 11: Proposición I.44 de Euclides

- Se traza la recta FB y se prolonga hasta que corte en G a la prolongación del lado DC por C .
- Por G se traza la paralela a AB que corta a la prolongación de EB por B en H y a la prolongación de FA por A en I .

Los rectángulos $ABHI$ y $BCDE$ (en gris en la figura) son iguales por ser complementos del paralelogramo $FDGI$ respecto a la diagonal FG (proposición I.43, Pág. 186 de este artículo). Los ángulos señalados son iguales por ser opuestos por el vértice, por lo cual el paralelogramo $ABHI$ es la respuesta al problema planteado.

De nuevo el lector puede admirar la enorme habilidad geométrica de estos matemáticos, la misma que hizo a Proclo caer en la exageración hagiográfica al compararlos a dioses por estas hazañas. No hay números reales en la demostración, pero puede llegarse a un símil algebraico. Si suponemos que Δ es un ángulo recto entonces –tal como lo hace notar Proclo– el paralelogramo es un rectángulo; si, además, la longitud de AB es a y el área del triángulo T es ab , entonces el procedimiento permite hallar el segmento de longitud b , de manera que puede asociarse a la división.⁽¹⁴⁾

Ahora bien, deliberadamente hemos dejado de lado hasta este momento parte del comentario de Proclo a la proposición I.44; de hecho, ha sido ignorado el inicio del comentario y vamos a recogerlo:

Eudemo y su escuela nos informan que estas cosas –es decir, la aplicación ($\pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta$), su exceso ($\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\eta$) y su defecto ($\xi\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$)– eran antiguos descubrimientos de la musa pitagórica. Tomando como base estos procedimientos los geómetras posteriores asumieron esos términos y los aplicaron

a las denominadas secciones cónicas, una de las cuales se llamó “parábola”, la otra “hipérbola” y la tercera “elipse”, aunque esos hombres de aquellos tiempos –semejantes a dioses– vieron el significado de estos términos en la descripción de áreas planas sobre una recta finita. Puesto que, dada una recta, si hacemos que el área se extienda a lo largo de la longitud total de la recta, ellos decían que se “aplicaba” el área; cuando se hacía la longitud [de la base] del área mayor que la propia recta, se decía que se “excedía”; y cuando se hacía [tal longitud] menor, de manera que una parte de la recta se extendía más allá del área descrita, entonces se decía que era “deficiente”. También Euclides en su sexto libro habla en este sentido de “excesivo” y “deficiente”, pero aquí [es decir, en I.44] él necesita “aplicación”...⁽¹⁵⁾

Entendemos entonces, a partir de la cita anterior, que una recta puede usarse también como soporte de un paralelogramo de área prefijada en dos sentidos alternativos: (1) excediendo la base del paralelogramo la longitud total de la recta o (2) siendo la base del paralelogramo menor que la recta. Según la tradición histórica, los tres problemas en consideración fueron resueltos por los pitagóricos y algunos historiadores consideran esta teoría el aporte más grande de la escuela. Tal como acabamos de leer, Euclides considera los problemas “deficientes” (elleipsis) y los “excesivos” (hiperbolé) en el libro VI, específicamente en las proposiciones VI.27 a VI.29. Históricamente, estas proposiciones han sido objeto de alguna polémica pues ciertos traductores los relegaron por innecesarios. Otros, en cambio, han demostrado que la teoría es ampliamente usada, no solo por el propio Euclides en el libro X, sino también por Apolonio en sus definiciones de las secciones cónicas.⁽¹⁶⁾

La asimilación algebraica de estos problemas los asocia a la teoría de las ecuaciones de segundo grado con raíces positivas. Para entenderlos del todo es bueno familiarizarnos un poco con la nomenclatura euclidiana. Por un lado: ¿qué significan frases como “paralelogramos deficientes” y “paralelogramos excesivos” respecto a una recta dada? Para la respuesta nos ayuda la figura 12. Consideremos una recta AB y un punto C de ella que puede estar bien entre los extremos A y B (como se muestra a la izquierda de la figura) o bien en la

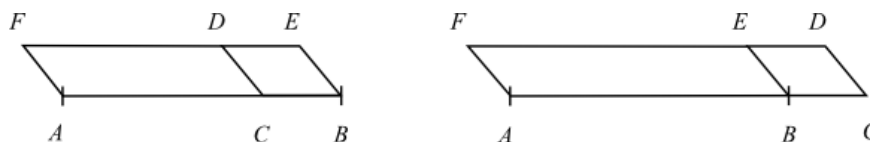


Figura 12: Paralelogramos deficientes y excesivos respecto a la recta AB

prolongación de la recta por B (como se muestra a la derecha). Se construye (con algún criterio prefijado) el paralelogramo $BCDE$ y su lado ED o DE se

prolonga hasta F que es el punto donde se consigue con la paralela a CD por A . En estos casos, el paralelogramo $ACDF$ (a la izquierda) es *deficiente* respecto a la recta AB y su *defecto* es el paralelogramo $CBED$; por otra parte, el paralelogramo $ACDF$ (a la derecha) es *excesivo* respecto a la recta AB y $BCDE$ es su *exceso*.

Por otra parte, Euclides habla de “paralelogramos semejantes y situados de manera semejante”. La primera parte de la frase (“paralelogramos semejantes”) no ofrece ninguna dificultad pues se trata de la idea habitual de semejanza. Ahora bien, “situados de manera semejante” no tiene aclaratoria ni definición

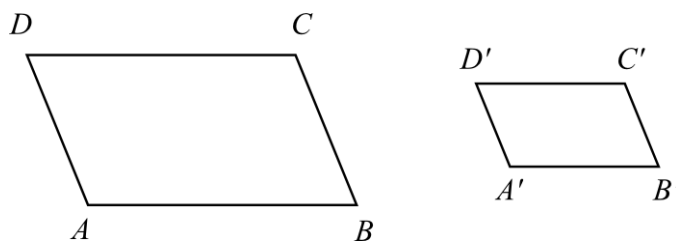


Figura 13: Paralelogramos semejantes y situados de manera semejante

en ninguna parte del texto, pero no cabe duda por el contexto que se trata de que los lados semejantes están en rectas paralelas, como los paralelogramos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ de la figura 13, para los que se tiene paralelismo de AB con $A'B'$, BC con $B'C'$, etc.

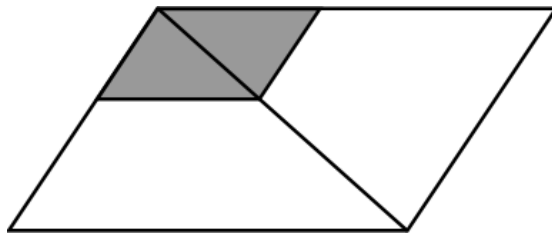


Figura 14: Proposiciones VI.24 y VI.26

Hay dos importantes proposiciones asociadas a paralelogramos semejantes y situados de manera semejante, las cuales se ilustran con la figura 14. Se trata de las proposiciones VI.24 y VI.26, la primera de las cuales afirma que los paralelogramos situados en torno a la diagonal (como la zona gris de la figura) son semejantes (y, por supuesto, situados de manera semejante) al paralelogramo

original; la segunda proposición resulta una suerte de recíproca de la anterior, pues afirma que si un paralelogramo comparte (como la zona gris de la figura) un ángulo con el paralelogramo original y es semejante y situado de manera semejante al original, entonces también comparte con él la diagonal. (Vale decir, su diagonal es parte de la diagonal del paralelogramo mayor.)

