Operadores casi llenos y de radio numérico alcanzable

Edixo Rosales

Resumen. Si T es un operador acotado en un espacio de Banach complejo $\mathbf{X}$ y $\|T\| = |\lambda|$, donde λ es un valor propio de T, se dice que T es de radio numérico alcanzable. Análogamente que T es un operador casi lleno, si $\frac{M}{\overline{TM}}$ es de dimensión finita para cada M subespacio invariante de T.

Se prueban los siguientes resultados:

1.-Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach uniformemente convexo, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ un operador invertible y $A \in Alglat\ T \bigcap \{T\}'$, tal que $\|A\| = 1,\ \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} :\ |\lambda| = 1\}$, A un operador lleno, entonces T es lleno, o A es de radio numérico alcanzable.

2-Si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach uniformemente convexo, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es invertible, $A \in AlglatT \bigcap \{T\}'$ es tal que (a) A es casinilpotente y (b) A es casi lleno, entonces T es lleno.

Abstract. If $\mathbf{T}$ is a bounded operator on $\mathbf{X}$, where $\mathbf{X}$ is a complex Banach space and $\|T\| = |\lambda|$, where λ is an eingenvalue of T, then we say that T has reachable numerical radius. Similarly, we say that T is nearly full if $\frac{M}{\overline{TM}}$ is finite-dimensional for every invariant subspace M of T

We prove the following results:

1.-If $\mathbf{X}$ is an uniformly convex Banach space, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ an invertible operator and $A \in Alglat\ T \bigcap \{T\}'$ is such that $\|A\| = 1,\ \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} :\ |\lambda| = 1\}$ and A is full operator, then T is full or A has reachable numerical radius.

2-If $\mathbf{X}$ is an uniformly convex Banach space , $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ an invertible operator and $A \in AlglatT \bigcap \{T\}'$ is such that A is quasinilpotent and is nearly full, then T is full.

1. Preliminares

Para nosotros $\mathbf{X}$ será un espacio de Banach complejo y $\mathbf{X}^*$ su espacio dual. También $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ denotará el espacio de los operadores lineales acotados en $\mathbf{X}$), y $\mathbf{K}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{B}(\mathbf{X})$ los operadores compactos en $\mathbf{X}$. Si $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$, entonces $\mathbf{A}^{'}$ será su traspuesto. Un subespacio (cerrado)M de $\mathbf{X}$ se llama invariante para $\mathbf{T} \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ si $TM \subset M$. Por $latT$ entenderemos la familia de todos los subespacios invariantes de T. Un operador $\mathbf{T} \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ se llamará lleno si $\overline{TM} = M, \ \forall \ M \in latT$, donde la barra denota la clausura topológica en la norma. Análogamente $\mathbf{T} \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ se dirá casi lleno si el espacio cociente $\dfrac{M}{\overline{TM}}$, es de dimensión finita. Note que todo operador lleno es casi lleno.

Si $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$, por el conmutante de T, que denotaremos por $\{T\}^{'}$, entenderemos la familia de todos los operadores que conmutan con T. Por $AlglatT$, representaremos la familia de todos los operadores $S \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$, tales que $latT \subset latS$. Un operador T se dirá acotado por potencias, si la sucesión numérica $\{\|T^m\|\}_{m=1}^{+\infty}$ es acotada, y casinilpotente cuando $\lim\limits_{m\to+\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} = 0$.

El rango numérico espacial del operador T, es el conjunto numérico $W_{esp}(T) = \{f(Tx) : f \in X^*, \ x \in X, \ f(x) = \|f\| = \|x\| = 1\}$.

Una isometría importante para nosotros es la que define $J : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^{**}$ dada por $J(x) = J_x$, donde $J_x(f) = f(x), \ \forall \ f \in \mathbf{X}^*$. Es conocido que $\|J(x)\| = \|x\|, \ \forall \ x \in \mathbf{X}$. Si J es sobre, entonces se dirá que el espacio $\mathbf{X}$ es de Banach reflexivo. Un espacio de Banach $\mathbf{X}$ se dirá uniformemente convexo, si dado $\epsilon > 0, \ 0 < \epsilon \leq 2$, existe un $0 < \delta$ tal que $\forall \ x, \ y \in \mathbf{X}, \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \epsilon \leq \|x - y\| \Rightarrow \|\dfrac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$. Análogamente que $\mathbf{X}$ es estrictamente convexo, si dados $x, \ y \in \mathbf{X}$ tales que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces los vectores $x, \ y$ son linealmente dependientes. Todo espacio de Banach $\mathbf{X}$ estrictamente convexo es uniformemente convexo y todo $\mathbf{X}$ uniformemente convexo es reflexivo.

