Vol. XIX • No. 2 • Año 2012

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XIX, Número 2, Año 2012
I.S.S.N. 1315–4125

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet:
`http://amv.ivic.ve/` .

Asociación Matemática Venezolana

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Vol. XIX • No. 2 • Año 2012

Editorial
De aniversario

Oswaldo Araujo

El 2012 fue un año de fiesta para la comunidad matemática venezolana pues celebramos los 25 años de las Jornadas Venezolanas de Matemáticas (JVM) y de la Escuela Venezolana de Matemáticas (EVM).

Por espacio de un cuarto de siglo nuestra comunidad ha realizado ininterrumpidamente ambas actividades. No es cualquier cosa, sobretodo, si consideramos que, en los últimos años, las Universidades del país, así como, sus Centros de investigación no han recibido el apoyo necesario ni, del Ministerios del Poder Popular para la Educación Universitaria, ni del Ministerio del Poder Popular para Ciencia, Tecnología e Innovación. Impidiendo así que esas Instituciones puedan crecer y enfrentar, exitosamente, el llamado siglo del conocimiento.

Es asombroso que, a pesar de esa equivocada e irracional política, de los mencionados entes, ésta no haya conseguido mermar el entusiasmo con que los matemáticos continúan participando, tanto en las JVN, como en la EVM. Sin embargo, ella, sí ha obligado a sus organizadores a buscar nuevas fuentes de financiamiento, nacional e internacional, y a reorganizar la ejecución de ambos eventos. Y, lo más lamentable, ha desmejorado las relaciones laborales en las universidades; en consecuencia, algunos de sus miembros se han visto forzados a abandonar el país para conseguir mejores condiciones de trabajo.

En la historia de nuestra vida republicana el año 1958 marca un hito pues, en esa fecha, comienza la Democracia en Venezuela y se fundan instituciones, tales como, la Facultad de Ciencias, de la Universidad Central de Venezuela (UCV), que serán fundamentales para el desarrollo de la Ciencia en Venezuela.

La Facultad de Ciencias, de la UCV, estuvo integrada, inicialmente, por las Escuelas de: Biología, Física y Matemáticas, y Química. Precisamente, es en el Departamento de Matemáticas, de la segunda Escuela antes mencionada donde se llevará a cabo, metódicamente, la formación de los futuros matemáticos. Gracias a esta sostenida actividad se establecerá una robusta comunidad matemática que, en los años ochenta, emprenderá significativos proyectos, entre otros, las JVM, la EVM, la creación de la Asociación Matemática Venezolana (AMV) y de su órgano divulgativo, el Boletín de la AMV.

La carencia de una verdadera política racional, inteligente y nacionalista, por parte de los gobiernos bolivarianos, le ha ocasionado un daño tan grande a la matemática venezolana que ésta necesitará, por lo menos, unos 20 años para recuperar el nivel alcanzado en los ochenta.

Es de advertir que esta desgraciada situación ocurre cuando el ingreso por la renta petrolera ha alcanzado cifras extraordinarias. En efecto, algunos economistas estiman que, en los últimos 14 años, por ese concepto, el Estado venezolano ha recibido 700 mil millones de dólares. ¿Cómo es posible que un porcentaje de esa fabulosa cifra no se haya invertido correctamente en Ciencia y Educación?

La historia de la República dirá quienes usaron los dineros del Estado venezolano en pro del progreso de la matemática y quiénes no. Mientras llega ese momento, festejemos: Nosotros sabemos que lo que hemos hecho ha sido importante para el crecimiento de la matemática en Venezuela.

Oswaldo Araujo G.

ARTÍCULOS

(Dirichlet-Neumann)-Schwarz problem for the nonhomogeneous tri-analytic equation

Antonio Nicola Di Teodoro and Carmen Judith Vanegas

Abstract. The goal of this paper is to solve a combined boundary value problem for the nonhomogeneous tri-analytic equation namely the (Dirichlet-Neumann)-Schwarz problem. In order to obtain the solution and solvability conditions we use an iteration's process involving those corresponding to equations of lower order.

Resumen. El objetivo de este artículo es el de resolver un problema de valores de frontera combinado para la ecuación no–homogénea tri–analítica, es decir, el problema de (Dirichlet-Neumann)-Schwarz. Con el fin de obtener la solución y las condiciones de solubilidad, utilizamos un proceso iterativo que involucra las ecuaciones correspondientes de orden inferior.

Keywords: Combined boundary value problems, tri-analytic equations, solvability conditions.
2010 AMS Subject Classifications: 35G15, 35C15, 35N25

1 Introduction

Basic boundary value problems in complex analysis are the Schwarz, the Dirichlet and the Neumann boundary value problems. The Schwarz problem is the simplest form of the Riemann-Hilbert problem. The Dirichlet problem is related to the Riemann jump problem and the Neumann problem is connected to the Dirichlet problem. In the last ten years these boundary value problems have been investigated in different domains. Particularly in [2] Heinrich Begehr started a systematic investigation on the unit disc $\mathbb{D}$ of the complex plane for complex model equations using integral representation formulas. He also introduced there the study of combined boundary value problems which are boundary value problems involving different boundary conditions. In those papers he used an iteration's process to get a solution for the problems involving operators of higher order. Using this method integral representations for solutions to higher order partial differential equations can be obtained from the representation integral formulas for those corresponding to first order equations. This method has been used many times, see [1, 2, 6] and references therein. In [1, 3], the authors studied Dirichlet, Neumann and Schwarz boundary value problems for equations of higher order and some combined problems taking into account only two different boundary conditions for those equations.

Following their idea we solve in this paper a combined boundary value problem for a higher order equation involving a particular combination of three different boundary conditions: Dirichlet, Neumann and Schwarz conditions. For do it we apply the Begehr's method. Because of the laborious calculations to be done, we have restricted our study to the inhomogeneous tri-analytic equation.

The combined problem studied in this paper is (Dirichlet-Neumann)-Schwarz problem and in order to give an explicit integral representation for the solution, the unit disc of the complex plane is taken as the domain. For the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation in a regular domain D belonging to the complex plane, the Schwarz problem is well-posed while the Dirichlet-Neumann problem is overdetermined. Therefore we have to look for solvability conditions. This last also happens in the combined (Dirichlet-Neumann)-Schwarz problem in the unit disc and hence we have to determine solvability conditions.

The integral representation of the solution and the solvability conditions (found using the Begehr's method) for our combined problem are original results and represent our main contribution in this research.

The problem solved in this paper may be used as a starting point to study others combined problems, combined problems in other bounded or unbounded domains and also for higher order equations. Combined problems can model physical and engineering problems involving different geometries, see [4, 5].

In order to solve our combined problem we will need the following problems whose proofs can be found in [2].

Theorem 1.1. *The Schwarz problem for the inhomogeneous analytic equation in the unit disc*

$$\partial_{\overline{z}}\omega = f \, in \, \mathbb{D}, \quad Re(\omega) = \gamma \, on \, \partial\mathbb{D}, \quad Im(\omega)(0) = c$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, has a unique solution. The solution is given by the Cauchy-Schwarz-Pompeiu formula

$$\omega(z) = ic + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{f(\zeta)}{\zeta} + \frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\,d\xi d\eta, \tag{1}$$

for $\zeta = \xi + i\eta$.

THEOREM 1.2. *The Dirichlet-Neumann problem for the inhomogeneous Bitsadze equation in the unit disc*

$$\partial_{\overline{z}}^2\omega = f \text{ on } \mathbb{D}, \quad \omega = \gamma_0 \text{ in } \partial\mathbb{D}, \quad \partial_\nu \partial_{\overline{z}}\omega = \gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad \partial_{\overline{z}}\omega(0) = c,$$

where ∂_ν *is the Neumann operator defined by* $\partial_\nu = (z\partial_z + \overline{z}\partial_{\overline{z}})$, *is uniquely solvable for* $f \in L_1(\mathbb{D},\mathbb{C}) \cap C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C})$, $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C})$, *and* $c \in \mathbb{C}$ *if and only if*

$$c - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_0(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta}\, d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{z}\zeta}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\xi d\eta = 0. \tag{2}$$

and

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} (\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}f(\zeta))\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{z}f(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\, d\xi d\eta = 0. \tag{3}$$

The solution then is given by

$$\begin{aligned}\omega(z) = c\overline{z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_0(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} [\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}f(\zeta)]\log(1 - z\overline{\zeta})\frac{1-\mid z\mid^2}{z}\,\frac{d\zeta}{\zeta} \\ + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{(\zeta - z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{4}$$

The Schwarz problem for the inhomogeneous polyanalytic equation is proved in [2]. For the same equation the Dirichlet-Neumann problem is proved in [6]. In [1] using a non-iterative process, the Schwarz-Dirichlet-half-Neumann-$(n-2)$ problem and the Dirichlet-half-Neumann-$(n-2)$-Schwarz problem for the inhomogeneous polyanalytic equation have been studied.

The mathematical tools which we use in this paper are classical results of the complex analysis as Gauss Theorem, Cauchy Theorem and Cauchy-Pompeiu Formula [7]. To make it easier to read this paper, we have been included the most of details of computations.

2 Some region and boundary integrals

LEMMA 2.1. *For* $|z| < 1$ *and* $|\tilde{\zeta}| < 1$

i. $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}\, d\xi d\eta = \frac{\overline{z}}{2}.$

ii. $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(1-|\zeta|^2)(\tilde{\zeta}+\zeta)}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\xi d\eta = 2\overline{\tilde{\zeta}}+\frac{\overline{z}}{2}+2\overline{z}\frac{\overline{z}-\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}+\frac{\overline{z}-\overline{\tilde{\zeta}}|\tilde{\zeta}|^2}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}.$

iii. $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(1-|\zeta|^2)(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta = \overline{\tilde{\zeta}}+\frac{\overline{z}}{2}.$

iv. $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}\,d\zeta = \overline{z}.$

v. $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(\tilde{\zeta}+\zeta)}{\zeta(\tilde{\zeta}-\zeta)(1-\overline{z}\zeta)}\,d\zeta = -\frac{\overline{z}(1+\overline{z}\tilde{\zeta})}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}.$

vi. $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\zeta = 2\overline{\tilde{\zeta}}+\overline{z}.$

vii. $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,d\xi d\eta = \overline{z}.$

viii. $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}(\tilde{\zeta}+\zeta)}{(\tilde{\zeta}-\zeta)(1-\overline{z}\zeta)^2}\,d\xi d\eta = \overline{z}+\frac{2\overline{z}(|\tilde{\zeta}|^2-1)}{(1-\overline{z}\tilde{\zeta})^2}.$

ix. $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\zeta\overline{z})^2(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta = \overline{z}.$

Proof. *i.* First we rewrite the given integral as

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(1-|\zeta|^2)}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}\,d\xi d\eta = \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1}{\zeta}\,d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}}{(1-\overline{z}\zeta)}\,d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}}{(1-\overline{z}\zeta)}\,d\xi d\eta. \quad (5)$$

From the Cauchy-Pompeiu formula we have

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1}{\zeta-z}\,d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta-z}\,d\zeta-\overline{z}.$$

Denoting the first integral on the right side as $h(z)$ we observe that it is an holomorphic function respect to z and

$$h^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Using the change $\zeta = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$, we can prove that $h^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, ...$ which means $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k(0)}{k!} z^k = 0$. So we have $\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = -\overline{z}$ and if we make $z = 0$ we get

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta}\, d\xi d\eta = 0. \tag{6}$$

From theorem's Gauss

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}\, d\xi d\eta &= \overline{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{\zeta}}{1-\overline{z}\zeta}\, d\zeta = -\overline{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\, d\overline{\zeta} \\ &= -\overline{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\, d\overline{\zeta} = \overline{z\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta} = \overline{z}\end{aligned} \tag{7}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{\zeta}}{1-\overline{z}\zeta}\, d\xi d\eta = \frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{\zeta}^2}{1-\overline{z}\zeta}\, d\zeta = \\ &\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{2(1-\overline{z}\zeta)\zeta^2}\, d\zeta = \Big(\frac{1}{2(1-\overline{z}\zeta)}\Big)'\Big|_{\zeta=0} = \frac{\overline{z}}{2}.\end{aligned} \tag{8}$$

Finally from (5)-(8) we obtain the desired result.

ii. We split the given integral in four integrals:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{(1-|\zeta|^2)(\tilde{\zeta}+\zeta)}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\, d\xi d\eta &= \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta}\, d\xi d\eta + \frac{2}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\tilde{\zeta}-\zeta}\, d\xi d\eta \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{z}(\tilde{\zeta}+\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\, d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{\zeta}(\tilde{\zeta}+\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\, d\xi d\eta.\end{aligned}$$

From proof of (i) we know that $\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta}\, d\xi d\eta = 0$.

Using Cauchy-Pompeiu Formula and Cauchy's theorem we get the value of the other integrals

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta-\tilde{\zeta}}\, d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta-\tilde{\zeta}}\, d\zeta - \overline{\tilde{\zeta}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{1-\tilde{\zeta}\overline{\zeta}}\, d\overline{\zeta} - \overline{\tilde{\zeta}} = -\overline{\tilde{\zeta}}$$

and

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\xi d\eta=\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\tilde{\zeta}-\zeta+2\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\xi d\eta=\\
&\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1}{1-\overline{z}\zeta}\,d\xi d\eta+\frac{2}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)(\zeta-\tilde{\zeta})}\,d\xi d\eta=\\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{1-\overline{z}\zeta}\,d\zeta+\frac{2}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{(1-\overline{z}\zeta)(\zeta-\tilde{\zeta})}\,d\zeta-\frac{2\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}=\\
&\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta}\,d\zeta-\frac{2}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{(\overline{\zeta}-\overline{z})(1-\tilde{\zeta}\overline{\zeta})}\,d\overline{\zeta}-\frac{2\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}=\\
&1+2\overline{\left(\frac{\zeta}{1-\overline{\tilde{\zeta}}\zeta}\right)_{\zeta=z}}-\frac{2\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}=1+2\frac{\overline{z}-\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}(\tilde{\zeta}+\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\xi d\eta=\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}(\tilde{\zeta}-\zeta)+2\overline{\zeta}\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\xi d\eta=\\
&\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}}{1-\overline{z}\zeta}\,d\xi d\eta+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{2\overline{\zeta}\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\xi d\eta=\\
&\frac{\overline{z}}{2}+\frac{\overline{\tilde{\zeta}}^2\tilde{\zeta}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}^2\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)(\zeta-\tilde{\zeta})}\,d\zeta=\frac{\overline{z}}{2}+\frac{\overline{\tilde{\zeta}}|\tilde{\zeta}|^2-\overline{z}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}.
\end{aligned}
$$

Finally we have

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(1-|\zeta|^2)(\tilde{\zeta}+\zeta)}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\xi d\eta=\\
&2\overline{\tilde{\zeta}}+\overline{z}+2\overline{z}\frac{\overline{z}-\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}-\frac{\overline{z}}{2}-\frac{\overline{\tilde{\zeta}}|\tilde{\zeta}|^2-\overline{z}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}=2\overline{\tilde{\zeta}}+\frac{\overline{z}}{2}+2\overline{z}\frac{\overline{z}-\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}+\frac{\overline{z}-\overline{\tilde{\zeta}}|\tilde{\zeta}|^2}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}.
\end{aligned}
$$

iii. Again we separate the given integral in four other

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(1-|\zeta|^2)(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1}{\zeta}\,d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{2\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}\,d\xi d\eta + \overline{z}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta.$$

Since $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1}{\zeta}\,d\xi d\eta = 0, \quad 2\overline{\tilde{\zeta}}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1}{1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}\,d\xi d\eta = 2\overline{\tilde{\zeta}},$

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\zeta =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,\frac{d\zeta}{\zeta} = \left.\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\right|_{\zeta=0} = 1$$

and

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}^2(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\zeta =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})\overline{\zeta}^2}\,d\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\right)'_{\zeta=0} = \overline{\tilde{\zeta}}+\frac{\overline{z}}{2},$$

where we used the Gauss'theorem, we get

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(1-|\zeta|^2)(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta = 2\overline{\tilde{\zeta}} + \overline{z} - \overline{\tilde{\zeta}} - \frac{\overline{z}}{2} = \overline{\tilde{\zeta}} + \frac{\overline{z}}{2}.$$

iv. Follows from (8).