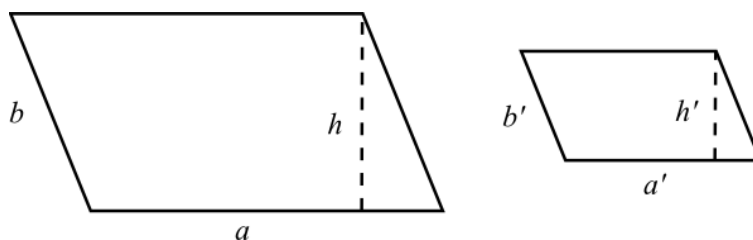


Figura 15: Razonando sobre rectángulos no se pierde generalidad

Otro punto importante a este respecto lo ilustra la figura 15, en la que vemos dos paralelogramos semejantes cuyos lados correspondientes miden a , a' y b , b' , respectivamente. Es claro que las razones entre los lados son constantes, esto es

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'},$$

pero es fácil ver que cualquier par de lados correspondientes en esta proporción puede ser cambiado por las alturas respectivas, por ejemplo

$$\frac{h}{a} = \frac{h'}{a'},$$

lo que nos permite razonar sobre rectángulos sin perder generalidad. Es bueno aclarar que el razonamiento de Euclides se realiza sobre paralelogramos en general, pero las interpretaciones algebraicas se benefician del análisis del caso particular, pues nos eximen de alguna trigonometría involucrada.

Retomemos el sentido de los problemas planteados, tal como lo recoge Proclo; nos ayudamos con la figura 16 en la cual se muestran los datos básicos: un polígono P (con un número finito de lados pues difícilmente Euclides lo concebiría de otra manera), un paralelogramo S y una recta AB ; el problema planteado es construir sobre parte de AB (problema “deficiente”) o sobre ella prolongada (problema “excesivo”) un paralelogramo igual a P , cuyo defecto o exceso sea semejante y situado de manera semejante a S . En principio, se trataría de dos proposiciones: una correspondiente al problema “deficiente” y otra al “excesivo”; pero el primero no siempre es posible de resolver, por lo cual se hace necesario una proposición adicional.

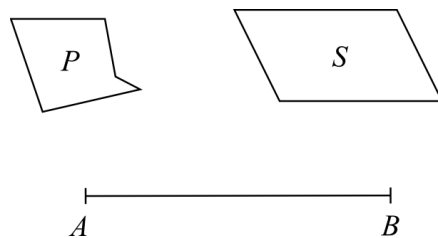


Figura 16: Datos de un problema de aplicación de áreas

La proposición VI.27 constituye lo que en la terminología de los *Elementos* se llama un diorismós (διορισμός); esto es, establece una limitación para los casos de aplicación deficiente;⁽¹⁷⁾ establece que la mitad de la recta fija un límite superior para las áreas de ciertos paralelogramos. De hecho, su enunciado es:

De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramos semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el paralelogramo mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto.

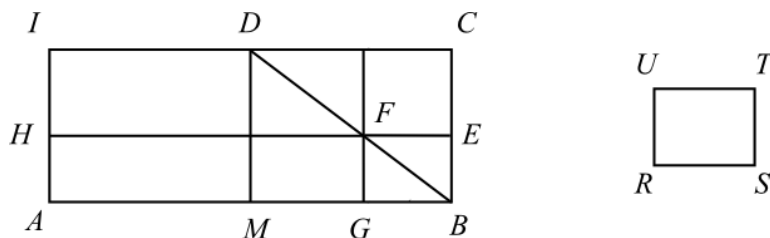


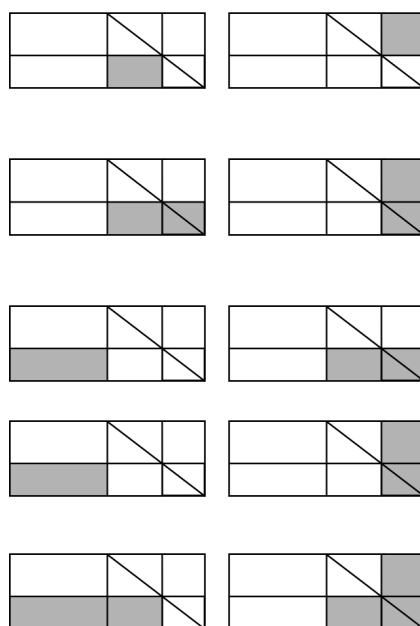
Figura 17: Proposición VI.27

La figura 17 ilustra la proposición en el caso de que los paralelogramos involucrados sean rectángulos. Se tiene la recta AB cuyo punto medio es M y sobre MB se traza un rectángulo $MBCD$ con algún criterio prefijado (por ejemplo, semejante y situado de manera semejante a algún otro rectángulo dado como $RSTU$). Destacamos dos rectángulos particulares:

AMDI: Rectángulo deficiente respecto a la recta AB , cuyo defecto es el propio rectángulo $MBCD$. Ambos rectángulos son semejantes y situados de manera semejante; de hecho, son congruentes.

AGFH: (Aceptando que F está en la diagonal BD de $DMBC$.) Rectángulo deficiente respecto a la recta AB cuyo defecto es $GBEF$, el cual –por la proposición VI.24– es semejante y situado de manera semejante a $MBCD$.

Pues bien, la proposición VI.27 afirma que de los dos rectángulos anteriores el primero siempre es mayor. Analizaremos la demostración euclidiana con la ya usada estrategia de hacer réplicas a pares del diagrama del texto:



Las figuras en gris son iguales por ser complementos respecto a la diagonal del paralelogramo de la mitad derecha de la recta.

Añadiendo a ambas el paralelogramo situado en la parte inferior derecha de la diagonal, se obtiene igualdad de los dos paralelogramos indicados en gris.

Por otra parte, los dos paralelogramos destacados son iguales, puesto que ambos tienen como base la mitad de la recta.

Los dos últimos pasos traen como consecuencia la igualdad de los paralelogramos aquí señalados,

a quienes se le añade la zona común indicada y resulta entonces la igualdad del paralelogramo en consideración con el gnomon construido en el rectángulo de la derecha.

Pero el gnomon es parte del paralelogramo construido sobre la mitad de la recta y por tanto menor que él, lo que demuestra la proposición.

Retornando a lo ya comentado, VI.27 caracteriza a los paralelogramos construidos sobre la mitad de la recta como los mayores entre todos los deficientes cuyo defecto es semejante y situado de manera semejante a un paralelogramo prefijado. Ahora bien, en VI.28 se plantea el problema de construir un paralelogramo deficiente, cuyo defecto sea semejante y situado de manera semejante a otro paralelogramo dado. No nos extraña entonces que la redacción de la proposición sea la siguiente:

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario que la figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.

