ARTÍCULOS

Teorema de extensión para funciones multi-monogénicas en álgebras parametrizadas

Eusebio Ariza y Carmen Judith Vanegas

Resumen. En este artículo se prueba un teorema de extensión tipo Hartogs para funciones multi-monogénicas con valores en el álgebra de Clifford $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$. Para lograr esto se muestra el desarrollo en series de potencias del núcleo de Cauchy en $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ y una extensión de las llamadas funciones monogénicas con parámetro. La unicidad proviene del teorema de continuación analítica.

Abstract. In this article we prove a Hartogs type extension theorem for multi-monogenic functions with values in a Clifford algebra $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$. To achieve this we show the power series expasion of the Cauchy nucleus on $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ and an extension of the so called monogenic functions with a parameter. The uniqueness comes from the continuation theorem of analitic continuation.

1 Introducción

El Teorema de Extensión de Hartogs es un resultado fundamental sobre funciones holomorfas en varias variables complejas. Considerando el polidisco $D^n(P, r)$, para $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ y $r > 0$, definido por

$$D^n(P, r) = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \ : \ |z_j - p_j| < r \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

podemos dar el enunciado del Teorema de Hartogs [4] en su forma más clásica:

Teorema 1. *Sea $\Omega = D^2(0, 2) \setminus \overline{D}^2(0, 1)$ y suponga que f es una función holomorfa en Ω. Entonces existe una función holomorfa F en $D^2(0, 2)$ tal que $F|_\Omega = f$.*

2010 AMS Subject Classifications: 30G35, 32A10

Keywords: Funciones monogénicas con parámetro, funciones multi-monogénicas, teoremas de extensión, funciones real analíticas, álgebras de Clifford dependiendo de parámetros.

En 1961 Leon Ehrenpreis publicó una nueva demostración del teorema de Hartogs y una extensión del mismo, ver [3]. En su prueba él da algunas condiciones sobre una sucesión de operadores diferenciales parciales lineales de tal manera que el problema de extensión pueda ser resuelto. De esta manera extiende el teorema de Hartogs, por cuanto el operador considerado es mucho más general.

El teorema de Hartogs en su versión más conocida establece:

Teorema 2. *Sean G un dominio en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, y K un subconjunto compacto de G tal que $G \setminus K$ es conexo. Entonces toda función holomorfa $f : G \setminus K \to \mathbb{C}$ posee una única extensión holomorfa $f^* : G \to \mathbb{C}$.*

En [9] se demuestra el Teorema 2 usando la unicidad de la continuacion analítica y soluciones para la ecuación de Cauchy-Riemann no homogénea en el plano complejo. En [8] se demuestra el resultado de Hartogs a partir de la Fórmula Integral de Cauchy y del concepto de índice de una curva con respecto a un punto. Por otro lado, en [6] y [7] se estudia un problema de extensión al estilo Hartogs para soluciones de sistemas de ecuaciones de la forma

$$L^l(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(l)}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0,$$

donde $l = 1, \ldots, s, s \geq m$ y $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ es la función desconocida definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera suficientemente suave. Los $A_{ij}^{(l)}$ son funciones real analíticas definidas en Ω. El resultado es aplicado a las soluciones del sistema de Riesz en $\mathbb{R}^3$: $div\ u = 0,\ rot\ u = 0$.

En el contexto del análisis de Clifford se tiene en [1] una demostración del teorema de Hartogs modificado para las funciones isotónicas, las cuales se definen de la siguiente manera:

Sea $\mathbb{C}_n$ el álgebra de Clifford compleja construida sobre $\mathbb{R}^n$ [2]

Definición 1. *Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}_n$ continuamente diferenciable es isotónica en un dominio Ω de $\mathbb{R}^{2n}$ si*

$$\partial_{\underline{x}_1} f + i\tilde{f}\partial_{\underline{x}_2} = \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_{x_j} f + i\tilde{f} \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_{x_{n+j}} = 0.$$

Aquí el símbolo $\tilde{}$ significa la involución principal en $\mathbb{C}_n$ definida en la base por $\tilde{e}_A = (-1)^k e_A$, $|A| = k$ y $A = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ es tal que $j_1 < \ldots < j_k$.

El teorema de extensión en este caso establece que toda función isotónica $f(\underline{x})$ en una vecindad U de $\partial\Omega$, que satisface la condición $\partial_{\underline{x}_1} f = 0$, puede ser extendida isotónicamente a todo $\overline{\Omega}$.