Un operador $T \in B(X)$ se llamará de radio numérico alcanzable, si $\|T\| = |\lambda|$, con $\lambda \in \sigma_p(T)$, donde $\sigma_p(T)$ significará el conjunto de los valores propios del operador T.

Finalmente, indicamos que si $\mathbf{X}$ es un espacio de Banach y $\{x_n^m\}$ una sucesión doble en $\mathbf{X}$, entonces $\bigvee_{m=0}^{+\infty} \bigvee_{n=0}^{+\infty} x_n^m$ expresará la clausura en la topología de la norma del subespacio generado por $\{x_n^m\}$.

El siguiente resultado aparece en la referencia [8]:

Teorema 1. *(Sarason) Sea $T \in B(X)$. Si $\rho(T)$ es la resolvente de T y ρ_∞ es la componente conexa no acotada de $\rho(T)$, entonces:*

(1) Si λ y λ_0 pertenecen a la misma componente conexa de $\rho(T)$, entonces $lat(T-\lambda)^{-1} = lat(T-\lambda_0)^{-1}$

(2) Si $\lambda \in \rho_\infty(T)$ entonces $lat(T-\lambda)^{-1} = latT$.

2. Operadores casi llenos y de radio numérico alcanzable

Los siguientes tres resultados aparecen inicialmente en la referencia [3], y se dan para hacer autocontenida la exposición del artículo:

Lema 1. *Si $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es acotado por potencias y $f \in \mathbf{X}^*$, $x_0 \in \mathbf{X}$ tales que $\lim\limits_{m\to+\infty} f(A^m x_0) = \alpha \neq 0$, entonces A' tiene un punto fijo.*

Demostración. Como A es acotado por potencias, para cada $x \in X$ tenemos que $\{f(A^m x)\}_{m=1}^{+\infty} \in l_\infty$. Si L es un límite de Banach en l_∞, entonces $\theta : X \to \mathbf{C}$, dada por $\theta(x) = L(\{f(A^m x)\})$ es un funcional lineal y acotado. Como $L(\{f(A^m x_0)\}) = \lim\limits_{m\to+\infty} f(A^m x_0) \neq 0$, se deduce que $\theta \neq 0$. Además $L(\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}) = L(\{x_n\}_{n=2}^{+\infty})$, $\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \in l_\infty \Rightarrow \theta(Ax) = \theta(x)$, $\forall\ x \in \mathbf{X} \Rightarrow A'(\theta) = \theta$.

□

Corolario 1. *Si $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es acotado por potencias,$\mathbf{X}$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces $Ax = x$ para algún $x \in \mathbf{X}$, $x \neq 0$, si y sólo si, $A'\theta = \theta$ para algún $\theta \in \mathbf{X}^*$, $\theta \in \mathbf{X}^*$*

Demostración. Para ver el directo, si $Ax = x$ para algún $x \in \mathbf{X}$, $x \neq 0$, entonces $A^n x = x$, $\forall\ 1 \leq n$, y por el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$, un funcional de norma 1 con $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(A^n x) = f(x) \to f(x) = \alpha \neq 0$. Se aplica el lema anterior.

Para ver el recíproco, supongamos que existe $\theta \in X^*$ tal que $A'(\theta) = \theta$. Como $\|(A')^n\varphi\| = \|\varphi \circ A^n\| \leq \|\varphi\| \, \|A^n\| \leq \|A^n\|$ $(\|\varphi\| = 1) \Rightarrow A'$ es acotado por potencias $\Rightarrow \; \exists \, J \in (X^*)^* = X^{**}$ tal que $A^{''}J = J = J_x$ $(x \in X)$, donde $J(f) = J_x(f) = f(x), \; \forall f \in X^*$. Se tiene que $A''J_x = J_x \Rightarrow Ax = x$. De lo contrario existe $f \in X^*$ tal que $f(Ax) \neq f(x)$. Se deduce por lo tanto que $(A''J_x)f = f(Ax) = f(x)$ lo cual es una contradicción.