El lector observará el diorismós despues del punto y coma. Sin embargo, para la construcción de paralelogramos excesivos no hay rectricción alguna, razón por la cual la proposición VI.29 tiene la siguiente redacción:

Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelograma semejante a una dada.⁽¹⁸⁾

Para la interpretación algebraica hemos de introducir los números ausentes del planteamiento euclidiano. Para ello volvamos a la figura 17 y supongamos que los lados consecutivos del paralelogramo modelo ($RSTU$) están en una razón r , esto es:

$$\frac{SR}{RU} = r,$$

y llamemos x a la altura del rectángulo incógnita $AGFH$, es decir $x = FG$. El área de este rectángulo debe ser P , en referencia al polígono modelo de la figura 16. Ahora bien, de acuerdo a las condiciones del problema, el rectángulo $GBEF$ cumple con

$$\frac{GB}{GF} = r \quad \text{o} \quad GB = rx.$$

Entonces, el área del paralelogramo $GBEF$ es $rx \cdot x = rx^2$ y la de $ABEH$ es ax , por lo cual la ecuación del problema es

$$P = ax - rx^2. \quad (1)$$

La ecuación (1) representa el álgebra de los problemas “deficientes”, tal como se plantea en la figura 17. Para los problemas excesivos es evidente que la ecuación es

$$P = ax + rx^2. \quad (2)$$

De ambas ecuaciones se buscan soluciones reales y positivas, únicas asimilables a este contexto geométrico. La existencia de tales raíces en la teoría de las ecuaciones de segundo grado está condicionada por un discriminante no negativo; en el caso de la ecuación (1) esto significa

$$a^2 - 4rP \geq 0,$$

de donde

$$P \leq \frac{a^2}{4r},$$

pero $a^2/4r$ es el área del rectángulo construído sobre la mitad de la recta, lo cual coincide con lo expresado en la proposición VI.27.

Por otro lado, el discriminante de (2) es

$$a^2 + 4rP$$

que es positivo independientemente del valor de P , en coincidencia con la no necesidad de diorismós para VI.29.

Las soluciones de Euclides a los problemas planteados en VI.28 y VI.29 –conseguidas en el más puro estilo geométrico– coinciden con las soluciones algebraicas

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4rp}}{2r} \quad \text{y} \quad x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4rp}}{2r}$$

para las ecuaciones (1) y (2) respectivamente. El lector disfrutaría leyéndolas de manera directa.

5. El círculo

Lo visto hasta ahora es un resumen apretado del tema en lo que respecta a figuras planas de frontera poligonal; queda por analizar las figuras de frontera curva y en los *Elementos* este estudio se reduce al área del círculo.⁽¹⁹⁾ La demostración de Euclides de la proposición XII.2, que enunciamos en la página 181, parece provenir de Hipócrates de Quíos, aunque otros historiadores la adjudican a Eudoxo. Esta es la muy comentada –aunque en realidad poco conocida– aproximación al círculo por polígonos inscritos y circunscritos.⁽²⁰⁾

Para entender su sentido y posibles motivaciones, es bueno aclarar que una proposición similar es válida para los polígonos regulares, lo que Euclides recoge como su proposición XII.1:

Los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de los diámetros.

Esta proposición no es difícil de demostrar usando como premisa que los triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados correspondientes, lo demás es aplicar convenientemente la triangulación de los polígonos; ésta, por supuesto, es la estrategia euclidiana.

Por el pensamiento griego pasó alguna vez la idea de que el círculo era un polígono regular con un número infinito de lados.⁽²¹⁾ La idea –de múltiples sugerencias poéticas y científicas por igual– fue pronto rechazada por el *horror infiniti* de los griegos pero, sin duda, dejó su marca sobre la intuición, y la proposición que se mostró válida para los polígonos regulares, pensada sobre círculos tenía pocas posibilidades de discurrir por un logos distinto. Solo faltaba un principio teórico lo suficientemente fuerte para soportar el siempre temido paso hacia el infinito, sin tener que encarar a éste. El paso lo dio Eudoxo.

Se trata del principio establecido en la definición V.4⁽²²⁾ que luego encontraría una forma inversa en X.1 y que, en definitiva, es el objeto de nuestro interés. Dice así:

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.⁽²³⁾



Figura 18: Polígonos inscritos

La diferencia de área entre el círculo y los polígonos inscritos (o circunscritos) sigue los lineamientos planteados en el principio anterior. Para entender lo que queremos decir podemos apelar a la figura 18, en la que vemos a la izquierda un sector circular determinado por un arco de circunferencia y el lado de cierto polígono regular; a la derecha en el mismo arco se determinan dos sectores circulares con dos de los lados del polígono regular cuyo número de lados es doble del anterior. No debe ser difícil al lector probar que la región de la derecha ocupa menos de la mitad del área de la región de la izquierda.

En estos casos, apearse a la letra del discurso original de los *Elementos* trae como consecuencia necesidad de mayor uso de espacio pero, posiblemente, menor comprensión, por lo cual en la descripción que sigue jugaremos un poco a mezclar terminología moderna con ideas antiguas. El contenido del párrafo anterior puede expresarse en la forma

$$C - P_{2n} < \frac{1}{2}(C - P_n),$$

en donde C representa el círculo y P_n , P_{2n} los polígonos regulares inscritos en C de n lados y $2n$ lados, respectivamente. Ahora bien, aplicando la propiedad arquimediana en la forma de X.1 podemos concluir que dado un círculo C y cualquier número positivo siempre es posible conseguir un polígono regular P inscrito en C , de manera que $C - P$ sea menor que el número positivo dado; esto será clave en la demostración de XII.2.⁽²⁴⁾

Como ya dijimos, la proposición XII.2 se traduce aritméticamente en una forma similar a

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

y para demostrarla Euclides (o Hipócrates o Eudoxo) usó reducción al absurdo; de hecho, doble reducción al absurdo. Veamos cómo.

Si la proporción indicada es falsa entonces uno de los términos debe ser cambiado por otro que la haga correcta. Cambiemos C_2 y supongamos que el valor correcto es $B \neq C_2$, esto es

$$\frac{C_1}{B} = \frac{d_1^2}{d_2^2}. \quad (1)$$

Entonces, para B tenemos dos posibilidades: (1) $B < C_2$ o (2) $B > C_2$. Analicemos cada una.

$B < C_2$

En este caso, $C_2 - B$ es positivo. Sea Q un polígono regular inscrito en C_2 tal que

$$C_2 - Q < C_2 - B,$$

esto garantiza que $Q > B$.

Sea ahora P el polígono regular de tantos lados como Q inscrito en C_1 . Por la proposición XII.1 se tiene

$$\frac{P}{Q} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

lo que comparado con la ecuación (1) nos conduce a

$$\frac{C_1}{B} = \frac{P}{Q}.$$

Ahora bien, como P está inscrito en C_1 se tiene que $P < C_1$, por lo que $Q < B$, contradictorio con lo ya establecido.

$B > C_2$

Invirtiendo la proporción (1) resulta

$$\frac{B}{C_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2}.$$

A continuación identificamos la cuarta proporcional D entre B , C_1 y C_2 , es decir

$$\frac{B}{C_1} = \frac{C_2}{D}.$$

Dado que hemos admitido que $B > C_2$ esta última proporción garantiza que $C_1 > D$, pero por comparación resulta

$$\frac{C_2}{D} = \frac{d_2^2}{d_1^2},$$

pero esta es la misma premisa del caso anterior que ya se mostró contradictorio.

