INFORMACIÓN NACIONAL

La esquina olímpica

En memoria de Sergio Villarroel (1995–2012)

Rafael Sánchez Lamoneda

En esta oportunidad reseñamos los eventos del segundo semestre del año 2012. Principalmente la 53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, por sus siglas en inglés, celebrada del 4 al 16 de Julio en la ciudad de Mar del Plata, Argentina. Nuestro equipo estuvo integrado por la joven Rubmary Rojas, colegio San Vicente de Paúl, Barquisimeto, Diego Peña, colegio Los Hipocampitos, Altos Mirandinos y Sergio Villarroel, colegio San Lázaro, Cumaná. La tutora de la delegación fue la profesora Laura Vielma, de la Academia Washington y el jefe de delegación, quién escribe, Rafael Sánchez Lamoneda. El estudiante Diego Peña, ganó una mención honorífica por su resolución de un problema de los 6 propuestos, el número 1. Participaron 548 estudiantes provenientes de 100 países. La IMO, está, sin duda, totalmente arraigada en la comunidad matemática internacional. En el 2013 el anfitrión es Colombia, y la sede del evento será la ciudad caribeña de Santa Marta. Para mayor información ver `http://www.uan.edu.co/imo2013/en/` o `www.acm.ciens.ucv.ve`.

En septiembre se organizó en Cochabamba, Bolivia, la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Por primera vez desde que comenzamos a asistir a este evento en 1988, no pudimos estar presentes. Los problemas originados por el control de cambio hicieron imposible la compra de los boletos de avión para volar de Santa Cruz de la Sierra hasta Cochabamba.

Antes de finalizar esta Esquina Olímpica, un agradecimiento a nuestros patrocinadores y amigos, Fundación Empresas Polar, Banco Central de Venezuela, Acumuladores Duncan, la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman, MRW, la Academia Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, las universidades UCV, USB, Carabobo, LUZ, URU, ULA y UDO. Muchas gracias por seguir con nosotros otro año más.

Para terminar les ofrecemos los exámenes propuestos en la IMO, como de costumbre, cada problema tiene un valor de 7 puntos y el tiempo de duración de cada examen, es de cuatro horas y media.

53^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

Primer día

Mar del Plata, Argentina, 10 de Julio de 2012

Problema 1

Dado un triángulo ABC, el punto J es el centro del excírculo opuesto al vértice A. Este excírculo es tangente al lado BC en M, y a las rectas AB y AC en K y L, respectivamente. Las rectas LM y BJ se cortan en F, y las rectas KM y CJ se cortan en G. Sea S el punto de intersección de las rectas AF y BC, y sea T el punto de intersección de las rectas AG y BC.

Demostrar que M es el punto medio de ST.

(El *excírculo* de ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC, a la prolongación del lado AB más allá de B, y a la prolongación del lado AC más allá de C.)

Problema 2

Sea $n \geq 3$ un entero, y sean $a_2, a_3, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Demostrar que

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \; > \; n^n.$$

Problema 3

El *juego de la adivinanza del mentiroso* es un juego para dos jugadores A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos por ambos jugadores.

Al principio del juego, el jugador A elige enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x en secreto, y le dice a B el verdadero valor de N. A continuación, el jugador B intenta obtener información acerca de x formulando preguntas a A de la siguiente manera: en cada pregunta, B especifica un conjunto arbitrario S de enteros positivos (que puede ser uno de los especificados en alguna pregunta anterior), y pregunta a A si x pertenece a S. El jugador B puede hacer tantas preguntas de ese tipo como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responderla inmediatamente con *sí* o *no*, pero puede mentir tantas veces como quiera. La única restricción es que entre cualesquiera $k + 1$ respuestas consecutivas, al menos una debe ser verdadera.

Cuando B haya formulado tantas preguntas como haya deseado, debe especificar un conjunto X de a lo más n enteros positivos. Si x pertenece a X entonces gana B; en caso contrario, pierde. Demostrar que:

1. Si $n \geq 2^k$, entonces B puede asegurarse la victoria.
2. Para todo k suficientemente grande, existe un entero $n \geq 1,99^k$ tal que B no puede asegurarse la victoria.

Segundo día

Mar del Plata, Argentina, 11 de Julio de 2012

Problema 4

Hallar todas las funciones $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que cumplen la siguiente igualdad:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a),$$

para todos los enteros a, b, c que satisfacen $a + b + c = 0$.

($\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros.)

Problema 5

Sea ABC un triángulo tal que $\angle BCA = 90^\circ$, y sea D el pie de la altura desde C. Sea X un punto interior del segmento CD. Sea K el punto en el segmento AX tal que $BK = BC$. Análogamente, sea L el punto en el segmento BX tal que $AL = AC$. Sea M el punto de intersección de AL y BK.

Demostrar que $MK = ML$.

Problema 6

Hallar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Rafael Sánchez Lamoneda
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV

e-mail: asomatemat8@gmail.com