v. Follows from applying the Cauchy integral formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(\tilde{\zeta}+\zeta)}{\zeta(\tilde{\zeta}-\zeta)(1-\overline{z}\zeta)}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(1+\overline{\zeta}\tilde{\zeta})}{(\overline{\zeta}-\overline{z})(1-\overline{\zeta}\tilde{\zeta})}\,d\overline{\zeta}$$

$$=\overline{-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(\zeta-z)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\zeta}=\overline{-\left(\frac{\zeta(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}\right)\Bigg|_{\zeta=z}}=-\frac{\overline{z}(1+\overline{z}\tilde{\zeta})}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}.$$

vi. From Cauchy integral formula we obtain

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\zeta=\left(\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\right)'_{\zeta=0}=2\overline{\tilde{\zeta}}+\overline{z}.$$

vii. From Gauss' theorem and Cauchy integral formula we have

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,d\xi d\eta=\overline{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,\frac{d\zeta}{\zeta}=\overline{z}\left(\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\right)\Bigg|_{\zeta=0}=\overline{z}.$$

viii. First we split the integral into two

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta}\,d\xi d\eta=$$
$$\overline{z}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,d\xi d\eta+2\overline{z}\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\xi d\eta.$$

From Gauss'theorem we observe

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,d\zeta=$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}\,d\overline{\zeta}=\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta}=\overline{(\zeta)'_{\zeta=z}}=1$$

and from Cauchy-Pompeiu formula and Gauss' theorem we obtain

$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2(\zeta-\tilde{\zeta})}\,d\xi d\eta=$$
$$\frac{\overline{\tilde{\zeta}}\tilde{\zeta}}{(1-\overline{z}\tilde{\zeta})^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^2(\zeta-\tilde{\zeta})}\,d\zeta=$$
$$\frac{|\tilde{\zeta}|^2}{(1-\overline{z}\tilde{\zeta})^2}-\frac{1}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\Bigg|_{\zeta=\tilde{\zeta}}=\frac{|\tilde{\zeta}|^2-1}{(1-\overline{z}\tilde{\zeta})^2}.$$

Therefore we have

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}(\tilde{\zeta}+\zeta)}{(\tilde{\zeta}-\zeta)(1-\overline{z}\zeta)^2}\,d\xi d\eta=\overline{z}+\frac{2\overline{z}(|\tilde{\zeta}|^2-1)}{(1-\overline{z}\tilde{\zeta})^2}.$$

ix. From Gauss'theorem follows

$$\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\zeta\overline{z})^2(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\xi d\eta=\overline{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\zeta\overline{z})^2(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\zeta=$$
$$\overline{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta(1-\zeta\overline{z})^2(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\,d\zeta=\overline{z}\left(\frac{(1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{(1-\zeta\overline{z})^2(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\right)\Bigg|_{\zeta=0}=\overline{z}.$$

$\square$

LEMMA 2.2. *For* $|z|<1$ *and* $|\tilde{\zeta}|<1$

i. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{(1-|z|^2)}{z}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta}\log(1-z\overline{\zeta})\,d\zeta=0.$

ii. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{(1-|z|^2)}{z}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta}\log(1-z\overline{\zeta})\left(\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta}\right)d\zeta=0.$

iii. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{(1-|z|^2)}{z}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta}\log(1-z\overline{\zeta})\left(\frac{1+\overline{\tilde{\zeta}}\zeta}{1-\overline{\tilde{\zeta}}\zeta}\right)d\zeta=2\overline{\tilde{\zeta}}\frac{1-|z|^2}{z}\log(1-z\overline{\tilde{\zeta}}).$

iv. $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{\zeta(\zeta-z)}\,d\xi d\eta=\frac{\overline{z}^2}{2}.$

v. $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(|\zeta|^2-|z|^2)}{\zeta(\zeta-z)}\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta}\,d\xi d\eta=2\frac{\overline{z}|z|^2-\overline{\tilde{\zeta}}|\tilde{\zeta}|^2}{\tilde{\zeta}(z-\tilde{\zeta})}-2|z|^2\frac{\overline{z}-\overline{\tilde{\zeta}}}{z-\tilde{\zeta}}.$

vi. $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{(|\zeta|^2-|z|^2)}{\zeta(\zeta-z)}\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}\,d\xi d\eta=\frac{1+\overline{z}}{2}\frac{1+z\overline{\tilde{\zeta}}}{1-z\overline{\tilde{\zeta}}}-\frac{\overline{\tilde{\zeta}}(z-\overline{z})}{2(1-z\overline{\tilde{\zeta}})}.$

Proof. i. Applying the Cauchy'theorem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(1-|z|^2)\log(1-z\overline{\zeta})}{z\zeta}\,d\zeta=$$
$$\frac{(1-|z|^2)}{z}\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log(1-\overline{z}\zeta)\,d\zeta}=0,$$

ii. As before we separate the integral into two

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\overline{\zeta}\frac{1-|z|^2}{z}\log(1-z\overline{\zeta})\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta}= \\
\frac{1-|z|^2}{z}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\overline{\zeta}\log(1-z\overline{\zeta})\frac{\tilde{\zeta}-\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{2\zeta\overline{\zeta}\log(1-z\overline{\zeta})}{\zeta(\tilde{\zeta}-\zeta)}\,d\zeta\right]= \\
\frac{1-|z|^2}{z}\left[\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log(1-\overline{z}\zeta)\,d\zeta}+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(1-\overline{z}\zeta)}{\overline{\tilde{\zeta}}\zeta-1}\,d\zeta}\right]=0.
\end{gathered}
$$

iii. Follows from Cauchy integral formula

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}(1-|z|^2)\log(1-z\overline{\zeta})}{z}\left(\frac{1+\overline{\tilde{\zeta}}\zeta}{1-\overline{\tilde{\zeta}}\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}= \\
&\qquad -\frac{1-|z|^2}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}\log(1-z\overline{\zeta})\zeta(\overline{\zeta}+\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta(\overline{\zeta}-\overline{\tilde{\zeta}})}\,\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}}= \\
&\qquad \frac{1-|z|^2}{z}\left(\overline{-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(1-z\overline{\zeta})(\tilde{\zeta}-\zeta+2\zeta)}{\tilde{\zeta}-\zeta}\,d\zeta}\right)= \\
&\qquad =\frac{1-|z|^2}{z}\overline{(\log(1-\overline{z}\zeta))2\zeta}\Big|_{\zeta=\tilde{\zeta}}=\frac{1-|z|^2}{z}\log(1-z\overline{\tilde{\zeta}})2\overline{\tilde{\zeta}}.
\end{aligned}
$$

iv. Separating the integral into two we have

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{\zeta(\zeta-z)}\,d\xi d\eta= \\
&\qquad\qquad \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}}{(\zeta-z)}\,d\xi d\eta-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{|z|^2}{\zeta(\zeta-z)}\,d\xi d\eta. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

For the first integral on the right side, Cauchy-Pompeiu formula yields

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{2\overline{\zeta}}{\zeta-z}\,d\xi d\eta=\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}^2}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{\overline{z}^2}{2}.
$$

Denoting the first integral on the right side as $h(z)$ we observe that it is an holomorphic function respect to z and

$$
h^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}^2}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta.
$$

Using the change $\zeta = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$, we can prove that $h^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, ...$ which means $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k(0)}{k!} z^k = 0$. So we have

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = -\frac{\overline{z}^2}{2}.$$

Now the second integral on the right side of (9) becomes

$$\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{|z|^2}{\zeta(\zeta - z)}\, d\xi d\eta = \overline{z}\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = \overline{z}(-\overline{z}) = -\overline{z}^2.$$

Here we have used the proof of (i) in Lemma (2.1). Consequently, the integral on the left side in (9) is equal to $\frac{\overline{z}^2}{2}$.

v. Observing that

$$\frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\zeta(\tilde{\zeta} - \zeta)} = \frac{1}{\zeta} + \frac{2}{\tilde{\zeta} - \zeta}$$

and applying Cauchy-Pompeiu formula we obtain the identity.

vi. Follows similar to (v).

□

3 A combined boundary value problem

Using an iterative method (see [2]) we solve our combined boundary problem.

THEOREM 3.1. *The* ***(Dirichlet-Neumann)-Schwarz*** *problem for the inhomogeneous tri-analytic equation in the unit disc*

$$\begin{aligned} &\partial_{\overline{z}}^3 \omega = f \ \text{ in } \mathbb{D}, \quad \omega = \gamma_0 \ \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad \partial_\nu \partial_{\overline{z}} \omega = \gamma_1 \ \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad \partial_{\overline{z}} \omega(0) = c, \\ &Re(\partial_{\overline{z}} \partial_{\overline{z}} \omega) = \gamma_2 \ \text{ on } \partial\mathbb{D}, \quad Im(\partial_{\overline{z}} \partial_{\overline{z}} \omega(0)) = c_1 \end{aligned}$$

for $f \in L_1(\mathbb{D}, \mathbb{C}) \cap C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}),\ \gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}),\ \gamma_2 \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R}),\ c \in \mathbb{C},\ c_1 \in \mathbb{R}$, is uniquely solvable if and only if for $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} c + ic\frac{\overline{z}}{2} &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_0(\zeta)}{1 - \overline{z}\zeta}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma_2(\zeta)[2\zeta + \frac{\overline{z}}{2} - (2\overline{z} + 1)\overline{\zeta}]\, \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \left[2\zeta + \frac{\overline{z}}{2} + (2\overline{z} + |\zeta|^2) \frac{\overline{z} - \overline{\zeta}}{1 - \overline{z}\zeta} \right] d\xi d\eta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}} \left[\frac{\overline{z}}{2} + \overline{\zeta} \right] d\xi d\eta = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

and

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\gamma_1(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta}+\overline{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_2(\zeta)\frac{1+\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\overline{z}\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{1+\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\,d\xi d\eta-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}(\overline{z}+2\overline{\zeta})\,d\xi d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left[\overline{z}+\frac{2\overline{z}(|\zeta|^2-1)}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\right]d\xi d\eta+\overline{z}\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\,d\xi d\eta=0. \quad (11)$$

The solution then is

$$\omega(z)=c\overline{z}+ic\frac{\overline{z}}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\gamma_0(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{1-|z|^2}{z}\log(1-z\overline{\zeta})\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\overline{f(\zeta)}\frac{1-|z|^2}{z}\log(1-z\overline{\zeta})\,d\xi d\eta$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}2\gamma_2(\zeta)\left[\frac{\overline{z}|z|^2-\overline{\zeta}}{\zeta(z-\zeta)}-|z|^2\frac{\overline{z}-\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left[\frac{\overline{z}|z|^2-\overline{\zeta}|\zeta|^2}{\zeta(z-\zeta)}-|z|^2\frac{\overline{z}-\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right]d\xi d\eta$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\left[\frac{1+\overline{z}}{2}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}-\frac{\overline{\zeta}(z-\overline{z})}{\overline{z}(1-z\overline{\zeta})}\right]d\xi d\eta. \quad (12)$$

Proof. We consider de following problems, the Dirichlet-Neumann problem:

$$\partial_{\overline{z}}^2\omega=\Psi \text{ in } \mathbb{D},\quad \omega=\gamma_0 \text{ on } \partial\mathbb{D},\quad \partial_\nu\partial_{\overline{z}}\omega=\gamma_1 \text{ on } \partial\mathbb{D},\quad \partial_{\overline{z}}\omega(0)=c,$$

where $\Psi\in L_1(\mathbb{D},\mathbb{C})\cap C^2(\partial\mathbb{D},\mathbb{C})$, and the Schwarz problem:

$$\partial_{\overline{z}}\Psi=f \text{ in } \mathbb{D},\quad Re(\Psi)=\gamma_2 \text{ on } \partial\mathbb{D},\quad Im(\Psi)(0)=c_1.$$

Because of Theorem (1.2) the solvability conditions for the Dirichlet-Neumann problem are

$$c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\gamma_0(\zeta)}{1-\overline{z}\zeta}\,d\zeta+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\Psi(\zeta)}{\zeta}\frac{1-|\zeta|^2}{1-\overline{z}\zeta}\,d\xi d\eta=0 \quad (13)$$

and

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}(\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}\Psi(\zeta))\frac{1}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}\,d\zeta+\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}\Psi(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^2}\,d\xi d\eta=0, \quad (14)$$

which yield the unique solution

$$\omega(z) = c\overline{z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_0(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} [\gamma_1(\zeta) - \overline{\zeta}\Psi(\zeta)] \frac{\log(1 - z\overline{\zeta})}{\zeta} \frac{1-|z|^2}{z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{|\zeta|^2 - |\, z\,|^2}{(\zeta - z)} \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta}\, d\xi d\eta. \quad (15)$$

After Theorem (1.1) the unique solution for the Schwarz problem arrive from the Cauchy-Schwarz-Pompeiu formula

$$\Psi(z) = ic_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}} \frac{1 + z\overline{\zeta}}{1 - z\overline{\zeta}} \right] d\xi d\eta. \quad (16)$$

Replacing (16) into (13) and (14) we obtain

$$0 = c - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_0(\zeta)}{1 - \overline{z}\zeta}\, d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{1-|\zeta|^2}{1 - \overline{z}\zeta} \frac{1}{\zeta} \Bigg[ic_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde{\zeta}|=1} \gamma_2(\tilde{\zeta}) \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}} - \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1} \left[\frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} - \frac{\overline{f(\tilde{\zeta})}}{\overline{\tilde{\zeta}}} \frac{1 + \zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{1 - \zeta\overline{\tilde{\zeta}}} \right] d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \Bigg]\, d\xi d\eta.$$

and

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma_1(\zeta)}{\zeta(1 - \overline{z}\zeta)}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta(1 - \overline{z}\zeta)} \Bigg[ic_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde{\zeta}|=1} \gamma_2(\tilde{\zeta}) \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}} - \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1} \left[\frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} - \frac{\overline{f(\tilde{\zeta})}}{\overline{\tilde{\zeta}}} \frac{1 + \zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{1 - \zeta\overline{\tilde{\zeta}}} \right] d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \Bigg]\, d\zeta$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1} \frac{\overline{z}}{(1 - \overline{z}\zeta)^2} \Bigg[ic_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde{\zeta}|=1} \gamma_2(\tilde{\zeta}) \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} \frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}} - \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1} \left[\frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}} \frac{\tilde{\zeta} + \zeta}{\tilde{\zeta} - \zeta} - \frac{\overline{f(\tilde{\zeta})}}{\overline{\tilde{\zeta}}} \frac{1 + \zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{1 - \zeta\overline{\tilde{\zeta}}} \right] d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} \Bigg]\, d\xi d\eta = 0.$$

respectively. Using the identities of Lemma 2.1 we reach the solvability conditions (10) and (11).

Now we look for the solution (12). For it we substitute (16) into the solution (15), so we have

$$\begin{aligned}\omega(z) = c\overline{z} &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\gamma_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\gamma_1(\zeta)\log(1-z\overline{\zeta})}{\zeta}\,\frac{1-|z|^2}{z}\,d\zeta \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}\log(1-z\overline{\zeta})}{\zeta}\,\frac{1-|z|^2}{z}\left[ic_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde{\zeta}|=1}\gamma_2(\tilde{\zeta})\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta}\,\frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}}\,\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta} - \frac{\overline{f(\tilde{\zeta})}}{\overline{\tilde{\zeta}}}\,\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}\right]d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}\right]\,d\zeta \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{\zeta(\zeta - z)}\left[ic_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde{\zeta}|=1}\gamma_2(\tilde{\zeta})\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta}\,\frac{d\tilde{\zeta}}{\tilde{\zeta}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}}\,\frac{\tilde{\zeta}+\zeta}{\tilde{\zeta}-\zeta} - \frac{\overline{f(\tilde{\zeta})}}{\overline{\tilde{\zeta}}}\,\frac{1+\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}{1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}}}\right]d\tilde{\xi}d\tilde{\eta}\right]\,d\xi d\eta.\end{aligned}$$

The solution (12) follows from Lemma 2.2. □

References

[1] Begehr H., Kumar A., *Boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation I.* Analysis (Munich) 25 , no. 1, 55-71, (2005).

[2] Begehr H., *Boundary value problems in complex analysis I and II.* Boletin de la Asociacion Matemática Venezolana, Vol XII, 1-2, 65-85, 217-250, 2005.

[3] Begehr H., Kumar A., Schmersau D., Vanegas J. *Mixed complex boundary value problems in complex analysis.* Finite or infinite dimensional complex analysis and applications, 25-40, Kyushu University Press, Fukuoka, 2005.

[4] Bitsadze A. V., *Equations of the mixed type.* Pergamon, 1964.

[5] Bitsadze A. V., *Boundary Value Problems of Second Order Elliptic Equations.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.

[6] Kumar A., Prakash R., *Mixed boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation.* Complex Variables and Elliptic Equations, Vol 51, No. 3, 209-223, 2006.

[7] Tutschke W., Vasudeva H., *An Introduction to Complex Analysis: Classical and Modern Approaches.* Chapman and Hall, 2004.

