



Christian Goldbach
18/3/1690 – 20/11/1764.

“Todo número par mayor que 2 puede expresarse
como suma de dos números primos”

Vol. XX • No. 1 • Año 2013

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Volumen XX, Número 1, Año 2013

I.S.S.N. 1315-4125

Editor

Oswaldo Araujo

Editores Asociados

Carlos Di Prisco y Henryk Gzyl

Editor Técnico: Boris Iskra

Comité Editorial

Pedro Berrizbeitia, Alejandra Cabaña, Giovanni Calderón, Sabrina Garbin, Gerardo Mendoza, Neptalí Romero, Rafael Sánchez Lamonedá, Judith Vanegas, Jorge Vargas

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente

Rafael Sánchez Lamonedá

Capítulos Regionales

CAPITAL

Rafael Sánchez Lamonedá

UCV

rafael.sanchez@ciens.ucv.ve

CENTRO-OCCIDENTAL

Sergio Muñoz

UCLA

smunoz@uicm.ucla.edu.ve

LOS ANDES

Oswaldo Araujo

ULA

araujo@ciens.ula.ve

ORIENTE

Said Kas-Danouche

UDO

skasdano@sucre.udo.edu.ve

ZULIA-FALCÓN

Oswaldo Larreal

LUZ

olarreal@gmail.com

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet:
<http://amv.ivic.ve/> .

Asociación Matemática Venezolana

Boletín
de la
Asociación
Matemática
Venezolana

Vol. XX • No. 1 • Año 2013

Editorial

La conjetura de Goldbach

Oswaldo Araujo

Uno de los problemas abiertos, más famoso y antiguo, de la teoría de números es la llamada conjetura de Goldbach. En realidad, se trata de dos conjeturas, la débil que afirma que:

Que todo número impar mayor que 5 puede escribirse como suma de tres números primos

y la fuerte:

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.

Ambas tienen su origen en la correspondencia entre Euler y Goldbach, en 1742. Y, si se demuestra la fuerte, la primera quedaría probada automáticamente. En efecto, si todo número par mayor que 4 es la suma de dos números primos, se puede añadir tres a los números pares mayores que 4 para producir los números impares mayores que 7.

Christian Goldbach (1690-1764) llegó a esa conjetura experimentalmente. Grandes avances hacia la prueba de la conjetura débil de Goldbach han sido los siguientes:

En 1923, los matemáticos ingleses, G.H. Hardy (1877-1947) y J.E. Littlewood (1885-1977) mostraron que, suponiendo una cierta generalización de la hipótesis de Riemann la conjetura es cierta para todos los números impares mayores que una cierta constante C . En 1937, el matemático ruso Iván M. Vinogradov (1891-1983) fue capaz de eliminar la dependencia de la hipótesis de Riemann y demostró directamente que todos los números impares suficientemente grandes pueden escribirse como suma de tres primos. El primero en hallar un valor explícito para C fue un alumno de Vinogradov, K. Borodzin, en 1939, a saber,

$C = 3^{14,348,907}$. Valor que fue mejorado a $C = 2,10^{1346}$, en 2002, por M. Ch. Liu y T. Wang. Estos logros, y los realizados, entre otros, por J. R. Chen, Schnirelman, Klimov, Oliveira e Silva, Herzog, Ramaré y Tao han contribuido, sin duda, en la búsqueda del camino adecuado para conseguir una prueba definitiva de la conjetura débil de Goldbach. Este objetivo fue, finalmente, alcanzado este año. En efecto, el matemático peruano Harald Andrés Helfgott ha podido demostrar la conjetura débil de Goldbach, problema que había permanecido irresuelto durante 271 años.

Helfgott, nacido en Lima en 1977 y actualmente investigador del Centro Nacional para la Investigación Científica (CNRS), Paris, publicó un trabajo: *Major arcs for Goldbach's problem* (<http://actualidad.rt.com/ciencias/view/95102-cientifico-demostrar-problema-matematico>), reivindicando la mejora de las estimaciones de los arcos mayores y menores lo suficiente para demostrar incondicionalmente la conjetura débil de Goldbach.

Al inicio de su manuscrito Helfgott señala que su resultado es válido para todo $n \geq C = 10^{30}$ y que, el teorema más importante de su trabajo, ha sido chequeado determinísticamente, por computadoras, para todo $n < 10^{30}$ (en realidad, para todo $n \leq 8,875 \cdot 10^{30}$). También hace una reseña histórica del problema, debidamente referenciada, que puede ser consultada al final de su artículo de 133 páginas; en particular, las contribuciones de todos los matemáticos citados anteriormente.

La revista PUCP|Punto Edu (<http://puntoedu.pucp.edu.pe>) de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), reseñó el encuentro que sostuvo Helfgott, el 3 de junio del 2013, con profesores del Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas, de la PUCP, donde respondió a diversas preguntas e inquietudes relacionadas con la demostración y relevancia de su trabajo. Con la finalidad de ilustrar el tipo de interrogantes surgidas, durante tan importante

evento, me permito transcribir las dos preguntas formuladas por el profesor Alfredo Poirier y las respectivas respuestas dadas por Helfgott:

Harald, ¿para qué sirve todo esto?