La doble contradicción garantiza la justeza de la proporción propuesta por XII.2.⁽²⁵⁾

6. Conclusión

En resumen, podemos decir que el estudio de la medida de las magnitudes en la matemática griega clásica se realizó por analogía o comparación de figuras geométricas. La analogía o proporción –tal como fue recogida en el libro V de los *Elementos* de Euclides– alcanzó niveles de desarrollo teórico tan importantes que pudo ser asimilada al concepto de fracción, con toda la carga operacional que este último provee, por lo cual los resultados de los géometras clásicos pueden ser expresados con facilidad en nuestras modernas notaciones.

En el caso del área la figura patrón por excelencia fue el cuadrado, de ahí la denominación de *cuadratura* para referirse al problema de hallar el área de una figura plana. En lo que antecede vimos que no fueron triviales ni los problemas abordados por estos matemáticos –aún desde épocas tan tempranas como el pitagorismo original– ni las consecuencias que de ellos se derivaron, entre las cuales destacan teorías tan importantes como la de las secciones cónicas desarrolladas por géometras de la talla de Apolonio de Perga.

Notas

⁽¹⁾Los *Elementos* deben ser el libro más traducido de la historia, después de la Biblia. Las traducciones modernas usan el patrón griego recopilado por Heiberg, que el lector puede encontrar en [euc07], acompañado de su traducción inglesa a columna derecha. Una versión clásica en inglés es la de Heath [Euc56], muy importante por sus comentarios. En español, disponemos –entre otras– de la versión de Puertas Castaños [Euc91], de la cual provienen todas las citas de los *Elementos* presentes en este artículo.

⁽²⁾William Oughtred (1574–1660) usó por primera vez la notación $a.b :: c.d$, que fue modificada por el astrónomo Vincent Wing (1619–1668) a su forma definitiva $a : b :: c : d$. Ver [Caj93], Vol. I, Pág. 275.

⁽³⁾Ver [Euc91], Vol. 2, Págs. 9–54 o [Euc56], Vol. 2, Págs. 112–186 o [euc07], Págs. 129–154.

⁽⁴⁾El lector interesado podría revisar el artículo [Jim06].

⁽⁵⁾Esta misma analogía fue usada en otro de mis artículos: [Jim08], el cual está pendiente de publicación.

⁽⁶⁾El lector puede consultar el texto de Euclides o realizar él mismo la demostración.

⁽⁷⁾Lo cual incluye al teorema de Pitágoras (Proposición I.47), que muestra cómo construir un cuadrado igual a la suma de otros dos.

⁽⁸⁾Proclo (411–485 d. C.) fue un filósofo y comentarista matemático. Su *Comentario al primer libro de los Elementos de Euclides* [Pro70] es fuente primordial para la comprensión de la matemática griega.

⁽⁹⁾[Pro70], Págs. 310–311. Traducción al español de D. J.

⁽¹⁰⁾Si a es la longitud del segmento y x la longitud del cuadrado buscado, es claro que la ecuación del problema es $x^2 = a(a - x)$. La división conseguida con este procedimiento separa al segmento según la famosa *proporción áurea*; es decir, el segmento total (AB) es al segmento mayor de la división (AG) como este último es al segmento menor (GB); en símbolos, $AB : AG :: AG : GB$. Esta proporción está en relación directa con la teoría del pentágono regular, la cual es de importancia fundamental en el cuerpo de los *Elementos* y ocupa buena parte del mismo. El pentágono regular es la forma de las caras del dodecágono, el quinto poliedro regular, mismo que, según la tradición platónica, fue el plano con el que Dios hizo el trazo del Universo. Los *Elementos* cierran con los poliedros regulares (también llamados sólidos platónicos) y la propia proposición de cierre es la demostración de que solo puede haber cinco de estos sólidos. Ciertos historiadores afirman –de manera algo exagerada– que todo el plan de Euclides con esta obra se resumía en llegar a los resultados de este último libro.

⁽¹¹⁾Evidentemente, la cuadratura del círculo, intento de comparación de las figuras curvilínea y rectilínea más elementales deviene como parte de este proceso.

⁽¹²⁾La interpretación algebraica procede haciendo $x = PR$, $a = AR$, $b = RB$; se trata de demostrar que $x^2 = ab$. La demostración puede realizarse bien por triángulos semejantes o bien por el teorema de Pitágoras; ambas demostraciones exigen considerar el triángulo rectángulo APB . Pero hay algo que hace particularmente interesante a esta descripción del círculo: los puntos de la circunferencia se describen en términos de dos rectas de referencia: la recta AB donde se hacen los cortes R (*abscissa* es la palabra latina para *corte*), y una recta perpendicular a ella que sirve de dirección para las paralelas cuyo extremo es un punto de la circunferencia (*ordinatae* es el término latino para *rectas paralelas*). Es decir, la descripción introduce un sistema coordenado. Este procedimiento fue el usado por Apolonio para describir las secciones cónicas. (Ver [AoP00].)

⁽¹³⁾[Pro70], Págs. 333–334. Traducción al español de D. J.

⁽¹⁴⁾No obstante, los procedimientos basados en la semejanza (esto es, en razones y proporciones) ofrecen una construcción más sencilla. Puede comprobarse esto con la proposición VI.12, ([Euc91], Vol. 2, Pág. 74), la cual se propone construir una cuarta proporcional entre tres cantidades dadas. Con ella puede resolverse geoméricamente tanto el producto como la división, si una de las tres rectas es igual a la unidad de medida. Descartes así lo mostró en las primeras páginas de *La Geometría* ([Des54], Págs. 4–5. Asimismo, a VI.13 –que ya la hemos comentado– la usó como interpretación geométrica de la extracción de raíces cuadradas.

⁽¹⁵⁾[Pro70], Pág. 332. Traducción al español de D. J. Los términos en griego aparecen así en la traducción al inglés de Morrow; su conversión latina sería: $\pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta$, parabolé; $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\eta$, hiperbolé; $\xi\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$, elleipsis, lo que le da sentido a todos los comentarios posteriores. Los comentarios entre corchetes son acotaciones que me parecen necesarias para entender la traducción.

Los nombres de las secciones cónicas fueron impuestos por Apolonio y la razón de ellos tiene que ver con los problemas de aplicación, exceso o defecto de áreas, pero lamentablemente no podemos dedicar espacio a la bella teoría apoloniana. (Ver [AoP00].)

⁽¹⁶⁾El comentario puede leerse con mayor profundidad en [Euc56], Vol. 2, Págs. 258–259. Las definiciones de las secciones cónicas pueden leerse en las proposiciones 11, 12 y 13 del propio primer libro de Apolonio ([AoP00], Págs. 19–26).

⁽¹⁷⁾No es éste el primer ejemplo de uso de $\delta\iota\omicron\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ en los *Elementos*. En realidad, la primera vez es en la proposición I.22 que se plantea el problema de construir un triángulo teniendo sus tres lados; esto exige una condición previa: que cada lado sea menor que la suma de los otros dos. Pues bien, esta condición (la desigualdad triangular) es precisamente la proposición I.20.