Antonio Nicola Di Teodoro, Carmen Judith Vanegas
Departamento de Matemáticas,
Universidad Simón Bolívar,
Caracas 1080A Venezuela

e-mail: aditeodoro@usb.ve, cvanegas@usb.ve

Some KKM type, intersection and minimax theorems in spaces with abstract convexities

Luis González Espinoza

Abstract. In this paper we obtain KKM type theorems for G-spaces, M-spaces and L-spaces which are spaces with no linear structure, these theorems are used to obtain some minimax results for these spaces. Also an intersection theorem for M-spaces is presented.

Resumen. En este trabajo obtenemos teoremas de tipo KKM para G-espacios, M-espacios y L-espacios que son espacios sin una estructura lineal, estos teoremas se utilizan para obtener unos resultados minimax para estos espacios. También se presenta un teorema de intersección para M-espacios.

1 Introduction

In this paper we obtain some KKM type theorems for G-spaces. These are Theorems 2.3, 2.6 and 2.11. These latter two results generalize Theorems 1 and Theorem 2 of Bardaro and Cepitelli [1]. We then apply our results to obtain some minimax theorems, including a generalization to G-spaces of an inequality of Fan [4]. This is our Corollary 3.3.

Then, using theorem 3.2 and theorem 3.4 of [2], we obtain a collection of similar results for M-spaces and for L-spaces.

Finally using a theorem of J. Kindler [5] we prove an intersection theorem for M-spaces.

2 Some KKM type theorems for G-spaces

In this section we present some KKM type theorem for G-spaces. KKM type theorems are intersection theorems for multifunctions which satisfy a condition known as the KKM condition. We begin by recalling the definition of a G-space and the concept of a multifunction of KKM type.

Definition 2.1 *We call a triple (X, D, Γ) a G-space if X is a topological space, D is a nonempty subset of X and $\Gamma :< D >:\to 2^X$ is a multifunction from the set $< D >$ of nonempty finite subsets of D into X such that*

1. $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$ *whenever* $A \subset B$

2. *For each $A = \{a_1, ..., a_{n+1}\} \in < D >$, there is a continuous function $\phi_A : \Delta_n \to \Gamma(A)$ such that for any subset $B = \{a_{i1}, ..., a_{1m}\} \subset A$. we have $\phi_A([e_{i1}, ..., e_{im}]) \subset B$ where Δ_n denotes the standard closed n-simplex.*

Definition 2.2 *Let (X, D, Γ) be a G-space. A multifunction $F : D \to 2^X$ such that $\Gamma(A) \subset F(A)$ for every $A \in < D >$ is called a* **G-KKM multifunction**.

The following theorem was proved in [3]

Theorem 2.3 *Let (X, D, Γ) be a compact G-space. Let $F : D \to 2^X$ be a closed valued G-KKM multifunction. Then $\bigcap\{F(x) : x \in D\} \neq \emptyset$.*

Next, we generalize Theorem 2.3 to the case where X is not compact; however, before doing so some definitions are required.

Definition 2.4 *Let (X, D, Γ) be a G-space. A subset S of X is G-convex if $\Gamma(A) \subset S$ whenever $A \in < D \cap S >$.*

Definition 2.5 *Let (X, D, Γ) be an G-space, a set $K \subset X$ is* **G-compact** *if for every $A \in < X >$ there is a compact, G-convex set Y such that $K \cup A \subset Y$.*

To present the following theorem let us recall that a set H is compactly closed if $H \cap B$ is closed in B for every compact set B.

Theorem 2.6 *Let (X, Γ) be an G-space, and let $F : X \to 2^X$ be a closed valued G-KKM multifunction such that:*

1. *For each $x \in X$ $F(x)$ is compactly closed.*

2. *There is a compact set $L \subset X$ and an G-compact set $K \subset X$ such that for each compact G-convex set Y with $K \subset Y \subset X$ we have that*

   $\bigcap\{(F(x) \cap Y : x \in Y\} \subset L$.

Then $\bigcap\{F(x) : x \in X\} \neq \emptyset$.

Proof:
It will suffice to show that $\bigcap\{(F(x) \cap L) : x \in X\} \neq \emptyset$. From condition (1) it follows that $\{F(x) \cap L : x \in X\}$ is a family of closed sets in the compact set L. Thus, it suffices to show that this family has the finite intersection property.

Suppose $A \in < X >$. By condition (2) there is a compact, G-convex set Y_0 such that $K \cup A \subset Y_0$ and $\bigcap\{F(x) \cap Y_0 : x \in Y_0\} \subset L$.

But, $\bigcap\{(F(x) \cap Y_0) : x \in Y_0\} \subset \bigcap\{(F(x) \cap L) : x \in Y_0\} \subset \bigcap\{(F(x) \cap L) : x \in A\}$, so, to show that $\bigcap\{(F(x) \cap L) : x \in A\} \neq \emptyset$, it suffices to prove that $\bigcap\{(F(x) \cap Y_0) : x \in Y_0\} \neq \emptyset$.

Now, because Y_0 is G-convex, the pair $(Y_0, \Gamma| < Y_0 >)$ is itself a compact G-space, and the multifunction $H : Y_0 \to 2^{Y_0}$ given by $H(x) = F(x) \cap Y_0$, is a G-KKM multifunction.

Indeed, let $B \in < Y_0 >$. Then,
$\Gamma(B) = \Gamma(B) \cap Y_0$
$\subset (\bigcup\{F(x) : x \in B\}) \cap Y_0$
$= \bigcup\{F(x) \cap Y_0 : x \in B\}$
$= \bigcup\{H(x) : x \in B\} = H(B)$.

Therefore, H is a G-KKM multifunction for the compact G-space $(Y_0, \Gamma| < Y_0 >)$. Thus by Theorem 2.3, it follows that $\bigcap\{(F(x) \cap Y_0) : x \in Y_0\} = \bigcap\{H(x) : x \in Y_0\} \neq \emptyset$. $\diamondsuit$

Now we will introduce a definition which describe a weaker condition for a multifunction than that of G-KKM, and we will use it later. Before doing that we need the following concept.

Definition 2.7 *Let (X, D, Γ) be a G-space. Let A be a subset of X. We define the G-convex hull of A, denoted by $co^G(A)$, as*

$$co^G(A) = \bigcap\{S \subset X : S \text{ is G-convex, and } A \subset S\}$$

Definition 2.8 *Let (X, D, Γ) be a G-space. A multifunction $F : D \to 2^X$ such that $co^G(A) \subset F(A)$ for every $A \in < D >$ is called an* **G*-KKM multifunction**.

The next proposition and its corollary were proved in [3].

Proposition 2.9 *Let (X, D, Γ) be an G-space. Suppose $F : D \to 2^X$ is a G*-KKM multifunction, then it is a G-KKM multifunction.*

Corollary 2.10 *Let (X, D, Γ) be a compact G-space. Let $F : D \to 2^X$ be a closed valued G*-KKM multifunction. Then $\bigcap\{F(x) : x \in D\} \neq \emptyset$.*

Theorem 2.11 *Let (X, Γ) be a G-space, and let $F, H : X \to 2^X$ be two multifunctions such that:*

1. *For all $x \in X$, $H(x)$ is compactly closed, and $F(x) \subset H(x)$;*
2. *$x \in F(x)$ for every $x \in X$;*
3. *For all $x \in X, F^*(x)$ is G-convex;*
4. *H satisfies condition (2) of Theorem 2.6.*

Then $\bigcap\{H(x) : x \in X\} \neq \emptyset$.

Proof:
By Corollary 2.10 it will suffice to show that the multifunction H is a G*-KKM multifunction.

Suppose that H is not a G*-KKM multifunction, then there is a subset $A \in \ < D >$ such that $co^G(A) \not\subset H(A)$.

Thus, there exists $y \in co^G(A)$ such that $y \notin H(A)$, which means that, $y \notin H(x)$ for all $x \in A$, that is, $x \in H^*(y)$ for all $x \in A$. Thus, $A \subset H^*(y)$.

On the other hand, condition (1) implies $H^*(y) \subset F^*(y)$. Thus, $F^*(y)$ is a G-convex subset containing A, which implies that, $co^G(A) \subset F^*(y)$, but $y \in co^G(A)$. Then $y \in F^*(y)$, which is equivalent to $y \notin F(y)$, in contradiction with condition (2).

Hence H is a G*-KKM multifunction and so $\bigcap\{H(x); x \in X\} \neq \emptyset$. $\diamondsuit$

Thus, theorems 2.6 and 2.11 generalize to G-spaces, theorems 1 and 2 in [1].

Corollary 2.12 *Let (X, Γ) be a compact G-space. Let $F : X \to 2^X$ be a multifunction and let $H : X \to 2^X$ be a closed valued multifunction such that:*

1. *For all $x \in X$, $F(x) \subset H(x)$;*
2. *$x \in F(x)$ for every $x \in X$;*
3. *For all $x \in X$, $F^*(x)$ is G-convex.*

Then $\bigcap\{H(x) : x \in X\} \neq \emptyset$.

3 Some Minimax theorems for G-spaces

In this section we present a minimax inequality which is a generalization to G-spaces of an inequality previously proved by K. Fan in [4].

Theorem 3.1 *Let (X, Γ) be a compact G-space, let $f : X \times X \to R$ and $h : X \times X \to R$ be two functions such that:*

1. *$h(x, y) \leq f(x, y)$ for all $(x, y) \in X \times X$.*
2. *The function $h_x : X \to R$ given by $h_x(y) = h(x, y)$ is lower semicontinuous.*
3. *Given any $\lambda \in R$ and any $y \in X$ the set $\{x \in X : f(x, y) > \lambda\}$ is G-convex.*

Then for any $\lambda \in R$ either there exists $y_0 \in X$ such that , $h(x, y_0) \leq \lambda$ for all $x \in X$, or there exists $y_0 \in X$ such that $f(y_0, y_0) > \lambda$.

Proof:
Let us set $H(x) = \{y \in X : h(x, y) \leq \lambda\}$ and $F(x) = \{y \in X : f(x, y) \leq \lambda\}$. Since h_x is lower semicontinuous, $H(x)$ is a closed set, so in the terminology of multifunctions, we have a multifunction $F : X \to 2^X$, and a closed valued multifunction $H : X \to 2^X$, such that $F(x) \subset H(x)$ for all $x \in X$ because of condition (1).

Now for the multifunction F, we have two possibilities:

Either there is an $x_0 \in X$, such that $x_0 \notin F(x_0)$, in which case we have that $f(x_0, x_0) > \lambda$, that is, the second part of the alternative is true.

Or, for all $x \in X$, $x \in F(x)$. Now $F^*(y) = \{x \in X : y \notin F(x)\} = \{x \in X : f(x, y) > \lambda\}$ which is an M-convex set for all $y \in X$ because of condition (3).

Therefore F and H are two multifunctions satisfying the hypotheses of Corollary 2.12, so we have that, $\bigcap\{H(x) : x \in X\} \neq \emptyset$.

Thus if $x_0 \in \bigcap\{H(x) : x \in X\}$ we have that $h(x_0, y) \leq \lambda$ for all $y \in X$, that is the first part of the alternative is true. $\diamondsuit$

Corollary 3.2 *With the hypotheses of Theorem 3.1 we obtain the following minimax inequality.*

$$min_{y \in X} sup_{x \in X} h(x, y) \leq sup_{x \in X} f(x, x).$$

Proof:
Let $\lambda = sup_{x \in X} f(x, x)$, then either $\lambda = \infty$, in which case the inequality is obvious or λ is finite. Then because of definition of λ, the first part of the alternative in Theorem 3.1 is true. Therefore exists $y_0 \in X$ such that:

$$h(x, y_0) \leq sup_{x \in X} f(x, x) \quad forall \;\; x \in X.$$

Then

$$sup_{x \in X} h(x, y) \leq sup_{x \in X} f(x, x) \quad forall \;\; y \in X$$

that is,

$$sup_{x \in X} h_x(y) \leq sup_{x \in X} f(x, x) \quad forall \;\; y \in X.$$

Thus

$$inf_{y \in X} sup_{x \in X} h_x(y) \leq sup_{x \in X} f(x, x);$$

but $sup_{x \in X} h_x$ is lower semicontinuous, and it is well known that in this case this infimum is a minimun therefore we have that

$$min_{y \in X} sup_{x \in X} h(x, y) \leq sup_{x \in X} f(x, x). \quad \diamondsuit$$

Based on this, the inequality proved by Fan in [4] can be generalized to G-spaces by the following corollary.

Corollary 3.3 *Let (X, Γ) be a compact G-space and let $f : X \times X \to R$ be a function such that:*

1. *The function $f_x : X \to R$ given by $f_x(y) = f(x, y)$ is lower semicontinuous.*
2. *Given any $\lambda \in R$ and any $y \in X$ the set $\{x \in X : f(x, y) > \lambda\}$ is G-convex.*

Then the following inequality is true

$$min_{y \in X} sup_{x \in X} f(x, y) \leq sup_{x \in X} f(x, x).$$

Proof:
Take $h(x, y) = f(x, y)$ in Corollary 3.2. $\diamondsuit$

4 Some KKM and Minimax Theorems for M-spaces and L-spaces

Theorem 3.2 of [2], shows that if $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ is an M-space, and $D \subset X$ is an admissible subset, then there exists the corresponding M-space (X, D, Γ), such that the collection of M-convex subsets with respect to D in $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ coincides with the collection of G-convex sets in (X, D, Γ). We will use this result to obtain from the KKM and minimax theorems proved for G-spaces, similar results for M-spaces.

On the other hand, Theorem 3.4 of [2] states that given an L-space $(X, D, \mathbf{P})$, there is an M-space $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ for which D is an admissible subset, and the collection of L-convex subsets in $(X, D, \mathbf{P})$ coincides with the collection of M-convex subsets with respect to D in $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$. Based on this theorem some KKM and minimax theorems for L-spaces will be obtained.

Let us begin by recalling the concepts of M-space and M-convex subset, to introduce next the concept of M*-KKM multifunction.

Notation. Given any integer $m \geq 2$ and $1 \leq i \leq m$, let $\delta_i : R^n \to R^n$ denote the function defined by $\delta_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Definition 4.1 *An M-space is a triple $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$, where X is a topological space, $\mathbf{M} = Mn : ninteger, n \leq 1$ is a collection of sets where $Mn \subset X^n$ for all $n \geq 1$, and $\mathbf{k} = kn : ninteger, n \leq 1$ is a collection of functions satisfying*

1. *$k_{n+1} : M_{n+1} \times \Delta_n \to X$.*
2. *If $x \in M_{n+1}(n \geq 1)$ and $i \leq n+1$, then $\delta_i(x) \in M_n$ and for any $t \in \Delta_n$ with $t_i = 0, k_{n+1}(x,t) = k_n(\delta_i(x), \delta_i(t))$.*
3. *If $x \in M_{n+1}$, then the map $t \to k_{n+1}(x,t)$, from Δ_n to X, is continuous.*

Definition 4.2 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be an M-space. A nonempty subset $D \subset X$ is said to be admissible if $D^n \subset M_n$ for all n.*

Definition 4.3 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be an M-space, let $D \subset X$ be an admissible subset. We say that a subset S of X is M-convex with respect to D, if for each subset $A \in < S \cap D >$ and any indexing of $A = \{a_1, ..., a_{n+1}\}$, we have that*

$$k_{n+1}((a_1, ..., a_{n+1}), \Delta_n) \subset S.$$

If $D = X$ we say M-convex.

Definition 4.4 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be an M-space, let $D \subset X$ be an admissible subset. Let K be subset of X. We define the M-convex hull of K with respect to D, denoted by co_D^M as:*

$$co_D^M = \bigcap \{S \subset X : S \text{ is M-convex with respect to } D, K \subset S\}.$$

In case $D = X$, the M-convex hull of K with respect to X will be denoted by co^M.

Definition 4.5 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be an M-space and let $D \subset X$ be an admissible subset. A multifunction $F : D \to 2^X$ is said to be M*-KKM, if for each $A \in < D >$, $co_D^M(A) \subset F(A)$.*

Proposition 4.6 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be a compact M-space, and let $D \subset X$ be an admissible subset. Let $F : D \to 2^X$ be a closed valued M*-KKM multifunction. Then $\bigcap\{F(x) : x \in D\} \neq \emptyset$.*

Proof:
By Theorem 3.2 of [2], the collection of M-convex subsets with respect to D in the space $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$, coincide with the collection of G-convex subsets in the corresponding G-space (X, D, Γ). Therefore $F : D \to 2^X$ is a G*-KKM multifunction in the G-space (X, D, Γ). Thus, by Corollary 2.9 we have that $\bigcap\{F(x) : x \in D\} \neq \emptyset$. $\diamondsuit$

As consequences of our next proposition we obtain minimax results for M-spaces, all these proofs are omitted because they are similar to those corresponding to G-spaces.