Sea ahora A_n el álgebra de Clifford clásica en $\mathbb{R}^n$. Para $m \leq n$, $\mathbb{R}^{m+1}$ está naturalmente incluido en A_n. Sean Ω y T dominios de $\mathbb{R}^{m+1}$ y $\mathbb{R}^{k+1}$ respectivamente con $m \leq n$ y $k \leq n$ y $\Omega \times T \subset \mathbb{R}^{m+k+2}$.

Definición 2. *Sea $f(x,t)$ una función definida en $\Omega \times T$ con valores en A_n, es decir,*

$$f(x,t) = \sum_{\alpha} f_\alpha(x,t)e_\alpha, \quad \text{para} \;\; x \in \Omega \;\; y \; t \in T,$$

donde las componentes $f_\alpha(x,t)$ son funciones reales definidas en $\Omega \times T$. Suponga que $f(x,t)$ es monogénica (a izquierda) con respecto a la variable $x \in \Omega$ para cada $t \in T$ fijo. Entonces $f(x,t)$ es (real) analítica con respecto a la variable $x \in \Omega$ para cada $t \in T$, (ver [2]). Cuando esto ocurre se dice que f es una función monogénica con parámetro.

En [5] Le Hung Son muestra la siguiente extensión para estas funciones:

Teorema 3. *Sea Σ una vecindad abierta de $\partial(\Omega \times T)$. Suponga que $f(x,t)$ es una función dada que es (real) analítica en Σ y monogénica (a izquierda) con respecto a x para cada t fijo. Entonces existe una única función $F(x,t)$ definida en $\Omega \times T$ con las mismas propiedades que f y además cumple que en la vecindad Σ, $F(x,t) = f(x,t)$.*

Usando este resultado el autor demuestra, en el mismo artículo, un teorema de extensión para las llamadas funciones multi-monogénicas, es decir, para funciones monogénicas en cada una de las variables $x^{(j)} = (x_0^{(j)}, \cdots, x_{m_j}^{(j)})$, donde $x^{(j)} \in \mathbb{R}^{m_j+1}$, $\mathbb{R}^{m_1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_l+1} = \mathbb{R}^M$, $1 \leq m_j \leq n$, $j = 1, \ldots, l$, $M = m_1 + \cdots + m_l + l$, $n \geq 2$. El teorema dice:

Teorema 4. *Para cada función multi-monogénica f en Σ, existe una única función multi-monogénica F en $\Omega \cup \Sigma$ tal que $F = f$ en Σ.*

En este artículo nosotros damos un teorema de extensión para funciones multi-monogénicas en el contexto de las álgebras de Clifford parametrizadas $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$. Para lograr dicha extensión, damos una representación en series de potencias del núcleo de Cauchy del análisis de Clifford parametrizado y demostramos que las funciones monogénicas con parámetro son también funciones real analíticas en el contexto de estas álgebras de Clifford más generales, lo que permite hacer una extensión de las mismas. De esta manera conseguimos una generalización del Teorema 4 en el caso de las álgebras de Clifford clásicas.

2 Álgebras de Clifford dependiendo de parámetros

Las álgebras de Clifford dependiendo de parámetros se pueden definir a través de clases de equivalencias sobre el anillo de polinomios en n variables $X_1, ..., X_n$

con coeficientes reales $\Re[X_1, ..., X_n]$, [9]. Decimos que dos polinomios P and Q son equivalentes si su diferencia puede ser reescrita como un polinomio para el cual cada sumando contiene al menos uno de los factores

$$X_j^{k_j} + \alpha_j \quad \text{y} \quad X_jX_i + X_iX_j - 2\gamma_{ij}, \tag{1}$$

donde $k_j \geq 2$ son números naturales, $i, j = 1, ..., n$ e $i \neq j$. Los parámetros α_j y $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ tienen que ser reales y pueden depender también de otras variables tal como la variable $x \in \mathbf{R}^{n+1}$.

Si los polinomios P y Q son equivalentes escribimos $P \sim Q$. Observemos que en particular es válido

$$X_j^{k_j} + \alpha_j \sim 0 \quad \text{y} \quad X_jX_i + X_iX_j - 2\gamma_{ij} \sim 0 \quad (j \neq i),$$

lo que significa en el lenguaje de las clases de equivalencia

$$X_j^{k_j} = -\alpha_j \quad \text{y} \quad X_jX_i + X_iX_j = 2\gamma_{ij} \quad (j \neq i).$$

Si los parámetros α_j y γ_{ij} no dependen de otras variables, el álgebra de Clifford generada por las relaciones de equivalencia definidas a través de los polinomios de estructura (1) se denotará por

$$A_n(k_j, \alpha_j, \gamma_{ij}) \quad \text{si} \quad n \geq 2 \quad \text{y} \quad A_1(k, \alpha) \quad \text{si} \quad n = 1. \tag{2}$$

Usando las relaciones de estructura correspondientes a estos polinomios, cada término de un polinomio en $X_1, ..., X_n$ puede ser escrito en la forma $cX_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$ donde c es una constante real y los exponentes ν_j satisfacen $0 \leq \nu_j \leq k_j - 1$.