□

Corolario 2. *Si $A \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es acotado por potencia y A' no tiene valores propios de valor absoluto 1, entonces $A - \lambda I$ es lleno, para cada $\lambda \in \mathbf{C}, \; |\lambda| = 1$.*

Demostración. Supongamos que $A - \lambda I$ no es lleno, para algún $\lambda \in \mathbf{C}, \; |\lambda| = 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda = 1$.

Sea $M \in latT$ tal que $\overline{(A-I)M} \subsetneq M$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $x_0 \in M, \; f \in X^*$ tal que $f(x_0) \neq 0, \; f(((A-I)M) = 0$.

Veamos que $f(A^m x_0) = f(x_0), \; \forall \; m \geq 0$. Note que $A^m x_0 \in M$. Se tiene que $f((A-I)A^m(x_0)) = 0$, de lo que se deduce que $f(A^{m+1}(x_0)) = f(A^m(x_0))$. La prueba se sigue por inducción. Usando el lema 1, tenemos que $1 \in \sigma_p(A')$, lo cual es una contradicción.

□

Teorema 2. *Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach uniformemente convexo, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ un operador invertible y $A \in Alglat \; T \bigcap \{T\}'$, tal que $\|A\| = 1, \; \sigma(A) \subseteqq \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}, A$ un operador lleno, entonces T es lleno, o A es de radio numérico alcanzable.*

Demostración. Supongamos que T no es lleno, entonces existe $M \in latT$, tal que $TM \subsetneq M, \; \dim \dfrac{T^n M}{T^{n+1}M} = 1$, vectores unitarios $x_n \in \mathbf{X}$ y $f_n \in \mathbf{X}^*$ funcionales de norma 1, tales que

$T^n M = \langle x_n \rangle \bigoplus T^{n+1}M, \; f_n(x_n) = 1$ y $f_n(T^{n+1}M) = 0$.

Se tiene que

$Tx_n = \alpha_n x_{n+1} + y_{n+2}, \; y_{n+2} \in T^{n+2}M \; (*)$

$Ax_n = \beta_n x_n + z_{n+1}, \; z_{n+1} \in T^{n+1}M \; (**)$.

Como $x_n = \alpha_n T^{-1}x_{n+1} + T^{-1}y_{n+2}, \; T^{-1}y_{n+2} \in T^{n+1}M \Rightarrow \alpha_n \neq 0$.

Usando (*) y (**), la forma como actúan los funcionales y que $A \in AlglatT \bigcap \{T\}'$, se deduce que

$\alpha_n \beta_{n+1} = \alpha_n \beta_n \Rightarrow \beta_n = \beta_{n+1},\ \forall\ n \geq 0$. Si $\beta_0 = 0$, entonces

$Ax_0 = z_1 \in TM \Rightarrow x_0 \in A^{-1}z_1 \in TM$, por ser el operador A lleno, lo cual conduce a un absurdo.

Vamos a demostrar que $A - \beta_0 I$ no es un operador lleno.

Como $(A - \beta_0 I)(x_0) \in TM$ y TM es invariante para A, entonces $(A - \beta_0 I)^n(x_0) \in TM$ para todo n, luego $f_0(A - \beta_0 I)^n(x_0) = 0$, con lo que $(A - \beta_0 I)$ no puede ser lleno. Se prueba usando el teorema de Sarason que $|\beta_0| = 1$ y por lo tanto A' tiene un valor propio $\lambda,\ |\lambda| = 1$. Se deduce que $(\frac{1}{\lambda}A)'$ tiene un punto fijo $\Rightarrow \frac{1}{\lambda}A$ tiene un punto fijo $\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \|A\| = |\lambda| = 1$.

$\square$

Teorema 3. *Si $T \in \mathbf{K}(\mathbf{X})$, tal que $\|T\| = 1 = \sup\limits_{\lambda \in W_{esp}(T)} |\lambda|$, X estrictamente convexo, entonces T es de radio numérico alcanzable.*

Demostración. Existen $f_n \in \mathbf{X}^*,\ x_n \in \mathbf{X}$ tales que $f_n(x_n) = 1$ y $|f_n(Tx_n)| \to 1$. Como $\mathbf{X}$ es uniformemente convexo,

existe $x_{n_k} \to x$ $(*)$ en la topología débil $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) \Rightarrow Tx_{n_k} \to Tx$ $(**)$ en norma, ya que T es compacto.