Poniendo las cosas en perspectivas, la conjetura era una manera tradicional, concreta y accesible de plantear el problema general que sigue: cómo es que los primos, definidos mediante la multiplicación, interactúan con la suma. **Al final, lo que será útil no es el resultado en sí, sino los métodos que tuve que desarrollar y afinar para conseguirlo**

¿Por qué esto no prueba la conjetura fuerte? Tengo entendido que buena parte de la prueba depende del afinamiento de ciertos estimados ya trabajados antes. Entonces: ¿son estos estimados óptimos (en el sentido de que no podrán ser mejorados para llenar eventuales vacíos en pruebas o simplificarla en el futuro)? ¿Por qué estos estimados dicen poco para la conjetura fuerte?

Los estimados no son necesariamente óptimos, aunque se acercan bastante. Por ejemplo, el estimado que doy para los arcos menores es esencialmente $|S(a/q)| \leq c(\log q)/\sqrt{\phi(q)}$, donde c es una constante un poco menor que 1 (en verdad depende un tanto de q , pero está acotada por menos que 1 en el rango importante); mientras que, por lo menos en un pequeño rango, Ramaré ha obtenidos $|S(a/q)| \leq 13000\sqrt{q}/\phi(q)$, lo cual es óptimo asintóticamente (ya **Vinogradov** tenía un resultado de esa calidad, sin una constante explícita). Como pueden ver, no sirve en la práctica (puesto que 13000 es una constante muy grande). **En otras palabras, lo que se necesitaba eran estimaciones útiles pero no necesariamente óptimas.**

El problema con la conjetura fuerte es que la contribución de los arcos menores (el “ruido”) es en verdad mayor que la contribución de los arcos mayores. Por lo tanto, la estrategia de acotar $S(\alpha)$ en los arcos menores y estimarlo en los arcos mayores no puede funcionar. Necesitaríamos estimaciones asintóticamente

correctas para $S(\alpha)$ con α arbitrario, y esto es algo que no se sabe hacer, aun bajo la **hipótesis generalizada de Riemann**. Hay un artículo en el blog de Tao que discute esto en detalle.

Oswaldo Araujo

CILA, Departamento de Matemáticas,

Facultad de Ciencias, ULA

ARTÍCULOS

Topología de Zariski para el espectro del módulo libre $(K[\mathbf{X}])^s$

Sandra Patricia Barragán Moreno

Resumen. En el documento que a continuación se presenta se estudia la topología de Zariski para el espectro primo del módulo libre $K[X]^s$; en particular, se calcula una base de abiertos y se consideran propiedades como la compacidad, la conexidad y de separación intermedias entre T_0 y T_1 .

Abstract. In this paper, the Topology of Zariski is studied for the prime spectrum of the free module $K[X]^s$, and in particular, a base of open sets is calculated, and properties such as compactness, connectedness and separation T_0 and T_1 are considered.

Palabras clave: submódulo primo, topología de Zariski.

2010 AMS Subject Classifications: Primaria: 13P10. Secundaria: 13E05.

1 Introducción.

Tomando como base el estudio detallado de la teoría de las Bases de Gröbner para los submódulos de $K[x_1, \dots, x_n]^s$ presentado en [1] y los algoritmos presentados en [4] y [8], se inicia el estudio del espectro primo de $K[X]^s$. Para llevar a cabo este trabajo en la segunda sección se establecen las definiciones y proposiciones preliminares. En la tercera sección se muestra la definición para la topología de Zariski para $\text{Spec}K[X]^s$, allí mismo se examina la compacidad, la conexidad y la separación para este espacio. Finalmente, en la tercera sección se exhiben ejemplos en los que se ha usado el programa CoCoA para facilitar los cálculos.

2 Preliminares.

En adelante, R representa un anillo conmutativo y K un cuerpo.

Definición 2.1. Sean R un anillo y P un ideal propio. Se dice que P es un ideal primo de R si para cualesquiera $a, b \in R$ con $ab \in P$ se cumple que $a \in P$ ó $b \in P$.

Definición 2.2. Se denota con $X^R := \text{Spec}(R) := \{P : P \text{ es ideal primo de } R\}$ al espectro primo del anillo R . La colección de ideales maximales de R se denota por $\text{Max}(R)$.

Definición 2.3. Para cada subconjunto E de R , $V(E) := \{P \in X^R : E \subseteq P\}$. Además, $X_a^R := X^R - V(\{a\}) = X^R - V(\langle a \rangle)$. Finalmente, $\text{rad}(R)$ representará el nilradical de R y consta de los elementos nilpotentes de R .

Definición 2.4. Un R -módulo M se dice noetheriano si cada cadena ascendente de submódulos se estabiliza. El anillo R es Noetheriano si considerado como R -módulo es Noetheriano.