⁽¹⁸⁾Se invita al lector a revisar ambas demostraciones en el texto de Euclides. Asimismo, es un buen ejercicio intentar calcar el espíritu de ellas mediante diagramas a pares como los mostrados en este artículo.

⁽¹⁹⁾Con técnicas similares a las que aquí se comentarán, Arquímedes emprendió con éxito el cálculo del área de un segmento parabólico –esto es, la superficie cuya frontera está determinada por una parábola y una de sus cuerdas– así como el área encerrada por sectores de la espiral. Hipócrates de Quíos calculó el área de las lúnulas asociadas a ciertos polígonos, pero esto es un subproducto de su propia determinación del área de un círculo.

⁽²⁰⁾Un tratamiento completo, riguroso y moderno –aunque apegado totalmente al espíritu de Euclides– se encontrará en [Jim08].

⁽²¹⁾Ver [Zel91], Cap. II.

⁽²²⁾La definición V.4 define el concepto de razón de una forma similar a la propiedad arquimediiana; dice así: “Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a la otra”. Trasladado a terminología moderna, esto quiere decir que dados dos números reales a y b , existe un entero positivo n tal $na > b$. La denominación de *propiedad arquimediiana* es injusta con Eudoxo, quien fue el descubridor pero, en realidad, ningún otro matemático de la antigüedad, le dio uso a esta proposición en la cantidad y calidad que lo hiciera Arquímedes.

⁽²³⁾En lenguaje moderno sería de la siguiente manera: Sean $a > b$ dos números reales positivos y definamos una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, tal que $a_0 = a$ y $a_n < \frac{1}{2}a_{n-1}$, para todo $n \geq 1$; entonces existe k tal que $a_k < b$.

⁽²⁴⁾Euclides demuestra la proposición XII.2 comenzando por el cuadrado, de manera que usa polígonos regulares inscritos cuyo número de lados es una potencia de 2.

⁽²⁵⁾Expresada en términos estrictamente numéricos, la proposición XII.2 es equivalente a la conocida fórmula $A = \pi r^2$. Poco menos de un siglo después de Euclides, también Arquímedes se ocupó del círculo consiguiéndolo igual a un triángulo rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia y su altura el radio del círculo; esto permite deducir la popular fórmula $L = 2\pi r$, para la longitud de la circunferencia. Los detalles en [Jim08].

Referencias

- [AoP00] Apollonius of Perga. *Conics. Books I–III*. Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico, 2000. (Traducción de R. Catesby Taliaferro.).
- [Caj93] Florian Cajori. *A history of mathematical notations*. Dover Publications, Inc. New York, 1993. (Dos volúmenes encuadrados en un solo libro).
- [Des54] René Descartes. *The Geometry*. Dover Publications Inc. New York, 1954. (Edición facsimilar en francés. Traducción del francés y del latín por David E. Smith y Marcia Lathan).

-
- [Euc56] Euclid. *The thirteen books of the Elements. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath.* Dover Publications, Inc. New York, segunda edición, 1956. (Tres volúmenes).
- [Euc91] Euclides. *Elementos.* Traduccin y notas de María Luisa Puertas Castaños. Edit. Gredos, Madrid, 1991. (Tres volúmenes).
- [euc07] *Euclid's Elements of Geometry.* Richard Fitzpatrick, 2007. (Edición bilingüe griego-inglés con el texto canónico griego de J. L. Heiberg).
- [Jim06] Douglas Jiménez. ¿Qué era un irracional para un matemático griego? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, XIII(1):87–103, 2006.
- [Jim08] Douglas Jiménez. π desde sus bases. Sin publicar, Septiembre 2008.
- [Pro70] Proclus. *A commentary on the first book of Euclid Elements. Translated with Introduction and notes, by Glenn R. Morrow.* Princeton University Press. New Jersey, 1970.
- [Zel91] Paolo Zellini. *Breve historia del infinito.* Ediciones Siruela S. A., Madrid, 1991.

Douglas Jiménez
UNEXPO “Antonio José de Sucre”
Vicerrectorado de Barquisimeto
e-mail: dougjim@cantv.net; dougjim@gmail.com

INFORMACIÓN NACIONAL

La Olimpiada de Chacao

Saulo Rada Aranda

Antecedentes

Durante los últimos treinta años, las olimpiadas matemáticas han experimentado un notable crecimiento en todo el mundo. En Venezuela, la primera olimpiada matemática, dirigida a estudiantes de Educación Media, fue organizada por el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC), en 1976. Para ese entonces, había poca difusión de estos concursos en Latinoamérica y sólo en Cuba se realizaban regularmente. La experiencia cubana no era muy conocida en nuestro medio. Hoy día, prácticamente todos los países latinoamericanos organizan olimpiadas matemáticas anualmente para estudiantes de Bachillerato y también para niños menores, en las primeras etapas de la Educación Primaria. En este nivel son notables las experiencias de Argentina y Colombia. En el país actualmente hay numerosas olimpiadas matemáticas; las de mayor difusión y alcance son las organizadas por la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, con el apoyo de la Fundación Empresas Polar y otras instituciones, que abarcan desde los primeros grados de escolaridad hasta el nivel universitario.

Actualmente, existe un amplio consenso en el sentido de que las olimpiadas son un excelente recurso para estimular y enriquecer el aprendizaje de la matemática. Los estudiantes cuentan, fuera de la rutina escolar, con un espacio apropiado para atender a sus motivaciones y desarrollar su propio proceso cognoscitivo, y los docentes se acercan a las técnicas de resolución de problemas y al manejo de situaciones que exigen un poco más que el trabajo habitual con los contenidos programáticos. Además, las olimpiadas matemáticas aportan datos sobre el nivel de desempeño de los estudiantes en el aula, lo que permite vislumbrar posibles correctivos, y propician la preparación y divulgación de publicaciones sobre resolución de problemas que contribuyen a mejorar la formación de estudiantes y docentes.

Por estas razones, y con miras a incidir en la calidad de la educación que se imparte en las aulas, la Alcaldía del Municipio Chacao se propuso organizar, desde el año 2001, una olimpiada matemática dirigida a estudiantes de los

planteles del municipio y retomar una iniciativa que se había presentado hace algunos años pero no había contado con la continuidad deseable.

Organización

Con este programa, nacido gracias a la iniciativa de la profesora Carmen Rosa Aristeguieta durante la gestión de la profesora Lourdes Camargo al frente de la Dirección de Educación, se ha procurado atender al mejoramiento de la enseñanza de la matemática al valorar su utilidad en la resolución de problemas y en el desarrollo del pensamiento lógico, mediante la realización de actividades extraescolares con la participación de estudiantes y maestros. Se ha procurado propiciar relaciones de amistad y cooperación, y apoyar el proceso de capacitación docente mediante talleres en resolución de problemas, acompañamiento pedagógico en el aula y elaboración de materiales educativos para las primeras etapas de la Educación Básica apropiados para el entrenamiento de los estudiantes en la resolución de problemas.