Por otro lado $f_{n_k} \to f$ $(***)$ en la topología débil * $\sigma(\mathbf{X}^*, \mathbf{X})$, $f \in \mathbf{B}_{\mathbf{X}^*}$.

Se deduce de (**) y (***) que $f_{n_k} Tx_{n_k} \to fTx \Rightarrow$

$1 = |fTx| \leq \|x\| \Rightarrow \overline{lim}\|x_{n_k}\| \leq \|x\| \Rightarrow x_{n_k} \to x$ en norma

$\Rightarrow f_{n_k} x_{n_k} = 1 \to fx = 1$.

Esto demuestra que $\|T\| = |fTx| \Rightarrow fTx \in \sigma_p(T)$, por ser $\mathbf{X}$ estrictamente convexo. Ver la referencia [4, pág.93].

$\square$

Teorema 4. *Si $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es invertible, $\mathbf{X}$ uniformemente convexo y $A \in AlglatT \bigcap \{T\}'$ es tal que (a) A es casinilpotente y (b) A es casi lleno, entonces*

T es lleno.

Demostración. Supongamos que el operador T no es lleno. Existe un $M \in latT$

$\dim \frac{T^n M}{T^{n+1}M} = 1, \;\; T^n = \langle x_n \rangle \bigoplus T^{n+1}M, \;\; \|x_n\| = 1 \;\forall\; 0 \leq n$. Sean f_n funcionales tales que

$f_n(x_n) = \|f_n\| = 1, \;\; f_n(T^{n+1}M) = 0.$

Existe $k \geq 0$, tal que $\{Ax_n\} \subset T^k M, \;\; \{Ax_n\} \subsetneqq T^{k+1}M$.

En caso contrario si $N = \bigvee_{n=0}^{+\infty} \bigvee_{m=0}^{+\infty} A^m x_n$ y $\sum_{i=r}^{n} \alpha_i x_i \in \overline{AN} \subset T^{r+1}M \;\; (\alpha_r \neq 0) \Rightarrow$

$f_r(\sum_{i=r}^{n} \alpha_i x_i) = \alpha_r = 0$, lo cual es absurdo. Es decir la familia $\{x_n + \overline{AN}\}$ es linealmente independiente. Esto contradice que A es casi lleno.

Se tiene que $Tx_n = \alpha_n x_{n+1} + y_{n+2} \;\; (y_{n+2} \in T^{n+2}M \;\; (*))$ y

$Ax_n = \beta_n x_{n+k} + z_{n+k+1} \;\; (z_{n+k+1} \in T^{n+k+1}M)(**).$

Como $AT(x_n) = \alpha_n \beta_{n+1} x_{n+k+1} + \omega_1 \;\; (\omega_1 \in T^{n+k+2}M)$ y

$TA(x_n) = \beta_n \alpha_{n+k} x_{n+k+1} + \omega_2 \;\; (\omega_2 \in T^{n+k+2}M) \Rightarrow$

$f_{n+k+1}(AT(x_n)) = f_{n+k+1}(TA(x_n)) \Rightarrow \alpha_n \beta_{n+1} = \beta_n \alpha_{n+k} \;\; (***).$

Por la elección de k, se tiene que $\beta_0 \neq 0$ y por lo tanto $\beta_n \neq 0, \; \forall\; n$.

Usando $(**)$ deducimos que $A^r x_0 = \beta_0 .... \beta_{(r-1)k} x_{rk} + \omega \;\; (\omega \in T^{rk+1}M) \Rightarrow$

$|f_{rk}(A^r x_0)| = |\beta_0 ... \beta_{r-1}| \Rightarrow |\beta_0 ... \beta_{r-1}|^{\frac{1}{r}} \leq \|A^r\|^{\frac{1}{r}} \to 0.$

Si $k = 0$, entonces $\beta_0 = 0$, lo que contradice la elección de k.