Definición 2.5. Sea M un R -módulo. Para cualquier submódulo N de M se denota el anulador del módulo M/N por $(N : M)$ y coincide con el conjunto $\{r \in R : rM \subseteq N\}$.

Definición 2.6. Sean R un anillo y M un R -módulo. Un submódulo K de M es submódulo primo si $K \neq M$ y siempre que $r \in R$ y $m \in M$ con $rm \in K$, entonces $r \in (K : M)$ ó $m \in K$.

Definición 2.7. Se denota con $\text{Spec}M := \{K \mid K \text{ es un submódulo primo de } M\}$. Además, el espectro de M relativo al ideal primo P se define por $\text{Spec}_P M := \{K \in X : (K : M) = P\}$.

Definición 2.8. Sea R un anillo y M un R -módulo, se dice que M es carente de primos si $X = \phi$.

Definición 2.9. Para $X \neq \phi$, se tiene la función natural

$$\begin{aligned} \psi : X &\longrightarrow X^{\bar{R}} \\ K &\mapsto \psi(K) = (K : M) / \text{Ann}M = \overline{(K : M)} \end{aligned}$$

donde $X^{\bar{R}} = \text{Spec}(R / \text{Ann}M)$

Proposición 2.10. $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s \neq \phi$.

Demostración. Todo submódulo maximal es primo. En particular cada módulo no nulo finitamente generado tiene al menos un submódulo primo. \square

Proposición 2.11. $AnnK[\mathbf{X}]^s = \langle 0 \rangle$

Demostración.

$$AnnK[\mathbf{X}]^s = (0 : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq K[\mathbf{X}]$$

$\supseteq 0 \in (0 : K[\mathbf{X}]^s)$.

\subseteq Sea $r \in (0 : K[\mathbf{X}]^s)$ entonces $r\mathbf{m} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$, en particular para $(1, \dots, 1)$ así, $r(1, \dots, 1) = (0, \dots, 0)$ de donde $(r, \dots, r) = (0, \dots, 0)$ y por tanto $r = 0$. \square

Proposición 2.12. La función natural calculada para los submódulos U de $SpecK[\mathbf{X}]^s$, equivale a $(U : K[\mathbf{X}]^s)$.

Demostración. Como $SpecK[\mathbf{X}]^s \neq \phi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \psi : SpecK[\mathbf{X}]^s &\longrightarrow Spec(K[\mathbf{X}]/AnnK[\mathbf{X}]^s) = SpecK[\mathbf{X}] \\ U &\mapsto \psi(U) = (U : K[\mathbf{X}]^s) / AnnK[\mathbf{X}]^s \\ &= \overline{(U : K[\mathbf{X}]^s)} = (U : K[\mathbf{X}]) \end{aligned}$$

\square

Proposición 2.13. Sea I un ideal primo de $K[\mathbf{X}]$, el submódulo

$$I^s = \{\mathbf{m} \mid \mathbf{m} = (a_1, \dots, a_s), a_i \in I\}$$

es primo.

Demostración. Sea $I \in SpecK[\mathbf{X}]$, I^s es submódulo primo de $K[\mathbf{X}]^s$. Para comprobar esto, primero se verá que I^s es submódulo, luego que es propio y finalmente primo. I^s es submódulo: Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in I^s$, entonces $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_s)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_s)$ tales que $u_i, v_i \in I$ para $1 \leq i \leq s$. Así

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, \dots, u_s) + (v_1, \dots, v_s) = (u_1 + v_1, \dots, u_s + v_s) \in I^s$$

Ahora, sea $r \in K[\mathbf{X}]$, $r\mathbf{u} = r(u_1, \dots, u_s) = (ru_1, \dots, ru_s) \in I^s$. I^s es submódulo propio: Supongamos que $I^s = K[\mathbf{X}]^s$ entonces $(1, \dots, 1) \in I^s$ y así $1 \in I$ que no es cierto. I^s es submódulo primo: Sea $r \in K[\mathbf{X}]$ y $\mathbf{v} \in K[\mathbf{X}]^s$ con

$$r\mathbf{v} \in I^s \text{ y } r \notin (I^s : K[\mathbf{X}]^s)$$

entonces $r\mathbf{v} = (rv_1, \dots, rv_s)$ donde cada $rv_i \in I$. Como I es ideal primo de $K[\mathbf{X}]$ se tiene que $r \in I$ o $v_i \in I$. Si $r \in I$ entonces $r\mathbf{u} \in I^s$ para cualquier $\mathbf{u} \in K[\mathbf{X}]^s$, lo cual contradice que $r \notin (I^s : K[\mathbf{X}]^s)$. De modo que $v_i \in I$ para $1 \leq i \leq s$. Por tanto, $\mathbf{v} \in I^s$. \square

Proposición 2.14. *Si $I \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]$ entonces*

$$IK[\mathbf{X}]^s \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s \text{ y } (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) = I.$$

Demostración. Inicialmente se verá que $(IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) = I$.