Denotamos X_j por e_j, X_1X_2 por e_{12} y así sucesivamente. Entonces el álgebra dada por (2) tiene la base $e_1^{\nu_1}e_2^{\nu_2} \cdots e_n^{\nu_n}$, $0 \leq \nu_j \leq k_j - 1$, $j = 1, ..., n$, y así tenemos

$$\dim A_n(k_j, \alpha_j, \gamma_{ij}) = k_1 \cdots k_n \ \text{ si } n \geq 2 \ \text{ y } \ \dim A_1(k, \alpha) = k \ \text{ si } n = 1.$$

En el caso que los parámetros α_j sean todos iguales a 1 y los γ_{ij} sean todos ceros, se obtiene el álgebra de Clifford clásica.

3 Núcleo de Cauchy en $A_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$

El operador de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^{n+1}$ se define a través de $D = \sum_{j=0}^{n} e_j\partial_j$, donde denotamos las variables de $\mathbb{R}^{n+1}$ por $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y ∂_j significa la diferenciación con respecto a x_j. Su operador adjunto se define por $\overline{D} = \partial_0 - \sum_{j=1}^{n} e_j\partial_j$. De manera análoga al caso de un álgebra de Clifford clásica, una solución de la ecuacion $Du = 0$ es llamada monogénica (a la izquierda) y si satisface $uD = 0$ es llamada monogénica a la derecha. Adicionalmente tenemos que para cada función monogénica (dos veces continuamente diferenciable) obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{D}Du = \partial_0^2 u + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_j^2 u - 2\sum_{i<j} \gamma_{ij}\partial_i\partial_j u = 0. \tag{3}$$

La matriz de coeficientes de la ecuación (3) está dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\gamma_{12} & \cdots & -\gamma_{1n} \\ 0 & -\gamma_{21} & \alpha_2 & \cdots & -\gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\gamma_{n1} & -\gamma_{n2} & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Supongamos que la ecuación (3) es elíptica. Esto significa que la forma cuadrática con los coeficientes (4) es definida positiva. Por lo tanto el determinante de B es diferente de cero, lo que implica que existe la inversa B^{-1}. Como B es una matriz simétrica, entonces B^{-1} también lo es. Como la matriz B tiene la forma (4), entonces su inversa tiene la forma

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

donde $A_{ij} = A_{ji}$ (debido a que $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$). Usando esos coeficientes, definimos una distancia ρ (no euclidiana) para dos puntos $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n)$ y $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ del espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\rho^2 = (x_0 - \xi_0)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j). \tag{6}$$

Usando la distancia (6), construimos la siguiente función $E(x, \xi)$:

$$E(x,\xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{1}{\rho^{n+1}} \left((x_0 - \xi_0) - \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k - \xi_k) \right), \tag{7}$$

donde ω_{n+1} es la medida de superficie de la bola unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$. Esta función recibe el nombre de *núcleo de Cauchy* del análisis de Clifford generalizado $A_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$. En [9] se prueba que esta función tiene una singularidad aislada en $x = \xi$ (en el caso elíptico) y es monogénica a izquierda y a derecha para $x \neq \xi$. Usando el kernel $E(x,\xi)$ se puede probar de manera similar al caso clásico el siguiente

Teorema 5. *(Fórmula Integral de Cauchy) [9] Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$ con frontera suficientemente suave y v una función continuamente diferenciable en $\bar{\Omega}$ y monogénica a izquierda en Ω con valores en $A_n(2,\alpha_j,\gamma_{ij})$. Entonces en puntos interiores de Ω, v se puede representar por*

$$c(\alpha_j,\gamma_{ij}) \cdot v(\xi) = \int_{\partial\Omega} E(x,\xi) \cdot d\sigma \cdot v. \tag{8}$$

Aquí el valor $c(\alpha_j,\gamma_{ij})$ depende continuamente de los parámetros α_j y γ_{ij} y $d\sigma = \sum_{j=0}^{n} e_j N_j d\mu$ es el elemento de medida de $\partial\Omega$ con valores en $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, donde $N = (N_0, N_1, ..., N_n)$ es la normal unitaria exterior y $d\mu$ es el elemento de medida escalar de $\partial\Omega$.