Para cumplir con estos objetivos, la Dirección de Educación constituyó un Comité Olímpico, conformado por los profesores Jesús Andonegui Millán, Tania Calderín Rodríguez y Saulo Rada Aranda, quien lo coordina, que se ha encargado de realizar la Olimpiada Matemática de Chacao desde ese año.

Lo primero que se hizo fue escoger cuál sería el nivel más apropiado de los alumnos que participarían en la olimpiada. En acuerdo con la Dirección de Educación de la Alcaldía se decidió que las pruebas serían dirigidas a estudiantes de sexto grado ya que, por una parte, estos no tenían muchas actividades extraescolares contempladas en su programación, y por la otra, el hecho de trabajar con niños pequeños podría propiciar la participación de la comunidad en el desarrollo del programa.

Chacao es el más pequeño de los 5 municipios que conforman el área Metropolitana de Caracas, con una extensión de apenas 13km^2 , pero sostiene una actividad económica y social muy importante. En Chacao hay 63 instituciones educativas, de las cuales 29 tienen sexto grado. Estas 29 escuelas han sido invitadas permanentes a participar en la Olimpiada. En total albergan una población superior a los 1500 alumnos.

Desde un principio se insistió en que la actividad de la olimpiada no debía restringirse a la aplicación de las pruebas y el acto de premiación. Antes bien, el propósito debía ser el ofrecer recursos a docentes y estudiantes que les permitieran instrumentar la resolución de problemas de matemática como estrategia didáctica en el aula, particularmente en las tres escuelas municipales que dependen directamente de la Alcaldía. Para esto se requirió realizar numerosas reuniones con estudiantes, docentes y directivos de las escuelas del municipio

para explicar las características de la competencia, programar talleres dirigidos a los docentes sobre resolución y elaboración de problemas con miras a transferir al aula las experiencias adquiridas, promover la organización de clubes de matemática en las escuelas, y ofrecer acompañamiento permanente a los docentes a lo largo del año escolar. Como material de apoyo, todos los años se han elaborado de los problemarios: "*Felices Vacaciones con Matemática*", que se entregan en el mes de Julio a los estudiantes de los quintos grados de las escuelas municipales. Ellos son quienes participarán en la olimpiada cuando regresen a clases.

La Olimpiada Matemática de Chacao se realiza durante el mes de noviembre de cada año y consta de dos certámenes. El Certamen Preliminar se hace el primer viernes de noviembre y consiste en una prueba de selección con 20 problemas que se aplica a todos los alumnos de sexto grado, simultáneamente en todos los planteles del municipio Chacao que participan en la Olimpiada. Las pruebas son corregidas internamente por los docentes de estos planteles y cada plantel tiene un cupo de 10 estudiantes finalistas. El Certamen Final se hace en un local único el tercer viernes de noviembre; consiste en una prueba de desarrollo con 8 problemas, y corresponde al Comité Olímpico la selección de los ganadores de medallas de oro, plata y bronce. Los premios se otorgan empleando las siguientes normas:

a) Para determinar el número total de Medallas de Oro, Plata y Bronce, se utiliza el siguiente esquema:

- La calificación mínima para recibir Medalla de Oro es $m + \sigma$
- La calificación mínima para recibir Medalla de Plata es $m + \frac{1}{3}\sigma$
- La calificación mínima para recibir Medalla de Bronce es $m - \frac{1}{3}\sigma$

donde m es la media de las calificaciones de los estudiantes finalistas y σ es la desviación estándar de dichas calificaciones.

b) Para cada plantel en particular:

- No puede haber más de una Medalla de Oro.
- No puede haber más de tres medallas, sumando el Oro y las Platas.
- No puede haber más de siete medallas en total.

Estas normas son similares a las que orientan la realización de diversas competencias internacionales, como la Olimpiada de la Costa del Pacífico y la Olimpiada de Mayo, entre otras, donde priva el criterio de excelencia con equidad, esto es, permitir que algunos equipos que puedan presentar debilidades por diversas circunstancias puedan tener una participación decorosa manteniendo un alto nivel de exigencia.

Pruebas

Seguidamente transcribimos las pruebas que se aplicaron el año 2010 en los dos certámenes. Si bien la olimpiada está dirigida a estudiantes del sexto grado, las pruebas se realizan a principio del año escolar. Por esto, los problemas tratan sobre temas que se han cubierto hasta el quinto grado de primaria. En las pruebas no está permitido el uso de libros, notas ni calculadoras.

Certamen Preliminar

Tiempo: 60 minutos

1. ¿Cuál número debe estar en el cuadro para que la igualdad sea cierta?

$$5 + \square = 7,5$$

- (a) 1,5 (b) 2,05 (c) 2,5 (d) 2,25 (e) 7,5

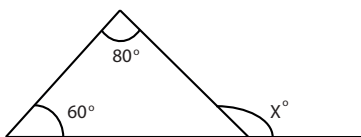
2. Al redondear a las unidades el número 6,92 el número que se obtiene es:

- (a) 6,9 (b) 692 (c) 6 (d) 7 (e) 69,2

3. El número 0,25 se puede expresar como:

- (a) $2 + \frac{5}{100}$ (b) $\frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ (c) $5 + \frac{2}{10}$ (d) $2 + \frac{5}{10}$ (e) $\frac{5}{10} + \frac{2}{100}$

4. En el siguiente dibujo, ¿Cuál es el valor de X?



- (a) 120 (b) 100 (c) 140 (d) 150 (e) 130

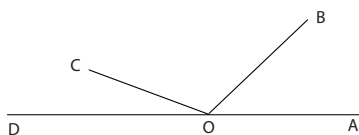
5. Francisco está en la cola del autobús y observa que delante de él hay 5 personas. Detrás de Francisco, están $\frac{2}{3}$ de los pasajeros esperando. ¿Cuántas personas hay en la cola?

- (a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 15 (e) 18

6. $10^3 + 10^2 + 10 + 1$ es igual a:

- (a) 1001 (b) 1010 (c) 1011 (d) 1110 (e) 1111

7. Un bebé pesa, al nacer 3,7 kg. En la primera semana rebaja 10% de su peso. ¿Cuál es el peso al cabo de esa semana?
(a) 3,33 kg (b) 3,6 kg (c) 3,7 kg (d) 3,8 kg (e) 4,07 kg
8. Hoy, 5 de noviembre del 2010, Rafael celebra dos aniversarios: cumple 56 años y además cumple 26 años de casado. ¿En qué año celebrará que lleva la mitad de su vida casado?
(a) 2011 (b) 2012 (c) 2013 (d) 2014 (e) 2015
9. Usando las letras X, I y V , sin repeticiones, ¿Cuántos números romanos distintos se pueden formar?
(a) 7 (b) 9 (c) 10 (d) 12 (e) 15
10. Si $a = 1$ y $b = 4$, ¿Cuál de estas expresiones indica el mayor valor?
(a) $a + b$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $b - a$ (d) $a \times b$ (e) b^a
11. Un automóvil viaja a 90 km/h. ¿Cuántos metros recorre en 10 segundos?
(a) 15 (b) 25 (c) 150 (d) 250 (e) 1500
12. Una torta se corta quitando cada vez la tercera parte de la torta que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción de la torta original quedó después de cortar tres veces?
(a) $\frac{8}{27}$ (b) $\frac{8}{9}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{4}{3}$ (e) $\frac{2}{3}$
13. El ángulo COB mide 120° . La medida del ángulo COD es la mitad de la medida del ángulo BOA . ¿Cuánto mide el ángulo COD ?