Proposition 4.7 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be a compact M-space, such that X is admissible. Let $F : X \to 2^X$ be a multifunction and let $H : X \to 2^X$ be a closed valued multifunction such that:*

1. *For all $x \in X$, $F(x) \subset H(x)$;*
2. *$x \in F(x)$ for every $x \in X$;*
3. *For all $x \in X$, $F^*(x)$ is M-convex.*

Then $\bigcap\{H(x) : x \in X\} \neq \emptyset$.

Proposition 4.8 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be a compact M-space, such that X is admissible. Let $f : X \times X \to R$ and $h : X \times X \to R$ be two functions such that:*

1. *$h(x, y) \leq f(x, y)$ for all $(x, y) \in X \times X$.*
2. *The function $h_x : X \to R$ given by $h_x(y) = h(x, y)$ is lower semicontinuous.*
3. *Given any $\lambda \in R$ and any $y \in X$ the set $\{x \in X : f(x, y) > \lambda\}$ is M-convex.*

Then for any $\lambda \in R$ either there exist $y_0 \in X$ such that for all $x \in X$, $h(x, y_0) \leq \lambda$, or there exists $y_0 \in X$ such that $f(y_0, y_0) > \lambda$.

Proposition 4.9 *With the hypotheses of Proposition 4.8 we obtain the following minimax inequality.*

$$min_{y \in X} sup_{x \in X} h(x, y) \leq sup_{x \in X} f(x, x).$$

Proposition 4.10 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be a compact M-space, such that X is admissible and let $f : X \times X \to R$ be a function such that:*

1. *The function $f_x : X \to R$ given by $f_x(y) = f(x, y)$ is lower semicontinuous.*
2. *Given any $\lambda \in R$ and any $y \in X$ the set $\{x \in X : f(x, y) > \lambda\}$ is M-convex.*

Then the following inequality is true

$$min_{y\in X} sup_{x\in X} f(x, y) \leq sup_{x\in X} f(x, x).$$

This proposition generalizes to M-spaces an inequality proved by Fan in [4].

Now, we give the definition of an L*-KKM multifunction, and then by employing of Theorem 3.4 of [2], we state some KKM and minimax theorems for L-spaces. We begin by recalling the concepts of an L-space, an L-convex subset and the L-convex hull of a subset.

Definition 4.11 *An L-space is a triple $(X, D, \mathbf{P})$, where X is a topological space, D is a nonempty subspace of X and $\mathbf{P} = \{P_a : a \in X\}$ is a collection of functions $P_a : D \times [0, 1] \to D$, such that $P_a(x, 0) = x$, $P_a(x, 1) = a$, and P_a is continuous respect to $t \in [0, 1]$. When $D = X$, we write (X, P).*

Definition 4.12 *Suppose $(X, D, \mathbf{P})$ is an L-space. Given $A \in < D >$, let $A = \{a_0, ..., a_n\}$ be any indexing of A by $\{0, ...n\}$. Define the multifunction $G_A : [0, 1]^n \to D$ by*

$$G_A(t_0, ..., t_n) = P_{a_0}(P_{a_1}...(P_{a_{n-1}}(a_n, t_{n-1})..., t_1), t_0)$$

. For $A = \{a\}$, we define $G_{\{a\}} = \{a\}$. We say that a subset $S \subset X$ is L-convex if for every $A \in < A \cap D >$, and every indexing of $A = \{a_0, ...a_n\}$, it follows that $G_A([0, 1]^n) \subset S$.

Definition 4.13 *Let $(X, D, \mathbf{P})$ be an L-space. Let A be a subset of X. We define the L-convex hull of A by*

$$co^L(A) = \bigcap\{S \subset X : S \text{ is L-convex and } A \subset S\}$$

.

Definition 4.14 *Let $(X, D, \mathbf{P})$ be an L-space. A multifunction $F : D \to 2^X$ such that $co^L(A) \subset F(A)$ for every $A \in < D >$ is called an* **L*-KKM multifunction**.

Proposition 4.15 *Let $(X, D, \mathbf{P})$ be a compact L-space. Let $F : D \to 2^X$ be a closed valued L*-KKM multifunction. Then $\bigcap\{F(x) : x \in D\} \neq \emptyset$.*

Proof:
The proof follows from Theorem 3.4 of [2] and Proposition 4.6 in similar way to the proof of Proposition 4.6.

The followings propositions together with Proposition 3.4 of [2] allow us to present some minimax results for L-spaces, whose proofs are omitted because of their similarities with the corresponding for M-spaces.

Proposition 4.16 *Let $(X, \mathbf{P})$ be a compact L-space. Let $F : X \to 2^X$ be a multifunction and let $H : X \to 2^X$ be a closed valued multifunction such that:*

1. *For all $x \in X$, $F(x) \subset H(x)$;*
2. *$x \in F(x)$ for every $x \in X$;*
3. *For all $x \in X$, $F^*(x)$ is L-convex.*

Then $\bigcap\{H(x) : x \in X\} \neq \emptyset$.

Proposition 4.17 *Let $(X, \mathbf{P})$ be a compact L-space , let $f : X \times X \to R$ and $h : X \times X \to R$ be two functions such that:*

1. *$h(x, y) \leq f(x, y)$ for all $(x, y) \in X \times X$.*
2. *The function $h_x : X \to R$ given by $h_x(y) = h(x, y)$ is lower semicontinuous.*
3. *Given any $\lambda \in R$ and any $y \in X$ the set $\{x \in X : f(x, y) > \lambda\}$ is L-convex.*

Then for any $\lambda \in R$ either there exist $y_0 \in X$ such that for all $x \in X$, $h(x, y_0) \leq \lambda$, or there exists $y_0 \in X$ such that $f(y_0, y_0) > \lambda$.

Corollary 4.18 *With the hypotheses of Proposition 4.17 we obtain the following minimax inequality.*

$$min_{y \in X} sup_{x \in X} h(x, y) \leq sup_{x \in X} f(x, x).$$

Corollary 4.19 *Let $(X, \mathbf{P})$ be a compact L-space and let $f : X \times X \to R$ be a function such that:*

1. *The function $f_x : X \to R$ given by $f_x(y) = f(x, y)$ is lower semicontinuous.*
2. *Given any $\lambda \in R$ and any $y \in X$ the set $\{x \in X : f(x, y) > \lambda\}$ is L-convex.*

Then the following inequality is true

$$min_{y \in X} sup_{x \in X} f(x, y) \leq sup_{x \in X} f(x, x).$$

5 An intersection Theorem for M-spaces

In this section, by employing an intersection theorem due to J. Kindler [5], proved without using the Theorem of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, we show another type of intersection theorem for M-spaces.

Theorem 5.1 *For a multifunction $F : X \to 2^Y$ the following are equivalent.*

1. $\bigcap\{F(x) : x \in X\} \neq \emptyset$.
2. *There exist topologies on X and Y such that*
   (a) Y *is compact.*
   (b) *Every value $F(x), x \in X$ is closed.*
   (c) *For all $A \in < X >$ the subset $\bigcap\{F(x) : x \in A\}$ is connected.*
   (d) *For all $B \subset Y$ the subset $\bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$ is connected.*

Theorem 5.2 *Let $(X, \mathbf{M}, \mathbf{k})$ be an M-space such that X is admissible, and such that $k_1(x, 1) = x$ for all $x \in X$. Let Y be a compact topological space and $F : X \to 2^Y$ an upper semicontinuous multifunction such that*

1. $F(\Gamma_{\{x_1,x_2\}}) = F(x_1) \cup F(x_2)$ *for all $x_1, x_2 \in X$.*
2. $\bigcap\{F(x) : x \in A\}$ *is connected for all $A \in < X >$.*

Then $\bigcap\{F(x) : x \in X\} \neq \emptyset$.

Proof:
Due to Theorem 5.1 it suffices to prove that for all $B \subset Y$ the subset $\bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$ is connected, so let $B \subset Y$ and let us prove that $\bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$ is connected.

To this end we will show that given $x_1, x_2 \in \bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$ there is a connected set C such that $\{x_1, x_2\} \subset C \subset \bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$.

Now $x_1, x_2 \in \bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$ means that $B \cap F(x_1) = \emptyset$ and $B \cap F(x_2) = \emptyset$, then $B \cap (F(x_1) \cup F(x_2)) = B \cap \; F(\Gamma_{\{x_1,x_2\}}) = \emptyset$. Therefore $x_1, x_2 \in \Gamma_{\{x_1,x_2\}} \subset \bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$. On the other hand $\Gamma_{\{x_1,x_2\}} = \{\bigcup\{k_2((x_1, x_2), t) : t \in \bar{\Delta}_1\}\} \cup \{\bigcup\{k_2((x_2, x_1), t) : t \in \bar{\Delta}_1\}\}$ is path-connected.

In fact, let $x, y \in \Gamma_{\{x_1,x_2\}}$. We will show that there is a path joining x and y. Assume that $x = k_2((x_1, x_2), (t_1, t_2))$ with $(t_1, t_2) \in \bar{\Delta}_1$ and consider the path $\phi : [0, 1] \to X$ defined by $\phi(t) = k_2((x_1, x_2), (t_1 + t - tt_1, t_2 - tt_2))$. By definition of M-space it follows that ϕ is continuous function such that $\phi(0) = k_2((x_1, x_2), (t_1, t_2))$ and $\phi(1) = k_2((x_1, x_2), (1, 0)) = k_1(x_1, 1) = x_1$. Therefore ϕ is a path joining x and x_1.

In a similar way we can construct a path joining y and x_1. Thus any pair $x, y \in \Gamma_{\{x_1,x_2\}}$ can be joined by a path, which means that, $\Gamma_{\{x_1,x_2\}}$ is path connected.

Therefore, given two points $\{x_1, x_2\} \in \bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$ we have found a connected set $C = \Gamma_{\{x_1,x_2\}}$ containing these two points and contained in $\bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$, this means that $\bigcap\{F^*(y) : y \in B\}$ is connected. $\diamondsuit$

References

[1] C. Bardaro and R. Cepitelli, Some further generalizations of the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, J. Math. Anal. Appl 132 (1988), 484-490.

[2] George L. Cain Jr., Luis González, The Knaster-Kuratowski-mazurkiewics theorem and abstract convexities, J. Math. Anal. Appl. 338 (2008) 563-571

[3] L. González, S. Kilmer, J. Rebaza, From a KKM theorem to Nash equilibria in L-spaces, Topology and its Applications, 155 (2007), 165-170

[4] K. Fan, A Minimax Inequality and Applications, Inequalities III, New York, Academic Press, 1972. 142 (1961), 305-310.

[5] J. Kindler, Topological intersection theorems, Proc.Amer.Math.Soc 117,1993, 1003-1011.

[6] J.V. Llinares, Abstract Convexity, Fixed point and Applications. Ph.D Thesis, University of Alicante, Spain,1994.

[7] S. Park and H. Kim, Coincidence Theorems for Admissible Multifunctions on Generalized Convex Spaces, J.Math.Anal.Appl,197,1996,173-187.

Luis González Espinoza.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias,
Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela.

A note on the lower bounds for the Hausdorff Dimension of the Geometric Lorenz Attractor

Leonardo Mora*

Abstract. We present a lower bound for the Hausdorff Dimension of the Geometric Lorenz Attractor in the monotone homoclinic case. These lower bound only involves the eigenvalues of the singular point of the flow and the number of turns around of the homoclinic orbit.

Resumen. Se presenta un límite inferior para la dimensión de Hausdorff del Atractor Geométrico de Lorenz en el caso monótono homoclínico. Estos límites inferiores involucra sólo los auto–valores del punto singular del flujo y el número de vueltas alrededor de la órbita homoclínica.

1 Introduction

One hard problem in dynamics is getting lower bounds on the Hausdorff dimension for attractors in terms of dynamical features of the system. In [LM], this problem was addressed for the Geometric Model of The Lorenz Attractor Λ when the system presented a double-homoclinic loop. Let $\mathcal{L}$ be the flow used to describe the Geometric Model of the Lorenz Attractor, one of the main feature of this flow is that it has a unique singularity O such that the $D\mathcal{L}(O)$ has three eigenvalues λ_1, λ_2 and λ_3 which satisfy $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_1$. When both branches of the unstable manifold of O meet the stable manifold of O we will be speaking about the *homoclinic case*.

In [LM] it was proved the following theorem.

Theorem 1 *For the homoclinic case, there exists a constant $\gamma > 0$ such that the Geometric Lorenz attractor of the flow $\mathcal{L}$ has*

$$dim_H(\Lambda) \geq 2 + \ln \rho(A)/\ln \left(\frac{1}{\gamma}\right) > 2,$$

*The author would like to acknowledge Impa for providing its fine environment of work during the final preparation of this manuscript.

where $\rho(A)$ is the spectral radius of the matrix A, a $(0,1)$-matrix which describes the geometric distribution of Λ in the direction given by the eigenvector associated with λ_3.

The constant γ is given in terms of the eigenvalues λ_i and the number of turns of the homoclinic loop Γ, see [LM] for details. In this note we want to show a lower bound for $\rho(A)$ for the matrices A which appear in what we called the homoclinic monotone case. For us an orbit Γ should be a *monotone homoclinic orbit* for the system $\mathcal{L}$ if it is a homoclinic orbit associated with the singular point O such that the sequence obtained intersecting Γ with the Poincar section when is projected onto the direction given by the eigenvector associated to λ_2 turn out a finite monotone sequence. For a precise description see [LM]. Such a matrices A we will call *monotone homoclinic matrices* and we will denote the set of these matrices by $\mathcal{MH}$. It turns out that the lower bound for the spectral radius is given in terms of Littelwood Pisot numbers. A Pisot number is a real algebraic integer, all of whose conjugates lie strictly inside the open unit disk. A Littlewood polynomial is a polynomial all of whose coefficients are +1 or -1. A Littelwood Pisot number is a Pisot number whose minimal polynomial is a Littelwood polynomial.

Theorem 2 $\min_{A\in\mathcal{MH}} \rho(A) > (1+\sqrt{5})/2$.

As a corollary we get the following uniform estimative for the Geometric Lorenz attractor in the monotone homoclinic case.

Theorem 3 *In the monotone homoclinic case, the Geometric Lorenz attractor of the flow $\mathcal{L}$ has*

$$dim_H(\Lambda) \geq 2 + \ln\left((1+\sqrt{5})/2\right) / \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) > 2.$$

2 Monotone homoclinic matrices

Let the shift space $X_n \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ given by the restriction

$$\mathcal{F}_n = \{\overbrace{000...0}^{n-times}, \overbrace{111...1}^{n-times}\},$$

i.e., the set of sequences $\mathbf{i} = i_0 i_1 i_2 ...$, such that the above blocks never appear as a building block of this sequence. This set is invariant under the shift transformation σ given by $\sigma(\mathbf{i}) = \mathbf{j}$, where $j_s = i_{s+1}$. The following proposition in proved in [LM].

Proposition 1 *Let $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ be a shift of finite type, then there exists $\Phi : X \to Y$ a conjugation ($\Phi \circ \sigma = \sigma \circ \Phi$ and Φ a homeomorphism), where Y is a subshift of finite type over the alphabet built with the words not in $\mathcal{F}$.*

The space shift X_n is one of finite type. With this shift space we associate an alphabet given by

$$\mathcal{B}_n = \{\overbrace{000...1}^{n-times}, \overbrace{00...01}^{n-times}, \overbrace{0...011}^{n-times}, \ldots, \overbrace{1...110}^{n-times}\}.$$

We arrange this set accordingly to the lexicographical order relation. Its transition matrix $A_n = (a_{i\,j})$ is given by

$$a_{i\,j} = \begin{cases} 0 & if \quad i \leq (2^n-2)/2-1 \quad and \quad j \neq 2\,i, 2\,i+1 \\ 1 & if \quad i \leq (2^n-2)/2 \quad and \quad j = 2\,i, 2\,i+1 \\ 0 & if \quad i = (2^n-2)/2 \quad and \quad j \neq (2^n-2) \\ 1 & if \quad i = (2^n-2)/2 \quad and \quad j = (2^n-2) \\ 0 & if \quad i = (2^n-2)/2+1 \quad and \quad j \neq 1 \\ 1 & if \quad i = (2^n-2)/2+1 \quad and \quad j = 1 \\ A_{s\,j} & with \quad s = i-(2^n-2)/2+1 \quad if \quad i \geq (2^n-2)/2+2 \end{cases}$$

Example 1 *For $n = 3$, the size of the transition matrix is 6. A_3 is given by*

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Example 2 *For $n = 4$, the size of the transition matrix is 14. A_4 is given by*

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The matrices A that we want to consider are the A_n above. We want to get a lower bound for the spectral radius of matrices A. In [LM] it is shown that matrices A are the corresponding matrices in Theorem 1 for the monotone homoclinic case.