Lema 1.

$$\rho^2 = \left[(x_0-\xi_0) - \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k-\xi_k)\right] \cdot \left[(x_0-\xi_0) + \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k-\xi_k)\right]$$

Demostración Para simplificar los cálculos, elegimos $\xi = (0,0,\cdots,0)$. Entonces el producto entre los corchetes es igual a

$$x_0\left(x_0 - \sum_{i,k} e_i A_{ik} x_k\right) + \sum_{l,\nu} e_l A_{l\nu} x_\nu \left(x_0 - \sum_{i,k} e_i A_{ik} x_k\right). \tag{9}$$

Esto es un polinomio cuadrático en las variables $x_j,\ j = 0,1,\ldots,n$. El coeficiente de x_0^2 es 1, mientras los términos lineales de x_0 se cancelan uno con otro. Como los coeficientes de los cuadrados de los restantes $x_j,\ j = 1,\ldots,n$. se calculan de manera similar, basta mostrar el cálculo de uno de ellos. Por ejemplo, el coeficiente de x_1^2 está dado por

$$\begin{aligned}-\sum_{l,i} e_l e_i A_{l1} A_{i1} &= -\sum_{l} e_l^2 A_{l1}^2 - \sum_{i<l} e_l e_i A_{l1} A_{i1} - \sum_{i>l} \cdots \\ &= \sum_l \alpha_l A_{l1}^2 - 2\sum_{i<l} \gamma_{li} A_{i1} A_{l1} = \sum_l \left(\alpha_l A_{l1} - \sum_{l\neq i} \gamma_{li} A_{i1}\right) A_{l1}\end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis en la última línea es el producto escalar de la $(l+1)$-ésima fila de (4) con la segunda columna de (5), es decir, obtenemos $\sum_l \delta_{l1} A_{l1} = A_{11}$ para el coeficiente de x_1^2.

Análogamente, para calcular los coeficientes de productos mixtos bastará con mostrar el cálculo del coeficiente de x_1x_2, el cual está dado por

$$\begin{aligned}-\sum_{l,i} e_l e_i (A_{l1}A_{i2}+A_{l1}A_{i1}) &= \sum_l \alpha_l (A_{l1}A_{l2}+A_{l2}A_{l1}) - \sum_{i\neq l} \gamma_{li}(A_{l1}A_{i2}+A_{l2}A_{i1})\\ &= \sum_l A_{l1}\left(\alpha_l A_{l2} - \sum_{l\neq i}\gamma_{li}A_{i2}\right) + \sum_l A_{l2}\left(\alpha_l A_{l1} - \sum_{l\neq i}\gamma_{li}A_{i1}\right)\end{aligned}$$

El primer y segundo paréntesis en la línea anterior no son más que los productos escalares de la $(l+1)$-ésima fila de (4) con la tercera y segunda columna de (5) respectivamente, y por eso se sigue que $\sum_l A_{l1}\delta_{l2} + \sum_l A_{l2}\delta_{l1} = A_{21} + A_{12}$ para el coeficiente de x_1x_2.

En resumen, la expresión dada por (9) (con $\xi \neq 0$) es igual a

$$(x_0 - \xi_0)^2 + \sum_{\nu,k} A_{\nu k}(x_\nu - \xi_\nu)(x_k - \xi_k) = \rho^2. \qquad \blacksquare$$

A continuación probaremos la representación en serie de potencias del núcleo de Cauchy en $A_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$.

Teorema 6. *El núcleo de Cauchy generalizado $E(x, \xi)$ posee una representación en serie de potencias alrededor del origen para $\|\xi\|_\rho < \|x\|_\rho$ donde $\|\cdot\|_\rho$ es la distancia no Euclidiana ρ dada por (6).*

Demostración Sean

$$x' - \xi' = (x_0 - \xi_0) + \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k - \xi_k), \quad \overline{x' - \xi'} = (x_0 - \xi_0) - \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k - \xi_k).$$

Por el lema anterior $(x' - \xi') \cdot (\overline{x' - \xi'}) = \rho^2$. Denotemos por $\|\cdot\|_\rho$ la distancia no euclidiana ρ. Así

$$E(x, \xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{\overline{x' - \xi'}}{\|x' - \xi'\|_\rho^{n+1}}.$$

Si n es impar, entonces $n + 1 = 2l$ es par. Luego

$$E(x, \xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{\overline{x' - \xi'}}{\|x' - \xi'\|_\rho^2 \cdots \|x' - \xi'\|_\rho^2},$$

donde en el denominador hay l factores. Por lo tanto

$$\begin{aligned}E(x, \xi) &= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot (\overline{x' - \xi'})(\overline{x' - \xi'})^{-1}(x' - \xi')^{-1} \cdots (\overline{x' - \xi'})^{-1}(x' - \xi')^{-1}\\ &= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot (x' - \xi')^{-1} \cdots (\overline{x' - \xi'})^{-1}(x' - \xi')^{-1}. \qquad (10)\end{aligned}$$