Por lo tanto $1 \leq k$. De $(***)$ deducimos que :

$\beta_0 = \frac{\alpha_0 ... \alpha_{k-1}}{\alpha_k .... \alpha_{2k-1}} \beta_k = ... = \frac{\alpha_0 ... \alpha_{k-1}}{\alpha_{(r-1)k} .... \alpha_{rk-1}} \beta_{(r-1)k} \;\; (****).$

Como $Tx_n = \alpha_n x_{n+1} + y_{n+2} \Rightarrow x_n = \alpha_n T^{-1}x_{n+1} + T^{-1}y_{n+2} \Rightarrow 1 = \alpha_n f_n(T^{-1}x_n) \Rightarrow$

$1 \leq |\alpha_n|\ \|T^{-1}\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\alpha_n| \leq \|T\|.$

Usando $(****)$ se obtiene: $\dfrac{|\beta_0|^r}{\|T\|^{(r-1)k}\ \|T^{-1}\|^{(r-1)k}} \leq \left|\dfrac{\beta_0^r \alpha_k ... \alpha_{rk-1}}{(\alpha_0 ... \alpha_{k-1})^{r-1}}\right| =$

$|\beta_0 ... \beta_{r-1}| \Rightarrow \lim\limits_{r \to +\infty} \left(\dfrac{|\beta_0|^r}{\|T\|^{(r-1)k}\ \|T^{-1}\|^{(r-1)k}}\right)^{\frac{1}{r}} = \dfrac{\beta_0}{\|T\|^k\ \|T^{-1}\|^k} = 0$, lo que es una contradicción.

$\square$

Teorema 5. *Si $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ es invertible y $latT^n = latT$, entonces T^n $(n > 1)$ es un operador lleno.*

Demostración. Demostremos que T es un operador lleno. De lo contrario existe un $M \in latT$, tal que $\dim \dfrac{M}{TM} = 1 \Rightarrow M = \langle x \rangle \bigoplus TM$. Sea $f \in X^*$, tal que $f(x) = 1,\ f(TM) = 0$.

Consideremos $N = \bigvee\limits_{m=0}^{+\infty} (T^n)^m x \in latT^n = latT$.

Veamos que $Tx \notin N$. Si $Tx \in N$, entonces $Tx = \lim P_\alpha(T^n x)$ donde la convergencia es en norma. Se deduce que $f(Tx) = \lim P_\alpha f(T^n x) = \lim P_\alpha(0) = 0$. Es decir si $Q_\alpha = P_\alpha - P_\alpha(0)$, entonces $\lim Q_\alpha(T^n x) = Tx$, donde Q_α es un polinomio sin términos independientes $\Rightarrow x = \lim Q_\alpha(T^{n-1}x) \Rightarrow f(x) = 0$, lo cual es una contradicción.

Si $N \in latT$, entonces $T^n N = T(T^{n-1}N) = T^{n-1}N = ... = T(TN) = TN = N$. $\square$

Teorema 6. *Sea $T \in \mathbf{B}(\mathbf{X})$ donde X es un espacio de Banach estrictamente convexo. Si $\|T\| = |\lambda|,\ \lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T)$, entonces $T - \lambda$ es un operador lleno.*

Demostración. Si $T - \lambda$ no es lleno, existe $x \in \mathbf{X},\ f \in \mathbf{X}^*$, tales que

$f(x) = \|f\| = \|x\| = 1$ y $f((T - \lambda)x) = 0$, luego $f(Tx) = \lambda$. Como

$\|T\| = |\lambda|$, entonces $\lambda \in W_{esp}(T) \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$, lo cual es absurdo.

$\square$

Referencias

1.-G. Bachman and L. Narici: Functional Analysis. Academic Press. New York and London . 1966.

2.-J. Bravo: Relations between $latT$, $latT^{-1}$, $latT^2$ and operators with compact imaginary parts. Ph. D. Dissertation. University of California Berkeley (1980).

3.-J. Bravo: Operadores regulares en $AlglatT \bigcap \{T\}^{'}$. Departamento de Matemáticas. Facultad Experimental de Ciencias. LUZ. 2007.

4.-F. F. Bonsaal and J. Duncan: Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras. CAMBRIDGE AT UNIVERSITY PRESS 1971.

5.-F. F. Bonsaal and J. Duncan: Numerical Ranges II. CAMBRIDGE AT UNIVERSITY PRESS 1973.

6.-C. Goffman and G. Pedrick: First course in Functional Analysis. PRETINCE-HALL, INC, London. 1965.

7.-N. L. Carothers: A Short Course on Banach Space Theory. Department of Mathematics and Statistics Bowling Green State University. Summer 2000.

8.-D. Sarason.: The H^p of Annulus Mem, A.M.S. 56 (1965).

Edixo Rosales,
Departamento de Matemática y Computación,
Facultad Experimental de Ciencias,
La Universidad del Zulia,
Maracaibo, Venezuela.

e-mail: erosales@luz.edu.ve