In order to do that we recall some elementary facts from linear algebra.

Lemma 1 *If a polynomial q is a factor of the minimal polynomial of A, then*

$$\rho(A) \geq \max_{\lambda | q(\lambda)=0} \{|\lambda|\}.$$

Proof 1 *It is immediate.*

Lemma 2 *The polynomial $q_n(\lambda) = -1-\lambda-\lambda^2-\cdots-\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}$ is irreducible in $\mathbb{Z}[x]$, the ring of polynomial with integers coefficients.*

Proof 2 *See [B].*

Lemma 3 *Let A_n and $q_n(\lambda)$ be as above. Then q is a factor of the minimal polynomial of A_n. Then there is a vector v such that $q_n(A_n)v = 0$.*

Proof 3 *The matrix A_n has order $2^n - 2$. We denote the quantity $2^{(n-1)} - 1$ by l. We observe that $q(A_n)$ has as first and last row*

$$(\overbrace{-1,\ldots,-1}^{l\ times},\overbrace{1\ldots,1}^{l\ times}) \quad and \quad (\overbrace{1,\ldots,1}^{l\ times},\overbrace{-1\ldots,-1}^{l\ times}),$$

respectively. This is seen easily for $n = 3$, and for $n \geq 3$ is obtained by observing that in the case of the first row, the first row of A_n^s is obtained multiplying the first row of A_n^{s-1} by the columns of A_n. By induction we get the following pattern:

$$\begin{aligned}
&\text{first row of } A_n : (0,1,1,\ldots),\\
&\text{first row of } A_n^2 : (0,0,0,1,1,1,1,\ldots),\\
&\qquad\vdots \qquad \vdots\\
&\text{first row of } A_n^{n-2} : (0,\ldots,0,\overbrace{1,\ldots,1}^{2^{(n-2)}},\overbrace{0,\ldots,0}^{l}),\\
&\text{first row of } A_n^{n-1} :(0,\ldots,0,\overbrace{1,\ldots,1}).
\end{aligned}$$

For the last row, the argument is similar but now the pattern above begin from the right to left with the signs swapped.

Lemma 4 *The minimal polynomial of A_n has the polynomial q_n as a factor.*

Proof 4 *Since the characteristic polynomial of A_n and $B = A_n^t$ are the same it is enough to do the proof for matrix B. It is easy to see from the form of the first and last column of B that the vector $w = (1, 0, \ldots, 0, 1)$ belongs to the kernel of $q_n(B)$. This implies that q belongs to the proper ideal*

$$I_w = \{p \in \mathbb{Z}[x] : p(A_n)w = 0\}.$$

By Lemma 2 we know that q_n is the generator of this ideal so it is a factor of the minimal polynomial of B and so of A_n.

From Lemma 1 we get

Corollary 1 *The spectral radius of A_n is bounded bellow by the Littelwood Pisot number whose minimal polynomial is q_n.*

Proof 5 (Proof of Theorem 2) *The polynomial $q_n(\lambda)$ in Lemma 2 are the minimal polynomial of the Littelwood Pisot numbers which form a strictly increasing sequence $\{\gamma_i\}_2^\infty$ with γ_i converging to 2. The least Littelwood Pisot number is the golden ratio $(1+\sqrt{5})/2$, see [M, Theorem 1]. So Theorem follows from the previous Corollary.*

References

[B] Brauer, A. On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle. Mathematische Nachrichten,4, (1951). 250–257.

[M] Mukunda, K. Littelwood Pisot numbers. Journal of number Theory **117** (2006), 106–121.

[LM] Lizana, C. & Mora, L. *Lower bounds for the Hausdorff Dimension of the Geometric Lorenz Attractor: The homoclinic case.* Discrite Contin. Dyn. Syst. 22(2008), no.3, 699–709.

Leonardo Mora.
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias, La Hechicera
Universidad de los Andes
Mérida, 5101
Venezuela.

e-mail: lmora@ula.ve

Operadores casi llenos y de radio numérico alcanzable

Edixo Rosales

Resumen. Si T es un operador acotado en un espacio de Banach complejo $\mathbf{X}$ y $\|T\| = |\lambda|$, donde λ es un valor propio de T, se dice que T es de radio numérico alcanzable. Análogamente que T es un operador casi lleno, si $\dfrac{M}{\overline{TM}}$ es de dimensión finita para cada M subespacio invariante de T.

Se prueban los siguientes resultados:

1.-Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach uniformemente convexo, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ un operador invertible y $A \in Alglat\ T \bigcap \{T\}'$, tal que $\|A\| = 1,\ \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C}:\ |\lambda| = 1\}$, A un operador lleno, entonces T es lleno, o A es de radio numérico alcanzable.

2-Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach uniformemente convexo, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es invertible, $A \in AlglatT \bigcap \{T\}'$ es tal que (a) A es casinilpotente y (b) A es casi lleno, entonces T es lleno.

Abstract. If $\mathbf{T}$ is a bounded operator on $\mathbf{X}$, where $\mathbf{X}$ is a complex Banach space and $\|T\| = |\lambda|$, where λ is an eingenvalue of T, then we say that T has reachable numerical radius. Similarly, we say that T is nearly full if $\dfrac{M}{\overline{TM}}$ is finite-dimensional for every invariant subspace M of T

We prove the following results:

1.-If $\mathbf{X}$ is an uniformly convex Banach space, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ an invertible operator and $A \in Alglat\ T \bigcap \{T\}'$ is such that $\|A\| = 1,\ \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C}:\ |\lambda| = 1\}$ and A is full operator, then T is full or A has reachable numerical radius.

2-If $\mathbf{X}$ is an uniformly convex Banach space , $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ an invertible operator and $A \in AlglatT \bigcap \{T\}'$ is such that A is quasinilpotent and is nearly full, then T is full.

1. Preliminares

Para nosotros $\mathbf{X}$ será un espacio de Banach complejo y $\mathbf{X}^*$ su espacio dual. También $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ denotará el espacio de los operadores lineales acotados en $\mathbf{X}$), y $\mathbf{K}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{B}(\mathbf{X})$ los operadores compactos en $\mathbf{X}$. Si $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$, entonces $\mathbf{A}^{'}$ será su traspuesto. Un subespacio (cerrado)M de $\mathbf{X}$ se llama invariante para $\mathbf{T} \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ si $TM \subset M$. Por $latT$ entenderemos la familia de todos los subespacios invariantes de T. Un operador $\mathbf{T} \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ se llamará lleno si $\overline{TM} = M, \ \forall \ M \in latT$, donde la barra denota la clausura topológica en la norma. Análogamente $\mathbf{T} \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ se dirá casi lleno si el espacio cociente $\dfrac{M}{\overline{TM}}$, es de dimensión finita. Note que todo operador lleno es casi lleno.

Si $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$, por el conmutante de T, que denotaremos por $\{T\}^{'}$, entenderemos la familia de todos los operadores que conmutan con T. Por $AlglatT$, representaremos la familia de todos los operadores $S \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$, tales que $latT \subset latS$. Un operador T se dirá acotado por potencias, si la sucesión numérica $\{\|T^m\|\}_{m=1}^{+\infty}$ es acotada, y casinilpotente cuando $\lim\limits_{m \to +\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} = 0$.

El rango numérico espacial del operador T, es el conjunto numérico $W_{esp}(T) = \{f(Tx) : f \in X^*, \ x \in X, \ f(x) = \|f\| = \|x\| = 1\}$.

Una isometría importante para nosotros es la que define $J : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^{**}$ dada por $J(x) = J_x$, donde $J_x(f) = f(x), \ \forall \ f \in \mathbf{X}^*$. Es conocido que $\|J(x)\| = \|x\|, \ \forall \ x \in \mathbf{X}$. Si J es sobre, entonces se dirá que el espacio $\mathbf{X}$ es de Banach reflexivo. Un espacio de Banach $\mathbf{X}$ se dirá uniformemente convexo, si dado $\epsilon > 0, \ 0 < \epsilon \leq 2$, existe un $0 < \delta$ tal que $\forall \ x, \ y \in \mathbf{X}, \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \epsilon \leq \|x - y\| \Rightarrow \|\dfrac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$. Análogamente que $\mathbf{X}$ es estrictamente convexo, si dados $x, \ y \in \mathbf{X}$ tales que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces los vectores $x, \ y$ son linealmente dependientes. Todo espacio de Banach $\mathbf{X}$ estrictamente convexo es uniformemente convexo y todo $\mathbf{X}$ uniformemente convexo es reflexivo.

Un operador $T \in B(X)$ se llamará de radio numérico alcanzable, si $\|T\| = |\lambda|$, con $\lambda \in \sigma_p(T)$, donde $\sigma_p(T)$ significará el conjunto de los valores propios del operador T.

Finalmente, indicamos que si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach y $\{x_n^m\}$ una sucesión doble en $\mathbf{X}$, entonces $\bigvee_{m=0}^{+\infty}\bigvee_{n=0}^{+\infty} x_n^m$ expresará la clausura en la topología de la norma del subespacio generado por $\{x_n^m\}$.

El siguiente resultado aparece en la referencia [8]:

Teorema 1. *(Sarason) Sea $T \in B(X)$. Si $\rho(T)$ es la resolvente de T y ρ_∞ es la componente conexa no acotada de $\rho(T)$, entonces:*

(1) Si λ y λ_0 pertenecen a la misma componente conexa de $\rho(T)$, entonces $lat(T-\lambda)^{-1} = lat(T-\lambda_0)^{-1}$

(2) Si $\lambda \in \rho_\infty(T)$ entonces $lat(T-\lambda)^{-1} = latT$.

2. Operadores casi llenos y de radio numérico alcanzable

Los siguientes tres resultados aparecen inicialmente en la referencia [3], y se dan para hacer autocontenida la exposición del artículo:

Lema 1. *Si $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es acotado por potencias y $f \in \mathbf{X}^*$, $x_0 \in \mathbf{X}$ tales que $\lim_{m\to+\infty} f(A^m x_0) = \alpha \neq 0$, entonces A' tiene un punto fijo.*

Demostración. Como A es acotado por potencias, para cada $x \in X$ tenemos que $\{f(A^m x)\}_{m=1}^{+\infty} \in l_\infty$. Si L es un límite de Banach en l_∞, entonces $\theta : X \to \mathbf{C}$, dada por $\theta(x) = L(\{f(A^m x)\})$ es un funcional lineal y acotado. Como $L(\{f(A^m x_0)\}) = \lim_{m\to+\infty} f(A^m x_0) \neq 0$, se deduce que $\theta \neq 0$. Además $L(\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}) = L(\{x_n\}_{n=2}^{+\infty})$, $\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in l_\infty \Rightarrow \theta(Ax) = \theta(x)$, $\forall\ x \in \mathbf{X} \Rightarrow A'(\theta) = \theta$.

□

Corolario 1. *Si $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es acotado por potencias,$\mathbf{X}$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces $Ax = x$ para algún $x \in \mathbf{X}$, $x \neq 0$, si y sólo si, $A'\theta = \theta$ para algún $\theta \in \mathbf{X}^*$, $\theta \in \mathbf{X}^*$*

Demostración. Para ver el directo, si $Ax = x$ para algún $x \in \mathbf{X}$, $x \neq 0$, entonces $A^n x = x$, $\forall\ 1 \leq n$, y por el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$, un funcional de norma 1 con $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(A^n x) = f(x) \to f(x) = \alpha \neq 0$. Se aplica el lema anterior.

Para ver el recíproco, supongamos que existe $\theta \in X^*$ tal que $A'(\theta) = \theta$. Como $\|(A')^n\varphi\| = \|\varphi \circ A^n\| \leq \|\varphi\| \, \|A^n\| \leq \|A^n\|$ $(\|\varphi\| = 1) \Rightarrow A'$ es acotado por potencias $\Rightarrow \ \exists\, J \in (X^*)^* = X^{**}$ tal que $A'' J = J = J_x$ $(x \in X)$, donde $J(f) = J_x(f) = f(x)$, $\forall f \in X^*$. Se tiene que $A'' J_x = J_x \Rightarrow Ax = x$. De lo contrario existe $f \in X^*$ tal que $f(Ax) \neq f(x)$. Se deduce por lo tanto que $(A''J_x)f = f(Ax) = f(x)$ lo cual es una contradicción.

□

Corolario 2. *Si $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es acotado por potencia y A' no tiene valores propios de valor absoluto 1, entonces $A - \lambda I$ es lleno, para cada $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$.*

Demostración. Supongamos que $A - \lambda I$ no es lleno, para algún $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda = 1$.

Sea $M \in latT$ tal que $\overline{(A - I)M} \subsetneq M$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $x_0 \in M$, $f \in X^*$ tal que $f(x_0) \neq 0$, $f(((A - I)M) = 0$.

Veamos que $f(A^m x_0) = f(x_0)$, $\forall\, m \geq 0$. Note que $A^m x_0 \in M$. Se tiene que $f((A - I)A^m(x_0)) = 0$, de lo que se deduce que $f(A^{m+1}(x_0)) = f(A^m(x_0))$. La prueba se sigue por inducción. Usando el lema 1, tenemos que $1 \in \sigma_p(A')$, lo cual es una contradicción.

□

Teorema 2. *Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach uniformemente convexo, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ un operador invertible y $A \in Alglat\ T \bigcap \{T\}'$, tal que $\|A\| = 1$, $\sigma(A) \subseteqq \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$, A un operador lleno, entonces T es lleno, o A es de radio numérico alcanzable.*

Demostración. Supongamos que T no es lleno, entonces existe $M \in latT$, tal que $TM \subsetneq M$, $\dim \dfrac{T^n M}{T^{n+1} M} = 1$, vectores unitarios $x_n \in \mathbf{X}$ y $f_n \in \mathbf{X}^*$ funcionales de norma 1, tales que

$T^n M = \langle x_n \rangle \bigoplus T^{n+1} M$, $f_n(x_n) = 1$ y $f_n(T^{n+1} M) = 0$.

Se tiene que

$Tx_n = \alpha_n x_{n+1} + y_{n+2}$, $y_{n+2} \in T^{n+2} M$ $(*)$

$Ax_n = \beta_n x_n + z_{n+1}$, $z_{n+1} \in T^{n+1} M$ $(**)$.

Como $x_n = \alpha_n T^{-1} x_{n+1} + T^{-1} y_{n+2}$, $T^{-1} y_{n+2} \in T^{n+1} M \Rightarrow \alpha_n \neq 0$.

Usando (*) y (**), la forma como actúan los funcionales y que $A \in AlglatT \bigcap \{T\}'$, se deduce que

$\alpha_n \beta_{n+1} = \alpha_n \beta_n \Rightarrow \beta_n = \beta_{n+1},\ \forall\ n \geq 0$. Si $\beta_0 = 0$, entonces

$Ax_0 = z_1 \in TM \Rightarrow x_0 \in A^{-1} z_1 \in TM$, por ser el operador A lleno, lo cual conduce a un absurdo.

Vamos a demostrar que $A - \beta_0 I$ no es un operador lleno.

Como $(A - \beta_0 I)(x_0) \in TM$ y TM es invariante para A, entonces $(A - \beta_0 I)^n (x_0) \in TM$ para todo n, luego $f_0(A - \beta_0 I)^n (x_0) = 0$, con lo que $(A - \beta_0 I)$ no puede ser lleno. Se prueba usando el teorema de Sarason que $|\beta_0| = 1$ y por lo tanto A' tiene un valor propio $\lambda,\ |\lambda| = 1$. Se deduce que $(\frac{1}{\lambda} A)'$ tiene un punto fijo $\Rightarrow \frac{1}{\lambda} A$ tiene un punto fijo $\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \|A\| = |\lambda| = 1$.

□

Teorema 3. *Si* $T \in \mathbf{K}(\mathbf{X})$, *tal que* $\|T\| = 1 = \sup\limits_{\lambda \in W_{esp}(T)} |\lambda|$, X *estrictamente convexo, entonces* T *es de radio numérico alcanzable.*

Demostración. Existen $f_n \in \mathbf{X}^*,\ x_n \in \mathbf{X}$ tales que $f_n(x_n) = 1$ y $|f_n(Tx_n)| \to 1$. Como $\mathbf{X}$ es uniformemente convexo,

existe $x_{n_k} \to x$ $(*)$ en la topología débil $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) \Rightarrow Tx_{n_k} \to Tx$ $(**)$ en norma, ya que T es compacto.

Por otro lado $f_{n_k} \to f$ $(* * *)$ en la topología débil * $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$, $f \in \mathbf{B}_{\mathbf{X}^*}$.