Observe que podemos hablar del inverso debido a que $x'\overline{x'} = \|x'\|^2$, de manera que, para $x' \neq 0$, $x'^{-1} = \frac{\overline{x'}}{\|x'\|^2}$. Además se tiene

$$\begin{aligned}(x'-\xi')^{-1} &= \left((1-\xi' x'^{-1})x'\right)^{-1} = x'^{-1}(1-\xi' x'^{-1})^{-1} \\ &= x'^{-1}\left(1+\xi' x'^{-1} + (\xi' x'^{-1})^2 + \cdots + (\xi' x'^{-1})^k + \cdots\right) \quad (11)\end{aligned}$$

la cual converge uniformemente en $\left\|\xi' x'^{-1}\right\|_\rho < 1$, es decir, en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$. Así,

$$\begin{aligned}E(x,\xi) &= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot x'^{-1}(1-\xi' x'^{-1})^{-1} \cdots \overline{x'}^{-1}(1-\overline{\xi}'\overline{x'}^{-1})^{-1}\left(x'^{-1}\right)(1-\xi' x'^{-1})^{-1} \\ &= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot x'^{-1}\left(1+\xi' x'^{-1} + (\xi' x'^{-1})^2 + \cdots\right)\cdots \\ &\cdots \overline{x'}^{-1}\left(1+\overline{\xi}'\overline{x'}^{-1} + (\overline{\xi}'\overline{x'}^{-1})^2 + \cdots\right) x'^{-1}\left(1+\xi' x'^{-1} + (\xi' x'^{-1})^2 + \cdots\right) \quad (12)\end{aligned}$$

serie que converge uniformemente en $\left\|\overline{\xi}'\overline{x'}^{-1}\right\|_\rho = \left\|\xi' x'^{-1}\right\|_\rho < 1$, es decir, en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$.

Si $n = 2l$ es par, entonces $n+1$ es impar. Luego

$$E(x,\xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{\overline{x'-\xi'}}{\|x'^{-1}\|_\rho \cdot \|1-\xi' x'^{-1}\|_\rho} \frac{1}{\|x'-\xi'\|_\rho^2 \cdots \|x'-\xi'\|_\rho^2},$$

donde el producto en el denominador del segundo cociente tiene l factores. Como

$$\frac{1}{\|x'-\xi'\|_\rho^2 \cdots \|x'-\xi'\|_\rho^2}$$

posee una representación en serie de potencias que converge en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$ por lo visto en el caso anterior y

$$\frac{1}{\|1-\xi' x'^{-1}\|_\rho} \leq 1 + \left\|\xi' x'^{-1}\right\|_\rho + \left\|\xi' x'^{-1}\right\|_\rho^2 + \cdots$$

converge uniformemente en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$, entonces $E(x,\xi)$ también converge uniformemente en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$. ■

4 Funciones multi-monogénicas

Observemos que el Teorema 6 permite mostrar, usando la Fórmula Integral de Cauchy (8) y los argumentos de convergencia uniforme usuales, que toda función monogénica en el álgebra de Clifford $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$ posee una representación en serie de potencias. Así tenemos el siguiente

Teorema 7. *Sea $f(x,t)$ una función a valores en el álgebra $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, monogénica a izquierda con respecto a $x \in \Omega$, para cada $t \in T$ fijo. Entonces $f(x,t)$ es una función real analítica con respecto a $x \in \Omega$, para cada $t \in T$ fijo.*

Sean $m \leq n$ y $k \leq n$, Ω y T dominios acotados en $\mathbb{R}^{m+1}(x)$ y $\mathbb{R}^{k+1}(t)$ respectivamente, $f(x,t)$ una función a valores en el álgebra $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, monogénica a izquierda con respecto a $x \in \Omega$ para $t \in T$ fijo y real analítica con respecto a $t \in T$ para $x \in \Omega$ fijo, entonces del teorema de continuidad analítica para funciones real analíticas se sigue el siguiente

Lema 2. *Si $f = 0$ en un subconjunto abierto no vacío $\sigma \subseteq \Omega \times T$, entonces $f = 0$ en todo $\Omega \times T$.*

Lema 3. *Sea Σ una vecindad abierta de $\partial(\Omega \times T)$, $f(x,t)$ una función real analítica en todas las variables $(x_0,\ldots,x_m;t_0,\ldots,t_k)$, para $(x,t) \in \Sigma$. Entonces la función $F(x,t)$ definida por*

$$c(\alpha_i,\gamma_{ij}) \cdot F(x,t) = \int_{\partial\Omega} E(\xi,x) \cdot d\sigma \cdot f(\xi,t) \tag{13}$$

es una función real analítica en $(x,t) \in \Omega \times T$, donde $d\sigma$ es el elemento de medida de $\partial\Omega$ con valores en $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$ y $c(\alpha_i,\gamma_{ij})$ es la constante dada en (8).