Sea $r \in (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$ esto implica que $r\mathbf{m} \in IK[\mathbf{X}]^s$ para todo $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$, en particular para los elementos de la base canónica \mathbf{e}_i , esto es $r\mathbf{e}_i \in IK[\mathbf{X}]^s$, de modo que $r \in I$. La otra contención es fácil de verificar.

Ahora se probará que $IK[\mathbf{X}]^s \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$. Nótese que $IK[\mathbf{X}]^s$ es un submódulo propio, en otro caso $1 \in (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$ que no es posible, porque es un ideal propio.

Ya se tiene que $(IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$ es un ideal primo. Faltaría probar que

$$T(K[\mathbf{X}]^s / IK[\mathbf{X}]^s) = \{\bar{\mathbf{0}}\}$$

es decir, considerando a $K[\mathbf{X}]^s / IK[\mathbf{X}]^s$ como $K[\mathbf{X}] / I$ -módulo, éste resulta sin torsión. Sea

$$\bar{\mathbf{m}} \in T(K[\mathbf{X}]^s / IK[\mathbf{X}]^s)$$

entonces existe $\hat{r} \neq \hat{\mathbf{0}}$ tal que $\hat{r}\bar{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{0}}$, es decir que $r\mathbf{m} \in IK[\mathbf{X}]^s$ de donde $r(m_1, \dots, m_s) \in IK[\mathbf{X}]^s$. Así, $rm_i \in I$ y como I es un ideal primo $r \in I$ o $m_i \in I$ pero $r \notin I$ porque $\hat{r} \neq \hat{\mathbf{0}}$, de tal manera que $m_i \in I$ para $1 \leq i \leq s$, por tanto $m \in IK[\mathbf{X}]^s$ y por eso $\bar{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{0}}$. \square

Proposición 2.15. *La función natural ψ es sobreyectiva.*

Demostración. Las Proposiciones 2.13 y 2.14, permiten mostrar que la función natural es sobreyectiva. \square

3 Topología de Zariski para el espectro primo de $K[\mathbf{X}]^s$.

Proposición 3.1. *Para $K[\mathbf{X}]^s$ como $K[\mathbf{X}]$ -módulo y para cualquier $N \leq K[\mathbf{X}]^s$, se considera la variedad*

$$V(N) := \{U \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s \mid (N : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)\}$$

entonces:

- (i) $V(0) = \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ y $V(K[\mathbf{X}]^s) = \phi$
- (ii) Para cada familia $\{N_i\}_{i \in I}$ de submódulos de $K[\mathbf{X}]^s$ se cumple que $\bigcap_{i \in I} V(N_i) = V(\sum_{i \in I} (N_i : K[\mathbf{X}]^s) K[\mathbf{X}]^s)$
- (iii) Para $N_1, N_2 \leq K[\mathbf{X}]^s$ se tiene $V(N_1) \cup V(N_2) = V(N_1 \cap N_2)$.

la topología inducida τ se denomina topología de Zariski para $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ donde

$$\varsigma(K[\mathbf{X}]^s) := \{V(N) : N \leq K[\mathbf{X}]^s\}$$

es la colección de cerrados.

Proposición 3.2. Para $K[\mathbf{X}]^s$ como $K[\mathbf{X}]$ -módulo ψ es continua para la topología de Zariski.

Demostración. Sea $V^{K[\mathbf{X}]}(I)$ cerrado en $\text{Spec}K[\mathbf{X}]$,

$$V^{K[\mathbf{X}]}(I) = \{P : P \in \text{Spec}K[\mathbf{X}], I \subseteq P\}.$$

Se mostrará que $\psi^{-1}(V^{K[\mathbf{X}]}(I)) = V(IK[\mathbf{X}]^s)$.

\supseteq Considérese $U \in V(IK[\mathbf{X}]^s)$, así $U \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ y $(IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$.

Como $U \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$, $(U : K[\mathbf{X}]^s) \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]$ además $I \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$ puesto que $I \subseteq (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$.

En efecto, para $i \in I$, $iK[\mathbf{X}]^s \subseteq IK[\mathbf{X}]^s$ es decir que $i \in (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$. $\psi(U) \in V^{K[\mathbf{X}]}(I)$ pues $(U : K[\mathbf{X}]^s) \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]$ y $\bar{I} \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s) = \psi(U)$. En conclusión $U \in \psi^{-1}(V^{K[\mathbf{X}]}(I))$.

\subseteq Sea $U \in \psi^{-1}(V^{K[\mathbf{X}]}(I))$, esto implica que $U \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ y $\psi(U) \in V^{K[\mathbf{X}]}(I)$, así que mediante la definición de la función, $(U : K[\mathbf{X}]^s) \in V^{K[\mathbf{X}]}(I)$ esto es $(U : K[\mathbf{X}]^s) \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]$ y $I \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$, de donde

$$(IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$$

se puede concluir entonces que $U \in V(IK[\mathbf{X}]^s)$. \square

Proposición 3.3. $V(N) = V((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s)$

Demostración. \supseteq Sea $U \in V((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s)$ entonces

$$((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s).$$

Si $r \in (N : K[\mathbf{X}]^s)$ entonces $r\mathbf{m} \in (N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$, para todo $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$, esto es $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq (N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$. Así $r \in ((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$ y por hipótesis $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$.