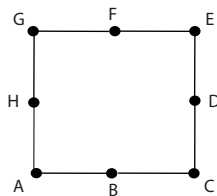


- (a) 90° (b) 20° (c) 50° (d) 40° (e) 30°
14. Los $\frac{2}{7}$ de los ahorros de Carlos son 420 bolívares. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado Carlos?
(a) Bs. 1470 (b) Bs. 120 (c) Bs. 588 (d) Bs. 420 (e) Bs. 2940
15. Uno de los siguientes números: 22, 24, 25, 26, 33 es el promedio de los otros cuatro. ¿Qué número es?
(a) 22 (b) 24 (c) 25 (d) 26 (e) 33

16. Tres hijos, que viven en diferentes sitios de Venezuela, visitan a sus padres en Caracas, el mayor cada 28 días, el mediano cada 14 días y el menor cada 7 días. Si el día de Navidad se reúnen todos, ¿Qué día volverán a coincidir?
- (a) 20 de enero (b) 21 de enero (c) 22 de enero (d) 23 de enero (e) 24 de enero
17. El largo y el ancho de un terreno miden respectivamente 25 m y 12 m. En un dibujo a escala del mismo el largo mide 10 cm. ¿Cuánto debe medir el ancho?
- (a) $2\frac{1}{4}$ cm (b) $4\frac{4}{5}$ cm (c) $4\frac{1}{8}$ cm (d) $2\frac{2}{5}$ cm (e) $5\frac{1}{5}$ cm
18. Siguiendo la secuencia, ¿Cuál será el perímetro de la figura que tenga 327 cuadros sombreados?



- (a) 668 cm (b) 664 cm (c) 654 cm (d) 644 cm (e) 658 cm
19. Virginia y su papá corren dándole vueltas a la manzana. Si ella corre tres veces más que él, y si ambos empiezan al mismo tiempo en el punto A , ¿En qué punto de la manzana se van a volver a encontrar?



- (a) A (b) B (c) C (d) D (e) E
20. ¿Qué número de los siguientes debes utilizar en lugar de x para estar seguro de que el valor de $\frac{x}{8}$ esté entre 6 y 7?
- (a) 40 (b) 36 (c) 45 (d) 60 (e) 50

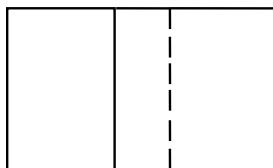
Certamen Preliminar

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 En la panadería, un cachito y un café con leche cuestan Bs. 16. Dos cachitos y tres café con leche cuestan Bs. 38. ¿Cuánto cuesta un cachito?

Problema 2 Un árbol de Navidad tiene luces de tres colores: blancas, azules y rojas. Las blancas encienden cada 3 segundos, las azules cada 4 segundos y las rojas cada 5 segundos. Si todas las luces están encendidas a las 7 : 00 p.m, ¿A qué hora se volverán a encender simultáneamente?

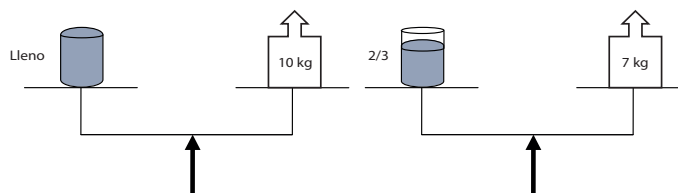
Problema 3 Dos cuadrados de lado 6 cm se solapan de manera que forman un rectángulo de 32 cm de perímetro. ¿Cuál es el perímetro de la región solapada?



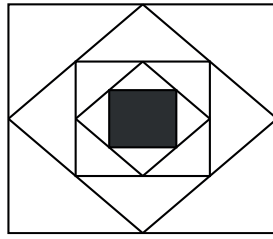
Problema 4 Gloria va al cine y gasta la tercera parte de su dinero en la entrada y dos quintas partes del resto en cotufas y refresco. Si al final le quedan Bs. 36, ¿Cuánto dinero tenía Gloria al principio?

Problema 5 Fanny tiene 12 caramelos y los quiere repartir entre Inés, Nora y Cristina. ¿De cuántas formas puede hacerlo si a cada una le quiere dar por lo menos 3 caramelos? Explica cómo.

Problema 6 Las dos balanzas están en equilibrio. ¿Cuánto pesa el envase vacío?



Problema 7 La entrada normal al cine cuesta 30 bolívares y para personas de la tercera edad 15 bolívares. En una función la cantidad de entradas vendidas a 30 bolívares es el triple de la cantidad de entradas vendidas a 15 bolívares. Si en total se recaudaron 3360 bolívares, ¿Cuántas entradas de cada clase se vendieron?



Problema 8 En la figura, cada cuadrado se forma uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado anterior. ¿Cuántas veces está contenido el cuadrado más pequeño en el cuadrado más grande?

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamonedá

El segundo semestre del año 2010, como es costumbre, ha sido más tranquilo que el primero. La actividad principal fue la XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, XXV OIM, celebrada en Asunción y Ciudad del Este, Paraguay, del 20 al 30 de Septiembre.

Estuvimos representados por un equipo conformado por los jóvenes Diego Peña del colegio Los Hipocampitos de los Altos Mirandinos, Carlos Lamas, colegio Independencia de Barquisimeto, Edenys Hernao del colegio Altamira de Maracaibo y Tomás Rodríguez del colegio Arco Iris de Porlamar. El jefe de la delegación fue la profesora Laura Vielma de la Academia Washington de Caracas y el tutor el profesor Eduardo Sarabia de la UPEL-IPC. La actuación del equipo fue la siguiente: Diego obtuvo medalla de bronce y los otros tres alumnos, Edenys, Tomás y Carlos, ganaron Mención Honorífica, completando un año de buena actuación internacional. A la XXV OIM asistieron 21 países, Argentina, Brasil, Bolivia, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Perú, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay, Venezuela y el anfitrión, Paraguay. Cada país estuvo representado por una delegación de hasta cuatro alumnos y dos profesores.

En la escena nacional, el segundo semestre lo dedicamos a dar inicio a la organización de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2011. El proceso de inscripciones ya está en marcha y esperamos volver a tener una buena participación nacional. Cabe decir que de nuevo estuvimos en el grupo de los 10 primeros países en participación en el Canguro Matemático, con 150.433 estudiantes, provenientes de 22 estados. En el Canguro toman parte más de 5.000.000 de jóvenes, y más de 42 países. Información completa sobre estos aspectos se puede conseguir en nuestro sitio de internet, www.acm.org.ve.

De nuevo queremos señalar el apoyo recibido por nuestros patrocinadores, la Fundación Empresas Polar, el Banco Central de Venezuela, la Fundación Amigos de Ciencia, Facultad de Ciencias de la UCV, Acumuladores Duncan, Acumuladores Titán, MRW, la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman, y la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. También queremos agradecer a las Universidades e Instituciones que nos apoyan para la organización de todas nuestras actividades, UCV, USB, UNIMAR, LUZ, URU,

UPEL, UCOLA, UNEXPO, UDO . Muchas gracias a todos.