Demostración Es claro que $F(x,t)$ está definida en todo $(x,t) \in \Omega \times T$. Sea $(a,b) \in \Omega \times T$. Debemos mostrar que F puede ser escrita como una suma en serie de potencias que converge normalmente en una vecindad de (a,b). Sea $\xi^o \in \partial\Omega$. Como $(\xi^o,b) \in \Sigma$ se tiene que $f(\xi,t)$ está definida y es real analítica en una vecindad de (ξ^o,b). Por lo tanto existen números positivos ρ_o y ρ_b tales que

$$f(\xi,t) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} c_{\mu,\nu}(\xi-\xi^o)^\mu (t-b)^\nu$$

para $\xi \in B_m(\xi^o,\rho_o)$ y $t \in B_k(b,\rho_b)$, donde $B_m(\xi^o,\rho_o)$ y $B_k(b,\rho_b)$ son bolas en $\mathbb{R}^{m+1}$ y $\mathbb{R}^{k+1}$, respectivamente, $(\xi-\xi^o)^\mu = (\xi_0-\xi_0^o)^{\mu_0}(\xi_1-\xi_1^o)^{\mu_1}\cdots(\xi_m-\xi_m^o)^{\mu_m}$, $(t-b)^\nu = (t_0-b_0)^{\nu_0}(t_1-b_1)^{\nu_1}\cdots(t_m-b_m)^{\nu_m}$ y $c_{\mu,\nu}$ son constantes en el álgebra $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$. La serie converge normalmente en $\overset{\circ}{B}_m(\xi^o,\rho_o)\times\overset{\circ}{B}_k(b,\rho_b)$, donde $\overset{\circ}{B}_m(\xi^o,\rho_o)$ y $\overset{\circ}{B}_k(b,\rho_b)$ denotan el interior de $B_m(\xi^o,\rho_o)$ y $B_k(b,\rho_b)$ respectivamente (son las bolas abiertas). Además $B_m(\xi^o,\rho_o) \times B_k(b,\rho_b) \subset \Sigma$.

Sea ahora $\sigma_{\xi^o} = \overset{\circ}{B}_m(\xi^o,\rho_o) \cap (\partial\Omega)$ entonces el sistema $\partial = \{\sigma_{\xi^o} \ : \ \xi^o \in \partial\Omega\}$ es un cubrimiento abierto de $\partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ es compacta, existe un subcubrimiento finito de estos abiertos que denotaremos por $\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p\}$.

Consideremos los conjuntos $\Gamma_1 = \sigma_1,\ \Gamma_2 = \sigma_2 \setminus \Gamma_1, \ldots, \Gamma_p = \sigma_p \setminus (\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{p-1})$. Luego $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_j$ y $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$. De aquí que podamos escribir

$$c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F(x,t)=\sum_{q=1}^{p}F_q(x,t),\quad \text{con}\quad F_q(x,t)=\int_{\Gamma_q}E(\xi,x)d\sigma f(\xi,t).$$

Por lo tanto basta con dar una representación en serie de potencias para estas F_q. Por definición vemos que, si $\xi\in\Gamma_q$, entonces $\xi\in B_m(\xi^q,\rho_q)$, donde $\xi^q\in\partial\Omega$ y $\rho_q>0$. Para estos ξ tenemos que

$$f(\xi,t)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}c_{\mu,\nu}^{(q)}(\xi-\xi^q)^{\mu}(t-b)^{\nu}$$

y esta serie converge normalmente en $B_m(\xi^q,\rho_q)\times\overset{\circ}{B}_k(b,\rho_b)$. Por otro lado, si x está suficientemente cerca de a tenemos

$$E(\xi,x)=\sum_{\beta=0}^{\infty}d_{\beta}(x-a)^{\beta}$$

donde $\beta=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m)$, $(x-a)^{\beta}=(x_0-a_0)^{\beta_0}(x_1-a_1)^{\beta_1}\cdots(x_m-a_m)^{\beta_m}$, d_β son constantes del álgebra y la serie converge normalmente. De estas representaciones se sigue que

$$F_q(x,t)=\sum_{\beta,\nu=0}^{\infty}C_{\beta,\nu}^{(q)}(x-a)^{\beta}(t-b)^{\nu}$$

convergiendo normalmente en una vecindad suficientemente pequeña de (a,b).