\subseteq Sea $U \in V(N)$, por definición de esta variedad $(N : K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)$. Si $r \in ((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$, $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq (N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$, de aquí que $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq (U : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$, es decir, para todo $m \in K[\mathbf{X}]^s$, $r\mathbf{m} \in (U : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s$, de donde $r\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n s_i\mathbf{m}_i$ pero cada $s_i\mathbf{m}_i \in U$ pues $s_iK[\mathbf{X}]^s \subseteq U$ de modo que la suma también pertenece a U .

Por tanto, $r\mathbf{m} \in U$ y como U es submódulo primo, $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$ ó $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$, para todo $\mathbf{m} \in K[\mathbf{X}]^s$. Pero como $U \subset K[\mathbf{X}]^s$, existe $\mathbf{m}' \notin U$ luego $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$. \square

Proposición 3.4. La función natural ψ es cerrada y abierta.

Demostración. (i) ψ es cerrada: Se verá que, para todo $N \leq K[\mathbf{X}]^s$ se tiene que $\psi(V(N)) = V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))$. Teniendo en cuenta que ψ es una función continua tal que

$$\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}(I)\right) = V(IK[\mathbf{X}]^s)$$

para todo ideal I de $K[\mathbf{X}]$. Tomando $I = (N : K[\mathbf{X}]^s)$, en la Proposición 3.3 se tiene que

$$\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right) = V((N : K[\mathbf{X}]^s)K[\mathbf{X}]^s) = V(N).$$

De lo que se sigue que $\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right) = V(N)$, así que

$$\psi\left(\psi^{-1}\left(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))\right)\right) = \psi(V(N)),$$

ya que ψ es sobreyectiva (ver Proposición 2.15), se concluye que

$$V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s)) = \psi(V(N)).$$

(ii) ψ es abierta:

$$\begin{aligned} \psi(\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - V(N)) &= \\ \psi(\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - \psi^{-1}(V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s)))) &= \\ \psi(\psi^{-1}(\text{Spec}K[\mathbf{X}] - V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s)))) &= \end{aligned}$$

$\psi(\psi^{-1}(\text{Spec}K[\mathbf{X}] - V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s)))) = \text{Spec}K[\mathbf{X}] - V^{K[\mathbf{X}]}((N : K[\mathbf{X}]^s))$
pues ψ es sobreyectiva como lo muestra la Proposición 2.15. \square

Proposición 3.5. $X_r^{K[\mathbf{X}]} := \text{Spec}K[\mathbf{X}] - V(\langle r \rangle); X_r := \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - V(rK[\mathbf{X}]^s)$

Proposición 3.6. Sea $K[\mathbf{X}]^s$ considerado como $K[\mathbf{X}]$ -módulo, ψ la función natural y $r \in K[\mathbf{X}]$ entonces

$$(i) \psi^{-1}\left(X_r^{K[\mathbf{X}]}\right) = X_r$$

$$(ii) \psi(X_r) = X_r^{K[\mathbf{X}]}, \text{ porque } \psi \text{ es sobre.}$$

Demostración. (i) $\psi^{-1}\left(X_r^{K[\mathbf{X}]}\right) = \psi^{-1}(X^{K[\mathbf{X}]} - V^{K[\mathbf{X}]}(\langle r \rangle)) = \psi^{-1}(X^{K[\mathbf{X}]} - \psi^{-1}(V^{K[\mathbf{X}]}(\langle r \rangle))) = \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - \psi^{-1}(V^{K[\mathbf{X}]}(\langle r \rangle)) = \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - V(\langle r \rangle K[\mathbf{X}]^s) = \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - V(rK[\mathbf{X}]^s) = X_r.$

(ii) Como $\psi^{-1}(X_r^{K[\mathbf{X}]}) = X_r$, $\psi(\psi^{-1}(X_r^{K[\mathbf{X}]})) \subseteq X_r^{K[\mathbf{X}]}$, así que $\psi(X_r) \subseteq X_r^{K[\mathbf{X}]}$. Como ψ es sobreyectiva, $\psi(\psi^{-1}(X_r^{K[\mathbf{X}]})) = X_r^{K[\mathbf{X}]}$. \square

Proposición 3.7. Para $K[\mathbf{X}]^s$ como $K[\mathbf{X}]$ -módulo, $B = \{X_r\}_{r \in K[\mathbf{X}]}$ es una base para $K[\mathbf{X}]^s$ donde $X_r := \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - V(rK[\mathbf{X}]^s)$.