Se deduce de (**) y (***) que $f_{n_k} T x_{n_k} \to fTx \Rightarrow$

$1 = |fTx| \leq \|x\| \Rightarrow \overline{lim} \|x_{n_k}\| \leq \|x\| \Rightarrow x_{n_k} \to x$ en norma

$\Rightarrow f_{n_k} x_{n_k} = 1 \to fx = 1$.

Esto demuestra que $\|T\| = |fTx| \Rightarrow fTx \in \sigma_p(T)$, por ser $\mathbf{X}$ estrictamente convexo. Ver la referencia [4, pág.93].

□

Teorema 4. *Si* $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ *es invertible,* $\mathbf{X}$ *uniformemente convexo y* $A \in AlglatT \bigcap \{T\}'$ *es tal que (a)* A *es casinilpotente y (b)* A *es casi lleno, entonces*

T es lleno.

Demostración. Supongamos que el operador T no es lleno. Existe un $M \in latT$

$\dim \frac{T^n M}{T^{n+1}M} = 1, \ \ T^n = \langle x_n \rangle \bigoplus T^{n+1}M, \ \ \|x_n\| = 1 \ \forall \ 0 \leq n$. Sean f_n funcionales tales que

$f_n(x_n) = \|f_n\| = 1, \ f_n(T^{n+1}M) = 0.$

Existe $k \geq 0$, tal que $\{Ax_n\} \subset T^k M, \ \{Ax_n\} \subsetneqq T^{k+1}M.$

En caso contrario si $N = \bigvee_{n=0}^{+\infty} \bigvee_{m=0}^{+\infty} A^m x_n$ y $\sum_{i=r}^{n} \alpha_i x_i \in \overline{AN} \subset T^{r+1}M \ (\alpha_r \neq 0) \Rightarrow$

$f_r(\sum_{i=r}^{n} \alpha_i x_i) = \alpha_r = 0$, lo cual es absurdo. Es decir la familia $\{x_n + \overline{AN}\}$ es linealmente independiente. Esto contradice que A es casi lleno.

Se tiene que $Tx_n = \alpha_n x_{n+1} + y_{n+2} \ (y_{n+2} \in T^{n+2}M \ (*))$ y

$Ax_n = \beta_n x_{n+k} + z_{n+k+1} \ (z_{n+k+1} \in T^{n+k+1}M)(**).$

Como $AT(x_n) = \alpha_n \beta_{n+1} x_{n+k+1} + \omega_1 \ (\omega_1 \in T^{n+k+2}M)$ y

$TA(x_n) = \beta_n \alpha_{n+k} x_{n+k+1} + \omega_2 \ (\omega_2 \in T^{n+k+2}M) \Rightarrow$

$f_{n+k+1}(AT(x_n)) = f_{n+k+1}(TA(x_n)) \Rightarrow \alpha_n \beta_{n+1} = \beta_n \alpha_{n+k} \ (***).$

Por la elección de k, se tiene que $\beta_0 \neq 0$ y por lo tanto $\beta_n \neq 0, \ \forall \ n$.

Usando $(**)$ deducimos que $A^r x_0 = \beta_0 .... \beta_{(r-1)k} x_{rk} + \omega \ (\omega \in T^{rk+1}M) \Rightarrow$

$|f_{rk}(A^r x_0)| = |\beta_0 ... \beta_{r-1}| \Rightarrow |\beta_0 ... \beta_{r-1}|^{\frac{1}{r}} \leq \|A^r\|^{\frac{1}{r}} \to 0.$

Si $k = 0$, entonces $\beta_0 = 0$, lo que contradice la elección de k.

Por lo tanto $1 \leq k$. De $(***)$ deducimos que :

$\beta_0 = \frac{\alpha_0 ... \alpha_{k-1}}{\alpha_k .... \alpha_{2k-1}} \beta_k = ... = \frac{\alpha_0 ... \alpha_{k-1}}{\alpha_{(r-1)k} .... \alpha_{rk-1}} \beta_{(r-1)k} \ (****).$

Como $Tx_n = \alpha_n x_{n+1} + y_{n+2} \Rightarrow x_n = \alpha_n T^{-1}x_{n+1} + T^{-1}y_{n+2} \Rightarrow 1 = \alpha_n f_n(T^{-1}x_n) \Rightarrow$

$1 \leq |\alpha_n|\ \|T^{-1}\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\alpha_n| \leq \|T\|$.

Usando $(****)$ se obtiene: $\dfrac{|\beta_0|^r}{\|T\|^{(r-1)k}\ \|T^{-1}\|^{(r-1)k}} \leq |\dfrac{\beta_0^r \alpha_k ... \alpha_{rk-1}}{(\alpha_0 ... \alpha_{k-1})^{r-1}}| =$

$|\beta_0 ... \beta_{r-1}| \Rightarrow \lim\limits_{r\to+\infty} \big(\dfrac{|\beta_0|^r}{\|T\|^{(r-1)k}\ \|T^{-1}\|^{(r-1)k}}\big)^{\frac{1}{r}} = \dfrac{\beta_0}{\|T\|^k\ \|T^{-1}\|^k} = 0$, lo que es una contradicción.

$\square$

Teorema 5. *Si $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es invertible y $latT^n = latT$, entonces T^n $(n > 1)$ es un operador lleno.*

Demostración. Demostremos que T es un operador lleno. De lo contrario existe un $M \in latT$, tal que $\dim \dfrac{M}{TM} = 1 \Rightarrow M = \langle x \rangle \bigoplus TM$. Sea $f \in X^*$, tal que $f(x) = 1,\ f(TM) = 0$.

Consideremos $N = \bigvee\limits_{m=0}^{+\infty} (T^n)^m x \in latT^n = latT$.

Veamos que $Tx \notin N$. Si $Tx \in N$, entonces $Tx = \lim P_\alpha(T^n x)$ donde la convergencia es en norma. Se deduce que $f(Tx) = \lim P_\alpha f(T^n x) = \lim P_\alpha(0) = 0$. Es decir si $Q_\alpha = P_\alpha - P_\alpha(0)$, entonces $\lim Q_\alpha(T^n x) = Tx$, donde Q_α es un polinomio sin términos independientes $\Rightarrow x = \lim Q_\alpha(T^{n-1}x) \Rightarrow f(x) = 0$, lo cual es una contradicción.

Si $N \in latT$, entonces $T^n N = T(T^{n-1}N) = T^{n-1}N = ... = T(TN) = TN = N$. $\square$

Teorema 6. *Sea $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ donde X es un espacio de Banach estrictamente convexo. Si $\|T\| = |\lambda|,\ \lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$, entonces $T - \lambda$ es un operador lleno.*

Demostración. Si $T - \lambda$ no es lleno, existe $x \in \mathbf{X},\ f \in \mathbf{X}^*$, tales que

$f(x) = \|f\| = \|x\| = 1$ y $f((T-\lambda)x) = 0$, luego $f(Tx) = \lambda$. Como

$\|T\| = |\lambda|$, entonces $\lambda \in W_{esp}(T) \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$, lo cual es absurdo.

$\square$

Referencias

1.-G. Bachman and L. Narici: Functional Analysis. Academic Press. New York and London . 1966.

2.-J. Bravo: Relations between $latT$, $latT^{-1}$, $latT^{2}$ and operators with compact imaginary parts. Ph. D. Dissertation. University of California Berkeley (1980).

3.-J. Bravo: Operadores regulares en $AlglatT \bigcap \{T\}^{'}$. Departamento de Matemáticas. Facultad Experimental de Ciencias. LUZ. 2007.

4.-F. F. Bonsaal and J. Duncan: Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras. CAMBRIDGE AT UNIVERSITY PRESS 1971.

5.-F. F. Bonsaal and J. Duncan: Numerical Ranges II. CAMBRIDGE AT UNIVERSITY PRESS 1973.

6.-C. Goffman and G. Pedrick: First course in Functional Analysis. PRETINCE-HALL, INC, London. 1965.

7.-N. L. Carothers: A Short Course on Banach Space Theory. Department of Mathematics and Statistics Bowling Green State University. Summer 2000.

8.-D. Sarason.: The H^{p} of Annulus Mem, A.M.S. 56 (1965).

Edixo Rosales,
Departamento de Matemática y Computación,
Facultad Experimental de Ciencias,
La Universidad del Zulia,
Maracaibo, Venezuela.

e-mail: erosales@luz.edu.ve

INFORMACIÓN NACIONAL

La esquina olímpica

En memoria de Sergio Villarroel (1995–2012)

Rafael Sánchez Lamoneda

En esta oportunidad reseñamos los eventos del segundo semestre del año 2012. Principalmente la 53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, por sus siglas en inglés, celebrada del 4 al 16 de Julio en la ciudad de Mar del Plata, Argentina. Nuestro equipo estuvo integrado por la joven Rubmary Rojas, colegio San Vicente de Paúl, Barquisimeto, Diego Peña, colegio Los Hipocampitos, Altos Mirandinos y Sergio Villarroel, colegio San Lázaro, Cumaná. La tutora de la delegación fue la profesora Laura Vielma, de la Academia Washington y el jefe de delegación, quién escribe, Rafael Sánchez Lamoneda. El estudiante Diego Peña, ganó una mención honorífica por su resolución de un problema de los 6 propuestos, el número 1. Participaron 548 estudiantes provenientes de 100 países. La IMO, está, sin duda, totalmente arraigada en la comunidad matemática internacional. En el 2013 el anfitrión es Colombia, y la sede del evento será la ciudad caribeña de Santa Marta. Para mayor información ver `http://www.uan.edu.co/imo2013/en/` o `www.acm.ciens.ucv.ve`.

En septiembre se organizó en Cochabamba, Bolivia, la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Por primera vez desde que comenzamos a asistir a este evento en 1988, no pudimos estar presentes. Los problemas originados por el control de cambio hicieron imposible la compra de los boletos de avión para volar de Santa Cruz de la Sierra hasta Cochabamba.

Antes de finalizar esta Esquina Olímpica, un agradecimiento a nuestros patrocinadores y amigos, Fundación Empresas Polar, Banco Central de Venezuela, Acumuladores Duncan, la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman, MRW, la Academia Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, las universidades UCV, USB, Carabobo, LUZ, URU, ULA y UDO. Muchas gracias por seguir con nosotros otro año más.

Para terminar les ofrecemos los exámenes propuestos en la IMO, como de costumbre, cada problema tiene un valor de 7 puntos y el tiempo de duración de cada examen, es de cuatro horas y media.

53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Primer día

Mar del Plata, Argentina, 10 de Julio de 2012

Problema 1

Dado un triángulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este excírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BC.

Demostrar que M es el punto medio de ST.

(El *excírculo* de ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC, a la prolongación del lado AB más allá de B, y a la prolongación del lado AC más allá de C.)

Problema 2

Sea $n \geq 3$ un entero, y sean $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Demostrar que

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \; > \; n^n.$$

Problema 3

El *juego de la adivinanza del mentiroso* es un juego para dos jugadores A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos por ambos jugadores.

Al principio del juego, el jugador A elige enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x en secreto, y le dice a B el verdadero valor de N. A continuación, el jugador B intenta obtener información acerca de x formulando preguntas a A de la siguiente manera: en cada pregunta, B especifica un conjunto arbitrario S de enteros positivos (que puede ser uno de los especificados en alguna pregunta anterior), y pregunta a A si x pertenece a S. El jugador B puede hacer tantas preguntas de ese tipo como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responderla inmediatamente con *sí* o *no*, pero puede mentir tantas veces como quiera. La única restricción es que entre cualesquiera $k+1$ respuestas consecutivas, al menos una debe ser verdadera.

Cuando B haya formulado tantas preguntas como haya deseado, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X entonces gana B; en caso contrario, pierde. Demostrar que:

1. Si $n \geq 2^k$, entonces B puede asegurarse la victoria.
2. Para todo k suficientemente grande, existe un entero $n \geq 1{,}99^k$ tal que B no puede asegurarse la victoria.

Segundo día

Mar del Plata, Argentina, 11 de Julio de 2012

Problema 4

Hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplen la siguiente igualdad:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

para todos los enteros a, b, c que satisfacen $a + b + c = 0$.

($\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros.)

Problema 5

Sea ABC un triángulo tal que $\angle BCA = 90°$, y sea D el pie de la altura desde C. Sea X un punto interior del segmento CD. Sea K el punto en el segmento AX tal que $BK = BC$. Análogamente, sea L el punto en el segmento BX tal que $AL = AC$. Sea M el punto de intersección de AL y BK.

Demostrar que $MK = ML$.

Problema 6

Hallar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Rafael Sánchez Lamoneda
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV

e-mail: asomatemat8@gmail.com

25 AÑOS

Oswaldo Araujo

En la ciudad de Mérida, del 17 al 20 de marzo de 1977, auspiciado por la Universidad de Los Andes, se celebró el Primer Congreso Venezolano de Matemáticos. Su temario fue:

1) La enseñanza de la matemática en la escuela media y en el ciclo básico universitario, y el problema de la escasez de personal docente idóneo.

2) La orientación y el desarrollo de la formación de matemáticos en las universidades del país.

3) Los estudios de postgrado y la investigación matemática en el país.

Motivado por la realización del Segundo Congreso Venezolano de Matemáticos, que se llevó a cabo en la Ciudad de Cumaná, el Profesor Jesús Rivero reprodujo, parcialmente, las ponencias y trabajos presentados en el evento del 77 y, en particular, algunas de las conclusiones cuyo desarrollo y evolución es el objetivo de estas notas.

En efecto, con respecto al tema 3) una de las recomendaciones fue: "relacionar y establecer contactos entre los distintos programas de postgrado. En particular, se sugiere establecer programas de intercambio de estudiantes y de personal docente". Más adelante, en el apartado de "Otras recomendaciones", leemos: "Realizar con mayor frecuencia simposios, seminarios y congresos de matemáticos" y "Nombrar una comisión organizadora de la Sociedad Matemática Venezolana" [1]

Veamos entonces como estas ideas se han venido consolidándose en Venezuela.

Jornadas Venezolanas de Matemáticas.

Bajo el nombre de simposio, seminario o congreso en el país se han organizado eventos sobre: Lógica, Probabilidades, Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, Sistemas dinámicos, Teoría de grafos y Análisis funcional, entre otros. Pero la actividad que ha logrado acatar, de manera constante y sistemática, la recomendación de realizar reuniones, entre los matemáticos, ha sido la denominada Jornadas Venezolanas de Matemáticas (JVM).

El origen de las JVM se remonta al año 1986 cuando, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, se realizaron las Primeras Jornadas de Análisis. El acta de este evento fue publicada y en ella están contenidas parte de las seis conferencias, los resúmenes de los trabajos presentados y las resoluciones del foro que, sobre la problemática de la investigación matemática en Venezuela, se llevó a cabo [2].

Posteriormente, en 1987, se produjeron las II Jornadas de Análisis, en Barquisimeto, y al año siguiente, en Maracaibo, las Terceras.

El éxito alcanzado por esa actividad y la ampliación de los temas tratados en ella derivó en la organización anual de las JVM. Este evento ha permitido registrar la investigación que, en diversas áreas de la matemática y disciplinas afines, se lleva a cabo en el país.

Durante los 25 años de ejecución de las JVM éstas han tenido, grosso modo, las siguientes características: duración entre 3 o 4 días (siempre en vísperas de la Semana santa); un Comité de programa, donde siempre se trata de incluir algún matemático venezolano que trabaje en el extranjero; un Comité organizador, constituido principalmente por matemáticos que se desempeñan en la sede del evento; carácter itinerante; conferencias plenarias por invitación; organización de un foro con temas relacionados con la profesión en sus diversas facetas. Por ejemplo, durante la XII JVM, realizadas en la Universidad Central de Venezuela, la Asociación Matemática Venezolana organizó un foro sobre el problema de la evaluación de la actividad matemática.

En contraste con las Primeras Jornadas de Análisis, donde en total se registraron 29 participantes; en la edición XXV de las JVM, entre ponentes, estudiantes y docentes, participaron 300 personas, hubo cuatro conferencias plenarias y se presentaron 140 ponencias que abarcaron las áreas de Análisis, Análisis no lineal y Teoría de funciones de variación acotada generalizada, Educación matemática, Ecuaciones diferenciales parciales, Análisis de Clifford y Física-matemática, Grafos y Combinatoria, Lógica Matemática, Teoría de números y Álgebra y Topología y Geometría.

La lectura de las actas de las 25 JVM muestra, por una parte, la evolución de la investigación en el país y, por la otra, la recurrencia en discutir temas de constante preocupación en nuestra comunidad, verbigracia, el problema de la evaluación de la actividad matemática.