Como $c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F$ es suma de las F_q, la propia $c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F$ puede ser representada como una serie de potencias que converge normalmente en una vecindad suficientemente pequeña de (a,b). Como $(a,b)\in\Omega\times T$ fue tomado de forma arbitraria, el resultado se sigue en todo $\Omega\times T$. ■

A continuación probaremos con la ayuda de los dos lemas anteriores un teorema de extensión para funciones monogénicas con parámetro y valores en $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$.

Teorema 8. *Considere $m\le n$, $k\le n$ y Ω, T dominios acotados en $\mathbb{R}^{m+1}(x)$ y $\mathbb{R}^{k+1}(t)$ respectivamente. Suponga que Σ es una vecindad abierta de $\partial(\Omega\times T)$. Suponga también que $f(x,t)$ es una función con valores en $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, real analítica en Σ y monogénica a izquierda en la variable x, para cada t fijo. Entonces existe una única función $G(x,t)$ definida en $\Omega\times T$ con las mismas propiedades que f y que además satisface $G(x,t)=f(x,t)$ en Σ.*

Demostración Sea $F(x,t)$ definida por la fórmula (13), donde $f(x,t)$ es la función dada. Por el Lema 3, $c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F(x,t)$ está definida y es real analítica en $(x,t) \in \Omega \times T$. Además, por definición F es monogénica con respecto a $x \in \Omega$, para $t \in T$ fijo. Cuando t está suficientemente cerca de ∂T y $x \in \partial\Omega$ se tiene que $(x,t) \in \Sigma$ y la parte derecha de la ecuación (13) es la Fórmula Integral de Cauchy para $f(x,t)$. Con lo cual $c(\alpha_i, \gamma_{ij}) \cdot F(x,t) = f(x,t)$ para tales t. Por el teorema identidad para funciones real analíticas, se tiene que $c(\alpha_i, \gamma_{ij}) \cdot F(x,t) = f(x,t)$ en Σ. Luego, $G(x,t) = c(\alpha_i, \gamma_{ij}) \cdot F(x,t)$ es la extensión de $f(x,t)$ buscada. Por el Lema 2 se sigue que tal extensión es única. $\blacksquare$

Sea Ω el conjunto dado por $\mathbb{R}^{m_1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_l+1} = \mathbb{R}^M$, donde $1 \leq m_j \leq n$ con $j = 1, \ldots, l$ y $M = m_1 + \cdots + m_l + l$. Al igual que antes, consideremos funciones f definidas en Ω y tomando valores en el álgebra de Clifford $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$, es decir, $f(x^{(1)}, \cdots, x^{(l)}) = \sum_\alpha f_\alpha(x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}) e_\alpha$, donde $x^{(j)} = (x_0^{(j)}, \ldots, x_{m_j}^{(j)}) \in \mathbb{R}^{m_j+1}$ para $j = 1, \ldots, l$.

Definición 3. *Diremos que* $f : \Omega \to A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ *es multi-monogénica en* Ω *si y sólo si* $f \in C^1(\Omega; A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij}))$ *y satisface el sistema* $D_{x^{(j)}} f = \sum_{i=0}^{m_j} e_i \partial_i f = 0$.

Sea f una función multi-monogénica en Ω y $B(a,r) = B_1(a^{(1)}, r_1) \times \ldots \times B_l(a^{(l)}, r_l)$, donde $B_j(a^{(j)}, r_j)$ es una bola en $\mathbb{R}^{m_j+1}$ con centro en $a^{(j)} = (a_0^{(j)}, \ldots, a_{m_j}^{(j)})$ y radio $r_j > 0$. Suponga que $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$. Sea $(x^{(1)}, \cdots, x^{(l)}) \in \overset{\circ}{B}(a,r)$ y consideremos a f como una función de la variable $x^{(1)}$ solamente, manteniendo fijas las variables restantes. Entonces f es una función monogénica a izquierda y por lo tanto podemos usar la Fórmula Integral de Cauchy (8), obteniendo así

$$c(\alpha_j, \gamma_{ij}) f(x^{(1)}, \cdots, x^{(l)}) = \int_{\partial B_1} E(\xi^{(1)}, x^{(1)}) \cdot d\sigma(\xi^{(1)}) \cdot f(\xi^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}). \tag{14}$$