Demostración. Como $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s \neq \emptyset$, considérese H un abierto no vacío de $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$. Como

$$\varsigma(K[\mathbf{X}]^s) = \{V(N) = V(INK[\mathbf{X}]^s) : I \leq K[\mathbf{X}]\}$$

$H = \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - V(INK[\mathbf{X}]^s)$ para algún ideal I de $K[\mathbf{X}]$. Por la Proposición 3.3 y por ser τ topología se tiene que

$$\begin{aligned} V(IM) &= V\left(\sum_{a_i \in I} a_i K[\mathbf{X}]^s\right) = V\left(\left(\sum_{a_i \in I} a_i K[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s\right) K[\mathbf{X}]^s\right) = \\ &= V\left(\sum_{a_i \in I} (a_i K[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s) K[\mathbf{X}]^s\right) = \bigcap_{a_i \in I} V(a_i K[\mathbf{X}]^s) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} H &= \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - \bigcap_{a_i \in I} V(a_i K[\mathbf{X}]^s) \\ &= \bigcup_{a_i \in I} (\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - V(a_i K[\mathbf{X}]^s)) = \bigcup_{a_i \in I} X_{a_i} \end{aligned}$$

Por tanto, B forma una base para la topología de Zariski. \square

Nota 3.8. $X_r^{K[\mathbf{X}]}$ es un espacio compacto.

Proposición 3.9. X_r es compacto para cada $r \in K[\mathbf{X}]$, en particular $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ es compacto.

Demostración. Tomando X_r un abierto básico de $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$, sea

$$\{X_{r_\lambda}, r_\lambda \in K[\mathbf{X}] : \lambda \in \Lambda\}$$

un cubrimiento abierto básico para X_r , es decir, $X_r \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_{r_\lambda}$. Como ψ es sobreyectiva (ver Proposición 2.15) $\psi(X_r) = X_r^{K[\mathbf{X}]}$,

$$X_r^{K[\mathbf{X}]} = \psi(X_r) \subseteq \psi\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_{r_\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]}; \text{ así } X_r^{K[\mathbf{X}]} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]}.$$

Como $X_r^{K[\mathbf{X}]}$ es compacto, así que existe $\Lambda' \subseteq \Lambda$, Λ' finito tal que $X_r^{K[\mathbf{X}]} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]}$. Por lo tanto,

$$X_r = \psi^{-1} \left(X_r^{K[\mathbf{X}]} \right) \subseteq \psi^{-1} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]} \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} \psi^{-1} \left(X_{r_\lambda}^{K[\mathbf{X}]} \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} X_{r_\lambda}$$

Tomando $r = 1$, $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ es compacto. \square

Nota 3.10. Para cualquier anillo R se sabe que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) X^R no es conexo.
- (ii) $R \cong R_1 \times R_2$, siendo R_1, R_2 anillos no nulos.
- (iii) R contiene idempotentes no triviales.

Proposición 3.11. $\text{Spec}K[\mathbf{X}]$ es conexo.

Demostración. Teniendo en cuenta la observación anterior, como K es un cuerpo, $K[\mathbf{X}]$ no contiene otros idempotentes distintos del 0 y el 1, porque es un anillo que no tiene divisores de cero. Se tiene entonces que $\text{Spec}K[\mathbf{X}]$ es conexo. \square

Proposición 3.12. $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ no es conexo. Entonces $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ tiene al menos un subconjunto propio Y no vacío que es simultáneamente abierto y cerrado. $\psi(Y) \subseteq \text{Spec}K[\mathbf{X}]$, $\psi(Y)$ es abierto y cerrado, pero esto no puede ocurrir porque en la proposición 3.11 se probó que $\text{Spec}K[\mathbf{X}]$ es conexo. \square

Proposición 3.13. La función natural ψ no es inyectiva.

Demostración. Como $K[\mathbf{X}]^s$ es finitamente generado, entonces tiene un submódulo maximal U que es primo, sea $I := (U : K[\mathbf{X}]^s)$ su cociente. Además, por la Proposición 2.14, $IK[\mathbf{X}]^s$ también es submódulo primo y su cociente coincide con I , esto es, $I = (IK[\mathbf{X}]^s : K[\mathbf{X}]^s)$. Esto implica que

$$\psi(U) = \psi(IK[\mathbf{X}]^s)$$

falta ver que $U \neq IK[\mathbf{X}]^s$.

Supongamos que $U = IK[\mathbf{X}]^s$. $IK[\mathbf{X}]^s \subseteq I^s$, donde $I^s = \{(a_1, \dots, a_s) \mid a_i \in I\}$. En efecto, si $I = \langle h_1, \dots, h_s \rangle$, entonces, un elemento $\mathbf{m} \in IK[\mathbf{X}]^s$ es de la forma

$$\mathbf{m} = \beta_1(\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n)(1, 0, \dots, 0) + \dots + \beta_s(\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n)(0, 0, \dots, 1)$$

cada $\beta_j \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \in I$ y por esto $\mathbf{m} \in I^s$.