Como siempre finalizamos con algunos de los problemas de las competencias a las cuales asistimos. En esta oportunidad les mostramos los exámenes de la OIM. Cada examen tiene una duración de cuatro horas y media y el valor de cada problema es de 7 puntos.

51^a Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primer día

Asunción, Paraguay, 24 de Septiembre de 2010

Problema 1

Se tienen diez monedas indistinguibles puestas en línea. Se sabe que dos de ellas son falsas y ocupan posiciones consecutivas en línea. Para cada conjunto de posiciones, se puede preguntar cuántas monedas falsas contiene. ¿Es posible determinar cuáles son las monedas falsas efectuando únicamente dos de estas preguntas, sin conocer la respuesta de la primera antes de formular la segunda?

Problema 2

Determinar si existen números enteros positivos a y b tales que todos los términos de la sucesión definida por $x_1 = 2010$, $x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}, \quad n \geq 1,$$

sean enteros.

Problema 3

La circunferencia Γ inscrita al triángulo escaleno ABC es tangente a los lados BC , CA y AB en los puntos, D , E y F , respectivamente. La recta EF corta a la recta BC en G . La circunferencia de diámetro GD corta a Γ en R ($R \neq D$). Sean P y Q ($P \neq R$, $Q \neq R$) las intersecciones de BR y CR con Γ , respectivamente. Las rectas BQ y CP se cortan en X . La circunferencia circunscrita a CDE corta al segmento QR en M y la circunferencia circunscrita a BDF corta al segmento PR en N . Demostrar que las rectas PM , QN y RX son concurrentes.

Segundo día
Asunción, Paraguay, 25 de Septiembre de 2010

Problema 4

Las medias aritmética, geométrica y armónica de dos números enteros positivos distintos son números enteros. Hallar el menor valor posible para la media aritmética.

Nota: Si a y b son números positivos, sus medias aritmética, geométrica y armónica son respectivamente: $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{a \cdot b}$ y $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Problema 5

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD son perpendiculares. Sean O el circuncentro de $ABCD$, K la intersección de las diagonales, $L \neq O$ la intersección de las circunferencias circunscritas a OAC y OBD , y G la intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $ABCD$. Demostrar que O , K , L y G están alineados.

Problema 6

Alrededor de una mesa circular se sientan 12 personas y sobre la mesa hay 28 floreros. Dos personas pueden verse si y solo si no hay ningún florero alineado con ellas. Demostrar que existen al menos dos personas que pueden verse.

Rafael Sánchez Lamonedá
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV
e-mail: rafael.sanchez@ciens.ucv.ve

XXIV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS Y ESCUELA DE MATEMÁTICAS DE AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE
LOS ANDES

Mérida, 4 al 10 de septiembre de 2011

- La Escuela Venezolana de Matemáticas se realiza anualmente desde 1988 como actividad conjunta de los postgrados de matemáticas del país. Su principal objetivo es contribuir a la formación de matemáticos y a fomentar el intercambio científico entre las instituciones participantes. Se ofrecen cursos dirigidos principalmente a estudiantes de postgrado de matemáticas o áreas afines con el objeto de presentar temas de investigación de interés actual.
- La Unión Matemática de América Latina y El Caribe (UMALCA), como parte de un programa de estímulo al desarrollo de las matemáticas en la región centroamericana y del Caribe realizado conjuntamente con la Asociación Matemática Venezolana y la Sociedad Matemática Mexicana, con apoyo financiero del Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA), ha decidido otorgar, cada dos años, un financiamiento adicional para ampliar el alcance de la Escuela Venezolana de Matemáticas a esta región, declarándola Escuela Matemática de América Latina y el Caribe (EMALCA).

Cursos

- I. La tricotomía de Zilber: una breve introducción geométrica.
Andres Villaveces. (Universidad Nacional, Colombia)
- II. Introducción al Método de Elementos Finitos: un enfoque matemático.
Giovanni Calderon. (Universidad de Los Andes, Venezuela)
- III. Introducción a la Teoría Espectral de Digrafos.
Juan Rada y Alfredo Ríos. (Universidad Simón Bolívar, Venezuela)
- IV. La Entropía Topológica como medida de desorden en Sistemas Dinámicos.
Rafael Labarca. (Universidad de Santiago de Chile, Chile)

Organización

COMITÉ ORGANIZADOR

- Neptalí Romero , Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado
nromero@uicm.ucla.edu.ve
- Oswaldo Araujo, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes
araujo@ula.ve
- Carlos A. Di Prisco, Departamento de Matemáticas, Instituto Venezolano
de Investigaciones Científicas
cdiprisc@ivic.ve
- Mariela Castillo, Universidad Central de Venezuela
mariela.castillo@ciens.ucv.ve

COMITÉ CIENTÍFICO

- Stefania Marcantongini, IVIC, Departamento de Matemáticas, Instituto
Venezolano de Investigaciones Científicas
smarcant@ivic.gob.ve
- Mariela Castillo, Universidad Central de Venezuela
mariela.castillo@ciens.ucv.ve
- Neptalí Romero, Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado
nromero@uicm.ucla.edu.ve
- Carlos Uzcátegui, Universidad de Los Andes
uzca@ula.ve
- Vladimir Strauss, Universidad Simon Bolívar
str@usb.ve
- Ennis Rosas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente
erosas@sucre.udo.edu.ve

COMITÉ ORGANIZADOR LOCAL

- Oswaldo Araujo (Coordinador), Departamento de Matemáticas, Facultad
de Ciencias, Universidad de Los Andes *araujo@ula.ve*
- Blasdimir Ruiz
bladismir@ula.ve
- Luis Gonzalez , Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Uni-
versidad de Los Andes.

AGRADECIMIENTO

Agradecemos la colaboración prestada por las siguientes personas en el trabajo editorial del volumen XVII del Boletín de la AMV:

Antonio Acosta, Diomedes Bárcenas, Sergio Estrada, José Giménez, Luis González, Juan Guevara, Teodoro Lara, Hugo Leiva, Goyo Mijares, Leonardo Mora y Roy Quintero.

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs.F. 10 (US\$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history, philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance. All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsibility of the author. All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs.F. 10 (US\$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: <http://boletinamv.ma.usb.ve/>

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XVII, Número 2, Año 2010

PRESENTACIÓN	73
ARTÍCULOS	
The transversability condition for infinite dimensional control systems Diomedes Bárcenas, Hugo Leiva and Ambrosio Tineo	75
On new estimates for distance in analytic functions space in the unit disk, polydisk and the unit ball Romi Shamoyan and Olivera Mihic	89
Precubierta de anillos Rafael Parra, Carlos Parra, J.L. Herrera y M. Escalona Moran	105
Geometria y Topologia. Santiago Simanca	113
HISTORIA DE LA MATEMÁTICA	
El problema del area en los Elementos de Euclides Douglas Jimenez	179
INFORMACION NACIONAL	
La olimpiada de Chacao Saulo Rada	209
La esquina olímpica Rafael Sánchez Lamonedá	217
XXIV Escuela Venezolana de Matematicas	221
Agradecimiento	223