Un razonamiento análogo nos lleva a la expresión

$$c(\alpha_j, \gamma_{ij}) f(\xi^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}) = \int_{\partial B_2} E(\xi^{(2)}, x^{(2)}) \cdot d\sigma(\xi^{(2)}) \cdot f(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, x^{(3)}, \cdots, x^{(l)}) \tag{15}$$

al considerar $f(\xi^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)})$ como función de la variable $x^{(2)}$ solamente, manteniendo las demás fijas. Sustituyendo ahora (15) en (14) obtenemos

$$\begin{aligned} &(c(\alpha_j, \gamma_{ij}))^2 f(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}) \\ = &\int_{\partial B_1 \times \partial B_2} E(\xi^{(1)}, x^{(1)}) \cdot d\sigma(\xi^{(1)}) E(\xi^{(2)}, x^{(2)}) \cdot d\sigma(\xi^{(2)}) \cdot f(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, x^{(l)}). \end{aligned} \tag{16}$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos la Fórmula Integral de Cauchy para funciones multi-monogénicas en el álgebra $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$:

$$\begin{aligned}&(c(\alpha_j,\gamma_{ij}))^l f(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(l)})\\ &=\int_{\partial_0 B} E(\xi^{(1)},x^{(1)})\cdot d\sigma(\xi^{(1)})\cdots E(\xi^{(l)},x^{(l)})\cdot d\sigma(\xi^{(l)})\cdot f(\xi^{(1)},\xi^{(2)},\cdots,\xi^{(l)}),\end{aligned} \tag{17}$$

donde $\partial_0 B=\partial B_1\times\cdots\times\partial B_l$ y los $d\sigma(\xi^{(j)})$ están definidos como antes.

En lo que sigue sean $\Omega=\Omega_1\times\cdots\times\Omega_l\subset\mathbb{R}^M$ un policilindro, donde Ω_j son dominios en $\mathbb{R}^{m_j+1}(x^{(j)})$ para $j=1,\ldots,l$, y Σ una vecindad abierta de $\partial\Omega$.

Teorema 9. *Para toda función multi-monogénica f en Σ con valores en $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, existe una única función multi-monogénica G en $\Omega\cup\Sigma$ tal que $G=f$ en Σ.*

Demostración Consideremos a f como una función monogénica con respecto a la variable $x^{(1)}\in\Omega_1$ y dependiendo de $t=(x^{(2)},\cdots,x^{(l)})$ como parámetro, entonces del Teorema 8 se sigue que existe una función $G(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(l)})$ definida en $\Omega\cup\Sigma$, monogénica con respecto a $x^{(1)}$, real analítica con respecto a todas las variables en Ω y $G=f$ en Σ. Para $j=2,\ldots,l$ sea $G_j(x^{(1)},\cdots,x^{(j)},\cdots,x^{(l)})=D_{x^{(j)}}G$. Entonces G_j es real analítica con respecto a $x^{(j)}$ en Ω_j, fijando las otras variables. Si $x^{(j)}$ está suficientemente cerca de $\partial\Omega_j$ entonces $x=(x^{(1)},\cdots,x^{(j)},\cdots,x^{(l)})\in\Sigma$. De aquí que $G=f$, es decir, $G_j=D_{x^{(j)}}f=0$ en Σ. Por el teorema identidad para funciones real analíticas se tiene que $G_j=D_{x^{(j)}}G=0$, $\forall x^{(j)}\in\Omega_j$. De manera que G es multi-monogénica en Ω y es la extensión requerida para f. La unicidad de dicha extensión se sigue del Lema 2. ■

Referencias

[1] Abreu Blaya, R. & Bory Reyes, J. (2008). Hartogs Extension Theorem for Functions with Values in Complex Clifford Algebras. *AACA*.V.18, 147-151.

[2] Brackx, F. Delanghe, R. & Sommen, F. (1982). *Clifford Analysis.* London. Research Notes in Mathematics 76, Pitman Books Ltd.

[3] Ehrenpreis, L. (1961). A new proof and an extension of Hartog's theorem. *Bull. Am. Math. Soc.* V. 67, 507-509.

[4] Hartogs, F. (1906). Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, *Math. Ann.* 62, 1-88.

[5] Hung Son, L. (1990). Monogenic Functions with parameter in Clifford Analysis. *International Centre for Theoretical Physics.* IC/90/25.

[6] Hung Son, L. (1990). An Extension Problem for Solutions of Partial Differential Equations in $\mathbb{R}^n$. *CV*. V. 15, 87-92.

[7] Hung Son, L. (1990). Matrix Criterions for the Extension of Solutions of a General Linear System of Partial Differential Equatios. *CV*. V. 15, 75-85.

[8] Sobieszek, T. (2003). On the Hartogs extension theorem. *Annales Polonici Mathematici*. V. 80, 219-222.

[9] Tutschke, W. & Vanegas, C. (2008). *Métodos del análisis complejo en dimensiones superiores*. Ediciones IVIC, Caracas.

Eusebio Ariza, Carmen Judith Vanegas
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas,
Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.

e-mail: euariza@gmail.com, cvanegas@usb.ve