Escuela Venezolana de Matemáticas

La recomendación de relacionar y establecer contactos entre los distintos programas de postgrado y, en particular, la sugerencia de instaurar programas de intercambio de estudiantes y de personal docente ha sido, sin duda, totalmente lograda con la puesta en marcha de la Escuela Venezolana de Matemáticas (EVM)

Sobre el nacimiento, desarrollo y gestores de la EVM remitimos al lector a un comentario escrito por quien ha sido desde entonces, hasta la fecha, uno de sus principales mentores, el Profesor Carlos Di Prisco. La nota de Carlos abarca el período, 1987- 1994 [3]. Me guiaré por ella para comentar algunos cambios que, en el transcurrir de estos 25 años, ha experimentado la EVM sin que éstos hayan alterado su esencia y sus principales objetivos, a saber, contribuir a la formación de matemáticos y fomentar el intercambio científico y la cooperación entre las instituciones participantes.

La I EVM se realizó, del 17 al 30 de septiembre de 1988, en la Facultad de Ciencias, de la Universidad de Los Andes, en Mérida; ciudad que desde esa época ha sido la sede de la Escuela. En esta Escuela participaron 102 personas, se dictaron siete cursos y algunas charlas. A partir de esa experiencia se decidió: reducir el número de cursos y ofrecer una sola conferencia. En efecto, salvo en la III y en la XI EVM donde se ofrecieron 5 cursos y en la XV EVM, donde se dictaron tres conferencias, lo usual ha sido ofrecer 4 cursos y una única conferencia al inicio de cada Escuela.

La organización de las tareas que condujeron al nacimiento de la Escuela se hicieron bajo el auspicio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT), con la participación de los coordinadores de los postgrados en matemáticas de la Universidad Central de Venezuela (UCV), de la Universidad de Los Andes (ULA), de la Universidad Simón Bolívar (USB) y del Instituto Venezolano de investigaciones Científicas (IVIC); postgrados éstos que recibían para el momento financiamiento del CONICIT.

La EVM fue estructurada como un programa conjunto de las instituciones que iniciaron el proyecto. Pero, con la incorporación de los postgrados en matemáticas de la Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado (UCOLA), en el 2002, y de la Universidad de Oriente (UDO) en el año 2006, se amplió su conformación.

Las actividades de la Escuela estuvieron, inicialmente, dirigidas por un Comité formado por los cuatro Coordinadores de los postgrados mencionados anteriormente, junto con un Coordinador general de la Escuela, quien presidía el Comité. Actualmente esas labores son administradas por un Comité organizador formado por 3 o 4 personas, su Coordinador representa la Escuela; un Comité científico constituido por los seis coordinadores de los postgrados, antes citados, que selecciona los cursos a ofrecer en una determinada Escuela y un Comité local que se encarga de la logística en la sede del evento.

Las primeras Escuelas fueron financiadas, principalmente, por el CONICIT y, en menor grado, por los aportes de la ULA, IVIC, UCV, USB y la Asociación Matemática Venezolana (AMV). Pero, la reducción de la ayuda del CONICIT y, posteriormente, del Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT) nombre con el cual, desde 1984, pasó a ser denominado el CONICT, motivó la búsqueda y colaboración de nuevos auspiciadores, entre otros, FUDACITE-Mérida, Fundación Empresas Polar, la Fundación TALVEN (Talento venezolano en el exterior), Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales y Banco Central de Venezuela; instituciones que con su contribución hicieron posible la realización de las sucesivas Escuelas.

La durabilidad de la Escuela ha sido variada. La primera fue de 14 días, las siguientes, hasta el 2005, fueron de 11 días y, a partir, de la edición XIX, 6 días. También, el número de sus participantes ha variado, en la primera 102 y en la vigésima quinta 80. Tomando en cuenta que en las reuniones preparatorias de la Primera Escuela se estimaba una asistencia de unas cuarentas personas y que el número de asistentes, durante estos 25 años, se ha mantenido alrededor del centenar, podemos decir que la participación ha sido grande.

Los cambios que hemos señalado han sido originados, principalmente, por la reducción de los aportes de los financiadores que, en el caso de las Universidades, se debe a la falta de un presupuesto adecuado mediante el cual puedan éstas, por una parte, brindarle el apoyo necesario a su personal para que éste pueda mantenerse actualizado y ejecutar tareas de investigación y, por la otra, ofrecerles un salario justo que le garantice, a ellas, la estabilidad de su planta profesoral.

En los albores del siglo XXI la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) con la finalidad de estimular el desarrollo de las matemáticas en la región Centroamericana y del Caribe inició un programa llamado Escuela Matemática de América Latina y el Caribe (EMALCA). Este programa contó con el apoyo financiero del Centre International de Mathématiques Pures et Appliqueés (CIMPA) y académicamente con el respaldo de la AMV y de la Sociedad Matemática Mejicana.

Actualmente el programa EMALCA se ha extendido abarcando, no sólo la región Centroamericana y del Caribe, sino también países suramericanos. Recordemos que la I EMALCA se realizó en México, en el 2001, y la II en Venezuela, en el 2002, simultáneamente con la XV EVM. Desde esa fecha la EVM pasó a ser, cada dos años, EMALCA Venezuela. Pero, a partir del 2011, cada EVM es también, EMALCA Venezuela.

Un logro importante de la EVM fue su incorporación al proyecto EMALCA. Pero también y, como resultado de la actividad ininterrumpida de la Escuela, se han obtenido otros relevantes logros que mencionamos a continuación:

- Desde la tercera Escuela se ha contado con la participación de un número importante de estudiantes, docentes e investigadores de Austria, Argentina, Brasil, Colombia, Cuba, Costa Rica, Chile, Escocia, Estados Unidos, España, El Salvador, Francia, Honduras, Italia, México, Perú, República Dominicana, Uruguay y Venezuela. Para hacer posible la asistencia de esas personas ha sido crucial , además de las instituciones que ya hemos mencionado, la colaboración, de la Coordinación de Postgrados Latinoamericana y del Caribe, International Center for Theoretical Physics de Trieste y la Corporación Andina de Fomento.

- La publicación de 104 monografías, la mayoría de ellas en castellano. Aportando, así, una significativa bibliografía en diversos temas de las matemáticas.
- Formación de generación de relevo a nivel nacional y regional.
- Fuente de inspiración para la creación y desarrollo de Escuelas. temáticas en Venezuela como, por ejemplo, la Escuela Venezolana de Educación Matemática; La Hechicera: en Relatividad, Campos y Astrofísica.

Asociación Matemática Venezolana

Durante la celebración del tercer Congreso Venezolano de Matemáticas se constituyó, en 1980, la Sociedad Venezolana de Matemáticas (SVM). La finalidad de la SVM era reunir a todos los trabajadores de la Matemática en Venezuela en pro de la actividad matemática en sus múltiples aspectos: Investigación, aplicaciones y enseñanza, a todos los niveles. Además, se proponía organizar a partir del 81 y cada dos años el Congreso Venezolano de Matemáticas, editar un Boletín y organizar seminarios interdisciplinarios.

La SVM entró en un período de estancamiento al no poder organizar el IV Congreso Venezolano de Matemática y, en consecuencia, no podía ni renovar sus miembros ni sus autoridades como lo exigía el estatuto de la Sociedad. Hubo muchos esfuerzos para reactivarla pero ante la imposibilidad de lograrlo un grupo de matemáticos decidió crear una nueva organización cuyos objetivos y metas, en esencia, fueron aquellos postulados por la SVM. Así, nació en enero de 1990 la Asociación Matemática Venezolana (AMV) [4].

Será en el 2015 cuando la AMV cumplirá sus 25 años, pero desde que ella asumió la representación de la comunidad matemática ha sido una pieza fundamental para auspiciar y desarrollar, eficiente y exitosamente, las diversas actividades del quehacer matemático venezolano.

Es necesario entonces que reflexionemos sobre la existencia de la AMV y hacer esfuerzos para garantizar su desarrollo y crecimiento. Su perdurabilidad, activa y vigorosa, nos asegurará, no sólo, la continuidad de los programas, acá, reseñados, sino también, la puesta en marcha de nuevos proyectos.

Finalmente, sirvan estas líneas para felicitar y agradecer a todos aquellos que, con su trabajo y dedicación, han hecho posible que, a lo largo de estos 25 años, estudiantes, docentes e investigadores, hemos ampliado y desarrollado nuestros conocimientos en Matemática.

Bibliografía

[1] Primer congreso venezolano de matemáticos. ULA, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, 1977

[2] Primeras jornadas de Análisis. ULA, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, 1986

[3] Carlos Di Prisco, La escuela venezolana de matemática. Boletín de la AMV, Volumen II, Nro.1, 1995

[4] Oswaldo Araujo y Joaquín Ortega, Acerca del origen de la AMV. Boletín de la AMV, Volumen I, Nro. 1, 1994

Oswaldo Araujo
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

e-mail: araujo@ula.ve

Egresados del Postgrado de Matemática de la UCV Año 2012.

Mariela Castillo

Los estudios en Matemáticas a nivel de Postgrado, en Venezuela, se han desarrollado de una manera vertiginosa en los últimos 30 años. Existen en la actualidad programas de Postgrado en Matemáticas en varias instituciones de educación superior entre las cuales podemos citar a la:

1. Universidad Central de Venezuela (UCV).
2. Universidad Simón Bolívar (USB).
3. Instituto Venezolano de Investigación Científicas (IVIC).
4. Universidad de Oriente (UDO).
5. Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado (UCLA).
6. Universidad de los Andes (ULA)

Esta situación refleja la presencia en Venezuela de Matemáticos con formación superior capacitados para organizar programas de estudio, dictar cursos y supervisar trabajos especiales y tesis a nivel de maestría y doctorado.

Los programas de Postgrado respondieron, en sus inicios, a las políticas de crecimiento institucional que permitieron que cada universidad desarrollara independientemente su programa para lograr así tanto el prestigio académico que esto implica, como los recursos financieros que este tipo de actividad atrae. Sin embargo, la situación ha comenzado a cambiar con el desarrollo del programa de Postgrados Integrados de Matemáticas, iniciado en 1998 y financiado por el CONICIT, hoy FONACIT. Este programa ha permitido integrar a profesores y estudiantes de Matemáticas en un programa de intercambio a nivel nacional que ha fortalecido los grupos de investigación y optimizado el uso de los recursos. En la actualidad todos los Postgrados de Matemáticas dictados en Facultades de Ciencias en el país pertenecen a este programa. La finalidad de estos programas consiste en formar profesionales y científicos de alto nivel, capaces de realizar un trabajo original en esta disciplina como actividad permanente, contribuir con el desarrollo de la ciencia Matemática, al de sus aplicaciones en otras disciplinas y al sector productivo, así como también elevar la calidad de la docencia en Matemática a nivel superior. Es importante destacar que, para la presentación de la Tesis Doctoral, es un requisito previo la publicación de, por lo menos, un artículo relacionado con el tema en una revista arbitrada especializada y de prestigio internacional. Igualmente muchas de las tesis de Maestría han generado también publicaciones en cada una de sus áreas. El Postgrado de Matemáticas está adscrito a la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y su integración con ella es completa, tanto a nivel docente como de investigación. Todo profesor de la Escuela con título de Doctor es automáticamente incorporado en la planta profesoral del Postgrado. Además, la planificación docente de pregrado y postgrado se hace de manera coordinada, garantizando una permanente rotación de los profesores entre pre y postgrado. La Escuela Venezolana de Matemáticas se ha constituido en uno de los elementos claves y pioneros del programa de integración de Postgrado. Se realiza todos los años en el mes de septiembre en la ciudad de Mérida y está orientada hacia la formación, capacitación y captación de estudiantes de postgrado para la investigación. Por otra parte, las Jornadas Matemáticas también organizadas por la Asociación Matemática Venezolana (AMV), es el punto de encuentro anual de investigación de la comunidad matemática del país. En ambos eventos se destaca la amplia participación de estudiantes y el aporte de profesores de nuestro postgrado. Queremos destacar que este año del Postgrado de Matemática de la Facultad de ciencias de la UCV, han egresado 12 Doctores en Ciencia y 6 Magíster en Ciencia mención Matemática. A continuación el listado de los egresados.

Semestre I. Año Lectivo 2012
Marzo - Julio 2012
Programa: Doctorado en Ciencias, Mención Matemática

Nombre del Estudiante:	Orlando José Garcia Mojica
Tutor:	Dr. Pietro Aiena (Universidad de Palermo,Italia)
Título de la Tesis:	"Preservación de la Propiedad (W) Para Operadores Lineales Acotados Bajo Perturbaciones De Riesz que Conmutan"
Artículos Publicados:	1. Pietro Aiena and Orlando García. "Generalized Browder´s Theorrem and SVEP", Mediterranean J. Math., 4(2007), 215-228. 2. Carlos Carpintero, Orlando García, Ennis Rosas y José Sanabria. "B-Browder spectra and localized SVEP". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 57 (2008), 241-255. 3. Pietro Aiena and Orlando García. "Property (w) under compact or Riesz commuting perturbations". Acta Sci. Math. (Szeged), 76, (2010), 135-153.

Nombre del Estudiante:	Wilson Rodolfo Pacheco Rendondo
Tutor:	Dr. Jaime Bravo (LUZ)
Título de la Tesis:	"Operadores Llenos y problemas de aproximación"
Artículos Publicados:	1. Wilson Pacheco. "Full Operators and Algebras Generated by Invertible Operators". Extracta Mathematicae, Vol. 24. Núm. 3, 259-264 (2009)

Nombre del Estudiante:	Dilcia Josefina Pérez
Tutor:	Dra. Yamilet Quintana (USB)
Título de la Tesis:	"Desigualdades de tipo Markov-Nikolskii en espacios de Sobolev con peso"
Artículos Publicados:	1. Yamilet Quintana; Dilcia Pérez. "Some Markov-Bernstein type Inequalities and certain Class of SobolevPolynomialds". Journal of advanced Mathematical Studies.

Nombre del Estudiante:	Margot Del Valle Salas Brown
Tutor:	Dr. Manuel González (Universidad de Cantabria Santander - España)
Título de la Tesis:	"Clases de Perturbación de Teoría de Fredholm"
Artículos Publicados:	1. Manuel González, Margot del Valle Salas Brown. "Perturbation clases for semi-Fredholm operators on Lp (μ)-spaces". Mathematical Analysis and Applications. 2. Manuel González, Margot del Valle Salas Brown. "Perturbation clases for semi-Fredholm operators on subprojective and superprojective spaces" Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica.

Nombre del Estudiante:	Boris José Lora Castro
Tutor:	Dr. Ramón Bruzual, (UCV)
Título de la Tesis:	"Representación de Núcleos de Toeplitz Generalizados Indefinidos y Medibles en la Recta"
Artículos Publicados:	1. Ramon Bruzual, Marisela Domínguez, Boris Lora. "Representation of generalizad Toeplitz kernels with a finite Lumber of negative squares" Acta Scientiarum Mathematicarum. 2011

Semestre II Año Lectivo 2012
Programa: Doctorado en Ciencias, Mención Matemática

Nombre del Estudiante:	Tomás Elieser Ereú Alvarado
Tutor:	Dr. Nelson Merentes (UCV)
Título de la Tesis:	"Sobre la Noción Bidimensional de Funciones de Variación Acotada en el Sentido de Hardy -Vitali -Schramm"
Artículos Publicados:	1. Tomás Ereú, Nelson Merentes, José L. Sánchez "Some Remarks on the algebra of functions of two variables with bounded total F-Variation in Schramm sense" Commentationes Mathematicae; Vol. 50. No. 1 (2010), 23-33. 2. Tomás Ereú, Nelson Merentes, Beata Rzepka, José L. Sánchez. "On composition operator in the algebra of functions of two variables with bounded total φ-variation in Schramm sense" Journal of Mathematics and Applications. No. 33, pp 35-50 (2010). 3. Tomás Ereú, Nelson Merentes, José L. Sánchez and Malgorzata Wróbel "Uniformly Continuous Composition Operators In The Space of Bounded φ-Variation". Opuscula Mathematica. Vol. 32. No. 2. 2010. 4. Tomás Ereú, Nelson Merentes, José L. Sánchez and Malgorzata Wróbel. "Uniformly Continuous Set - Valued Composition Operators in The Spaces of Functions of Bounded Variation in The Sense of Schramm". Jan Dlugosz, University in Czestochowa. Scientific Issues Mathematics XVI, Czestowa 2011

Nombre del Estudiante:	Jurancy Josefina Ereu
Tutores:	Dr. José Giménez (ULA) y Dr. Nelson Merentes (UCV)
Título de la Tesis:	"Funciones de Segunda Variación Acotada en el Plano"
Artículos Publicados:	1. Jurancy Ereú, José Giménez, Nelson Merentes."On Bidimensional Second Variation" Commentationes Mathematicae.

Nombre del Estudiante:	Nathaly Del Carmen Guanda Betancourt
Tutores:	Dr. Nelson Merentes (UCV) Dr. Jurgen Appell (University of Würzburg. Department of Mathematics, Würzburg, Germany)
Título de la Tesis:	"Propiedades Analíticas y Topológicas Del Operador De Composición y Aplicaciones a Varios Problemas No Lineales".
Artículos Publicados:	1. Jürgen Appell, Nathaly Guanda And Martin Väth. "Function spaces with the Matkowski property and degeneracy phenomena for nonlinear composition operators". Fixed Point Theory 2. J. Appell, N. Guanda, N. Merentes, J.L. Sánchez. "Some Boundedness and Continuity Properties of Nonlinear Composition Operators: A Survey".

Nombre del Estudiante:	José Benito Hernandez Chaudary
Tutor:	Dr. José Rafael León (UCV) Dr. Joaquín Ortega (UCV)
Título de la Tesis:	"Modelaje Aleatorio No Gaussiano Del Mar"
Artículos Publicados:	1. J.Ortega, José B. Hernández C. "A Comparison of Two Methods for Spectral Analysis of Waves", Proceedings of the Sixteenth (2006) International offshore and Polar Engineering Conference" 2. José B. Hernández Ch. Joaquín Ortega. "A Comparison of Segmentation Procedures and Analysis of the Evolution of Spectral Parameters". Proceedings of Seventeenth (2007)

Nombre del Estudiante:	Mayra Coromoto Montilla González
Tutor:	Dr. Ramón Bruzual (UCV)
Título de la Tesis:	"Funciones Completamente Positivas Y Aplicaciones A Problemas De Dilatación Multiparamétricos"
Artículo Publicado:	1. Marisela Domínguez, Mayra Montilla y Ramón Bruzual, "On unitary dilations of two parameter semigroups of contractions and continuous commutant lifting", Acta Scientiarum Mathematicarum

Nombre del Estudiante:	Liliana Rebeca Pérez
Tutor:	Dr. Francisco Montes de Oca (UCLA)
Título de la Tesis:	"Sistemas Competitivos Del Tipo Lotka -Volterra Con Retardo Infinito"
Artículo Publicado:	1. Francisco Montes de Oca, Liliana Pérez "Extinction in nonautonomous competitive Lotka-Volterra systems with infinite delay", Nonlinear Analysis

Nombre del Estudiante:	Sergio Tulio Rivas Albornoz
Tutor:	Dr. Nelson Merentes (UCV - BCV)
Título de la Tesis:	"Algunas Generalizaciones De La Noción De Variación En El Sentido De Riesz Y Un Teorema De Representación De Riesz".
Artículos Publicados:	1. N. Merentes, S. Rivas AND J.L. Sánchez "On Functions of bounded (p,k)-Variation", Journal of Function Space and Application. 2. José Giménez, Nelson Merentes, AND Sergio Rivas "Integral Representation of Functions of Bounded -Variation in the Sense of Schramm", Opuscula Mathematical 3. Nelson Merentes, Kazimirz Nikodem; AND Sergio Rivas, "Remarks on Strongly Wright-Convex Funtions", Annales Polinici Mathematici 4. N. Merentes, S. Rivas, J.L. Sánchez "Locally Lipschitz Composition Operators in the Space BV(a,b)", Theory, Methods & Applications.

Programa: Magister en Ciencias, Mención Matemática

Nombre del Estudiante:	Maricarmen Andrades Gómez
Tutor:	Dr. Rene Escalante (USB)
Título de la Tesis:	"Algunas Estrategias De Convergencia Para El Algoritmo De Las Proyecciones Generalizadas Alternas Para Dos Conjuntos"

Nombre del Estudiante:	Luis Henrique Anzola Anzola
Tutor:	Dr. Nelson Merentes (UCV - BCV)
Título de la Tesis:	"Algunas Propiedades De La -Variación Bidimensional En El Sentido De Waterman"

Nombre del Estudiante:	Robert Espitia Moronta
Tutor:	Dr. Rene Escalante (USB)
Título de la Tesis:	"Un Algoritmo De Proyecciones Generalizadas Alternantes En Un Espacio Producto"

Nombre del Estudiante:	José Gregorio Gómez García
Tutor:	Dr. José Rafael León (UCV)
Título de la Tesis:	"Una Teoría Matemática De Microlentes Estocásticos: Imágenes Aleatorias, Cortes Aleatorios Y La Fórmula De Kac-Rice"

Nombre del Estudiante:	Jonnathan Enrique Otero Arias
Tutor:	Dr. Francisco Tovar (UCV)
Título de la Tesis:	"Distribución Uniforme De Círculos Sobre Una Cíclide"

Nombre del Estudiante:	Adriana Coromoto Padrón Vezga
Tutores:	Dr. Marcos Paluszny (UCV) Dra. Tania Cordova (UCV)
Título de la Tesis:	"Construcción De Parches Esféricos Para La Modelación De La Superficie Molecular"

Mariela Castillo
Coordinadora del Postgrado de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

e-mail: mariela.castillo@ciens.ucv.ve

Saludo a la Realización de la XXV Escuela Venezolana de Matemáticas.

Rafael Labarca B.

Estimados Colegas Organizadores de las Escuelas Venezolanas de Matemáticas: Mariela Castillo de la Universidad Central de Venezuela; mi querido Oswaldo Araujo de la Universidad de Los Andes; mi colega y amigo Carlos di Prisco del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas y mi querido amigo y colega Neptali Romero de la Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado

Estimados Colegas Cursillistas de la XXV; muy en particular a mi querida colega Stella y a mi querido tocayo Rafael Oswaldo;

Estimado Profesor Ponce; que en esta ocasión ha venido a esta cita para dictar la conferencia inaugural; pero que ya estuvo en este evento en el año 1990 cuando era profesor de la Universidad Central de Venezuela y dictó un curso sobre la ecuación de Schrodinger junto al Profesor Urbina.

Estimados colegas de las distintos lugares de Venezuela que están en el evento;

Estimados alumnos de pre y posgrado participantes de esta XXV versión de la Escuela Venezolana de Matemática:

Señoras y Señores:

Sean mis primeras palabras para saludar este hermoso hecho, no trivial en nuestra América Morena, de que nuestros colegas venezolanos han sido capaces de, durante 25 años y de manera ininterrumpida, organizar la Escuela Venezolana de Matemática.

En estos 25 años se han realizado 103 cursos, con sus respectivos libros, que han sido dictados por 90 profesores venezolanos (con repeticiones) y 55 profesores extranjeros (con pocas repeticiones) en una gran variedad de áreas de la matemática: Geometría en sus varias formas; Ecuaciones de diversos tipos; Análisis; Topología; Álgebra; Aritmética; Probabilidad; Lógica; Sistemas Dinámicos; en fin; muchas áreas de la matemática.

Aquí, casi con medida total, deben haber estado todos los matemáticos que se han formado en Venezuela desde el año 1989 hasta ahora. Algunos, quizás, estuvieron ya como alumnos y luego como profesores. No hay números precisos de alumnos participantes en las EVM (a partir del año 1997) pero podemos suponer un promedio (modesto) de 80 por escuela y concluimos que han pasado por aquí alrededor de 2000 jóvenes. No trivial.

En fin; esta escuela es ya parte de la historia de la matemática y de los matemáticos de Venezuela. Así, y naturalmente, resulta ser parte de la historia de Venezuela. Por ejemplo; y si anduviera por ahí uno de nuestros colegas que hacen historia de la matemática y quisiera saber que ha pasado con la matemática en Venezuela iría a la página de las EVM y vería que de los 90 profesores venezolanos que han dictado cursos en ellas 32 venían de la Universidad Central; 21 de la Universidad Simón Bolívar; 20 de la Universidad de los Andes y 13 del IVIC (todos estos números con algunas repeticiones). Al ver que 66 de ellos provienen de Caracas concluiría que es en Caracas donde se concentra la mayor cantidad de matemáticos y de matemática en Venezuela y que la Universidad de Los Andes debe ser un centro importante.

Así que, y a manera de reflexión les dejo esta observación, con el propósito de que consideren que aquí se escribe una parte de la historia de la matemática de Venezuela y para que, a futuro, represente también los otros lugares donde haya matemática y matemáticos.

Esta Escuela, y a partir del año 2002 paso a ser una Escuela EMALCA, la segunda, en un régimen bianual y, a partir del año 2011, pasa a ser la EMALCA Venezuela, en régimen anual. Con esto nosotros, sus colegas latinoamericanos, estamos reconociendo la gran labor formativa de este evento y su importancia en Venezuela y para los países vecinos. Esta actividad, junto a las EMALCAS en México; son las pioneras en algo que ha crecido hasta un volumen tal que hemos hecho 25 EMALCAS, en diversas regiones de América Latina, en los últimos cuatro años. Otro hecho no trivial.

Así, y claro que sin quererlo, nuevamente estamos en eso del efecto mariposa: imagino que ni remotamente nuestros colegas venezolanos que organizaron la primera EVM el año de 1988 imaginaron este día y estas consecuencias. Pero bueno, es así.

Reciban pues, queridos colegas venezolanos, el saludo de sus colegas latinoamericanos agrupados en la Unión Matemática de América Latina (UMALCA) y muy en particular de sus colegas integrantes del comité de las Escuelas de Matemática de América Latina y del Caribe (EMALCA) en esta importante ocasión. Les deseamos que esta escuela sea un gran éxito y sigamos trabajando para que el año 2037 otros matemáticos, tanto allá en Venezuela, como en UMALCA, estén celebrando medio siglos de Escuelas Venezolanas de Matemáticas consideradas ya por casi 35 años como escuelas EMALCAS.

Muchas Gracias y ¡¡¡¡ larga vida a las Escuelas Latinoamericanas de Matemáticas !!!!

Santiago de Chile 01 de Septiembre de 2012

POS DATA: Caro colegas, no saben cuánto siento no haber leído Yo mismo este discurso. Entretanto, es por una buena razón. El día de hoy (01.09) iniciamos la IX versión del Campeonato Escolar de Matemática para la Enseñanza Básica y tendremos la ceremonia inaugural y la primera fecha. Serán alrededor de 1000 alumnos de escuelas primarias, la mayor parte de ellos de sectores populares, que estarán compitiendo en matemáticas hasta diciembre.

He pedido a Neptalí, en su calidad de integrante del Comité EMALCA, que lea este discurso y le agradezco mucho por hacerlo. Si no pudiera, naturalmente debe leerlo Carlos en su calidad de Secretario de UMALCA.

Salu2 a to2

Rafael Labarca B.
Proofesor de Matemáticas.
Coordinador EMALCAS

Asociación Matemática Venezolana
XXVI Jornadas Venezolanas de Matemáticas
Universidad de Carabobo
Valencia, 18 al 21 de marzo de 2013

Segundo Anuncio: llamado a presentación de trabajos

Las Jornadas Venezolanas de Matemáticas son organizadas anualmente por la Asociación Matemática Venezolana en colaboración con algunas universidades nacionales. Se trata de un evento de carácter científico que sirve como mecanismo de registro y divulgación de los resultados de las investigaciones en Matemática que se realizan en el país. Constituyen un foro de encuentro de matemáticos y diversos profesionales interesados en conocer, analizar y debatir los temas más actuales en investigación matemática.

La vigésima sexta edición de las Jornadas Venezolanas de Matemáticas se llevará a efecto en la Universidad de Carabobo en la ciudad de Valencia entre el 18 y 21 de Marzo de 2013. En esta ocasión las sesiones temáticas sobre las que se articula el evento, así como sus coordinadores, son:

Sesión	Coordinadores
Álgebra y Teoría de Números	Amilcar Pérez (ajperez@usb.ve) Aurora Olivieri (aurora.olivieri@gmail.com)
Análisis	José Sanabria (jesanabri@gmail.com) Julio Ramos(julio.ramos.fernandez@gmail.com)
Ecuaciones Diferenciales Parciales, Análisis de Clifford y Física Matemática	Judith Vanegas(cvanegas@usb.ve) Yanett Bolívar (bolivarcolon@gmail.com)
Educación Matemática	Manuel Centeno (manuelcenteno11@gmail.com)
Funciones de Variación Acotada y Aplicaciones	Jurancy Ereú (jereu@ucla.edu.ve) M. Bracamonte (mireyabracamonte@ucla.edu.ve)
Grafos y Combinatoria	Felicia Villaroel(feliciavillarroel@gmail.com) Daniel Brito (dbrito@sucre.udo.edu.ve)
Lógica Matemática	Ramón Pino (pinoperez@gmail.com) Nerio Borges (nborges@usb.ve)
Modelación Matemática y Análisis Numérico	Giovanni Calderón (giovanni@ula.ve) Said Kas–Danouche (sak0525@gmail.com)
Probabilidad y Estadística	Ricardo Rios (rricardorios@gmail.com) Saba Infante (sinfante@uc.edu.ve)
Sistemas Dinámicos Continuos y Discretos	Alexander Carrasco (acarrasco@ucla.edu.ve) Ramón Vivas(ramon.alberto.vivas@gmail.com)
Topología y Geometría	Ennis Rosas (ennisrafael@gmail.com) Tomás Guardia (tguardia@gmail.com)

Las personas interesadas en participar como expositores en cualquiera de las sesiones temáticas deberán atender a los siguientes requerimientos:

1. La propuesta de toda comunicación oral en cualquier sesión temática tiene que ser hecha ante la coordinación de la correspondiente sesión. El resumen de la misma, de no más de una cuartilla, deber ser enviado, en archivos .tex y .pdf, a las direcciones electrónicas de los coordinadores de la sesión. La fecha límite para ello es 11 de enero de 2013.

2. La selección de las comunicaciones orales de cada sesión es competencia exclusiva de la coordinación de la misma. Los proponentes recibirán, antes del 8 de febrero de 2013, la notificación sobre la aceptación o no de su propuesta.

3. Toda comunicación oral en las sesiones tendrá una duración de 20 minutos. El número máximo de ellas es de 30; sus horarios serán establecidos por el Comité Organizador, mientras que el orden de presentación será competencia de la coordinación de cada sesión.

4. Los resúmenes deberán ser sometidos siguiendo, preferiblemente, el siguiete formato LaTeX:

```
\documentclass[12pt]{amsart}
\usepackage[spanish]{babel}
\begin{document}
\title{TITULO DE LA COMUNICACION ORAL}
\author{Autor 1, \underline{Autor 2}} %% subrayado el expositor
\address{INSTITUCION del Autor 1}
\email{xxx@uni.ve} %% direcci\'on electr\'onica del Autor 1
\address{INSTITUCION del Autor 2}
\email{xxx@uni.ve} %% direcci\'on electr\'onica del Autor 2
\maketitle
\section*{Resumen}
ACA VIENE EL CONTENIDO DEL RESUMEN
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{zw}
Z. Zhou and J. Wu. Attractive Periodic Orbits in Nonlinear Discrete-time
Neural Networks with Delayed Feedback. \textit{J. Difference. Equ. and Appl.}
Vol. {\bf 8}, (2001) 467--483.
\end{thebibliography}
\end{document}
```

La dirección de la página web de las XXVI Jornadas es:

http://xxvijvm.facyt.uc.edu.ve

AGRADECIMIENTO

Nuestra gratitud por la colaboración prestada, en el trabajo editorial del volumen XIX del Boletín de la AMV, a las siguientes personas:
Jaime Bravo, José Giménez, Luis González, Fernando Mejías, Wilson Pacheco, Jesús Pérez Sánchez y Gustavo Ponce.

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs.F. 10 (US$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history, philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance. All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsability of the author. All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs.F. 10 (US$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: http://boletinamv.ma.usb.ve/

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XIX, Número 2, Año 2012

EDITORIAL **111**

ARTÍCULOS

(Dirichlet-Neumann)-Schwarz problem for the nonhomogeneous tri-analytic equation.
Antonio Nicola Di Teodoro and Carmen Judith Vanegas. **113**

Some KKM type, intersection and minimax theorems in spaces with abstract convexities.
Luis González Espinoza. **129**

A note on the lower bounds for the Hausdorff Dimension of the Geometric Lorenz Attractor.
Leonardo Mora **141**

Operadores casi llenos y de radio numérico alcanzable.
Edixo Rosales. **147**

INFORMACIÓN NACIONAL

La esquina olímpica
Rafael Sánchez Lamoneda **155**

25 años
Oswaldo Araujo **159**

Egresados del postgrado de Matemática de la UCV año 2012.
Mariela Castillo **165**

Saludo a la Realización de la XXV Escuela Venezolana de Matemáticas.
Rafael Labarca B. **173**

XXVI Jornadas Venezolanas de Matemáticas **177**

AGRADECIMIENTO **179**