Pero como $U = IK[\mathbf{X}]^s$, $IK[\mathbf{X}]^s$ adquiere la calidad de maximal y por eso $U = I^s$, esto implica que I^s es también maximal, sin embargo

$$U = \underbrace{(I, \dots, I, I)}_{s\text{-componentes}} \subsetneq \underbrace{(I, \dots, I, K[\mathbf{X}])}_{s\text{-componentes}}$$

hecho que contradice la maximalidad de I^s . \square

Definición 3.14. Sea Y un subconjunto de $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$. Se denota con $\vartheta(Y)$ la intersección de todos los elementos de Y , y la clausura de Y en $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ para la topología de Zariski por $\text{cl}(Y)$.

Proposición 3.15. Si $Y \subseteq \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$, $V(\vartheta(Y)) = \text{cl}(Y)$. Además, Y es cerrado si y sólo si $V(\vartheta(Y)) = Y$.

Demostración. Se mostrará que $Y \subseteq V(\vartheta(Y))$, y que $V(\vartheta(Y))$ es el más pequeño de los cerrados que contienen a Y . Sea $K \in Y$ entonces

$$\vartheta(Y) = \bigcap_{L \in Y} L \subseteq K \text{ por tanto } K \in V(\vartheta(Y)).$$

Ahora, sea $V(N)$ cualquier subconjunto cerrado de $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ que contiene a Y es decir $Y \subseteq V(N)$ esto implica que para todo $K \in Y$, $K \in V(N)$, así que para todo $K \in Y$ $(N : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (K : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$, en consecuencia

$$(N : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) \subseteq \left(\bigcap_{K \in Y} K : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s \right).$$

En efecto, si $r \in (N : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$, entonces $r \in (K : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$ para todo $K \in Y$, de donde $r \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s \subseteq K$ para todo $K \in Y$, por esto

$$r \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s \subseteq \bigcap_{K \in Y} K \text{ y así } r \in \left(\bigcap_{K \in Y} K : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s \right)$$

$(N : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (\vartheta(Y) : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$ entonces $V(\vartheta(Y)) \subseteq V(N)$ puesto que para todo $Q \in V(\vartheta(Y))$ por definición se tiene que

$$(\vartheta(Y) : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (Q : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$$

de donde $(N : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (\vartheta(Y) : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (Q : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$.

Por tanto $Y \subseteq V(\vartheta(Y)) \subseteq V(N)$, de donde el cerrado más pequeño que contiene a Y es $V(\vartheta(Y))$. Por tanto, $V(\vartheta(Y)) = \text{cl}(Y)$.

Finalmente, si Y es cerrado $Y = \text{cl}(Y)$, entonces $Y = \text{cl}(Y) = V(\vartheta(Y))$. \square

Proposición 3.16. $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ no es un espacio T_0 .

Demostración. Como la función natural ψ no es inyectiva (ver Proposición 3.13), existen U y L que pertenecen a $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ tales que $\psi(U) = \psi(L)$ esto es $(U : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) = (L : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$. Ahora, supongamos que $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ es T_0 , entonces existe un abierto W tal que $U \in W$ pero $L \in \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W$. Según la Proposición 3.15

$$\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W = \text{cl}(\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W) = V(\vartheta(\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W)),$$

por esto $L \in V(\vartheta(\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W))$ de donde

$$(\vartheta(\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W) : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (L : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$$

lo que implica que

$$(\vartheta(\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W) : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) \subseteq (U : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$$

Así, $U \in V(\vartheta(\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W)) = \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s - W$ que es una contradicción. \square

Proposición 3.17. *$\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ no es un espacio T_1 .*

Demostración. Si el espacio fuera T_1 sería T_0 lo cual no es cierto. \square

Proposición 3.18. *$\text{Max}K[\mathbf{X}]^s \neq \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$.*

Demostración. Supongamos que son iguales. Como la función natural ψ no es inyectiva, existen U y L distintos, que pertenecen a $\text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$ tales que $\psi(U) = \psi(L)$ esto es $(U : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s) = (L : \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s)$. Por otra parte, $U \cap L$ es primo, ya que si $r \in K[\mathbf{X}]$ y $m \in K[\mathbf{X}]^s$ tales que $r\mathbf{m} \in U \cap L$ y $r \notin (U \cap L : K[\mathbf{X}]^s)$ entonces $r\mathbf{m} \in U$ y $r\mathbf{m} \in L$, esto es,

$$[r \in (U : K[\mathbf{X}]^s) \text{ ó } \mathbf{m} \in U] \text{ y } [r \in (L : K[\mathbf{X}]^s) \text{ ó } \mathbf{m} \in L]$$

de manera que se tienen las siguientes posibilidades:

- (i) Si $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$ y $r \in (L : K[\mathbf{X}]^s)$, $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq U$ y $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq L$ entonces $rK[\mathbf{X}]^s \subseteq U \cap L$ por tanto $r \in (U \cap L : K[\mathbf{X}]^s)$, que contradice una de las hipótesis.
- (ii) Si $r \in (L : K[\mathbf{X}]^s)$ y $\mathbf{m} \in U$ entonces $r \in (L : K[\mathbf{X}]^s) = (U : K[\mathbf{X}]^s) = (U \cap L : K[\mathbf{X}]^s)$, que también es una contradicción.
- (iii) Si $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s)$ y $\mathbf{m} \in L$ se tiene que $r \in (U : K[\mathbf{X}]^s) = (L : K[\mathbf{X}]^s) = (U \cap L : M)$, siendo contrario a lo supuesto.
- (iv) Si $\mathbf{m} \in U$ y $\mathbf{m} \in L$, entonces $\mathbf{m} \in U \cap L$.

De modo que $U \cap L$ es un submódulo primo, además $U \cap L \subseteq U$ y $U \cap L \subseteq L$ pero como $\text{Max}K[\mathbf{X}]^s = \text{Spec}K[\mathbf{X}]^s$, $U \cap L = U = L$ que es una contradicción. \square

Definición 3.19. *Por conjunto degenerado se entenderá que es un conjunto vacío o unitario y por $A \vdash B$, se entenderá que existe un abierto G tal que $A \subseteq G$ y $G \cap B = \phi$.*

Definición 3.20. *Un espacio topológico (X, τ) es:*

- (i) T_{UD} -espacio si y sólo si $\forall x \in X$, $\{x\}'$ es unión de cerrados disyuntos.
- (ii) T_D -espacio si y sólo si $\forall x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado.
- (iii) T_{DD} -espacio si y sólo si es T_D -espacio y $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\{x\}' \cap \{y\}' = \emptyset$.
- (iv) T_F -espacio si y sólo si $\forall x \in X$, y cualquier subconjunto finito F de X , tal que, $x \notin F$, se tiene que $x \vdash F$ ó $F \vdash x$.
- (v) T_{FF} -espacio si y sólo si $\forall F_1, F_2 \subseteq X$, finitos y $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, se tiene que, $F_1 \vdash F_2$ ó $F_2 \vdash F_1$.
- (vi) T_Y -espacio si y sólo si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, se tiene que $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ es degenerado.
- (vii) T_{YS} -espacio si y sólo si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, se tiene que $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ es \emptyset ó $\{x\}$ ó $\{y\}$.

En [2] se puede consultar el siguiente diagrama de implicaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 T_1 & \longrightarrow & T_{DD} & \longrightarrow & T_D & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & T_{YS} & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 T_{FF} & \longrightarrow & T_Y & \longrightarrow & T_F & \longrightarrow & T_{UD} & \longrightarrow & T_0
 \end{array}$$

Proposición 3.21. *SpecK $[\mathbf{X}]^s$ no satisface ninguno de los axiomas de separación entre T_0 y T_1 .*

Demostración. Si *SpecK $[\mathbf{X}]^s$* llegara a satisfacer alguno los axiomas de separación entre T_0 y T_1 , según el diagrama de implicaciones que se exhibió anteriormente, también sería un espacio T_0 , sin embargo, como se probó en la Proposición 3.16, esto no es cierto. \square

4 Ejemplos

Se presentan a continuación algunos ejemplos considerando $(\mathbb{Q}[x, y])^2$ como $\mathbb{Q}[x, y]$ -módulo. Para hacer algunos de los cálculos correspondientes se ha empleado CoCoA.

Ejemplo 4.1. *Considere los vectores $\mathbf{f}_1 = (0, x^3)$, $\mathbf{f}_2 = (y - x^2, 0)$, $\mathbf{f}_3 = (x^3 + 1, x)$,*

$\mathbf{f}_4 = (0, y - x^2) \in (\mathbb{Q}[x, y])^2$. Se usará el orden TOP sobre $(\mathbb{Q}[x, y])^2$ con $\mathbf{e}_1 > \mathbf{e}_2$ y lex sobre $\mathbb{Q}[x, y]$ con $x > y$. Siendo $N = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$, N no resulta un submódulo primo.

Ejemplo 4.2. Considere los vectores $\mathbf{f}_1 = (0, x^3)$, $\mathbf{f}_2 = (y - x^2, 0)$, $\mathbf{f}_3 = (x^3 + 1, x)$, $\mathbf{f}_4 = (0, y - x^2)$, $\mathbf{f}_5 = (x^2 - x + 1, 0)$, $\mathbf{f}_6 = (0, x^2 - x + 1)$ que pertenecen al módulo libre $(\mathbb{Q}[x, y])^2$. Se usará el orden POT sobre $(\mathbb{Q}[x, y])^2$ con $\mathbf{e}_1 > \mathbf{e}_2$ y lex sobre $\mathbb{Q}[x, y]$ con $y > x$. Siendo $N = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5, \mathbf{f}_6 \rangle$, N es un submódulo primo.

Ejemplo 4.3. $\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \rangle (\mathbb{Q}[x, y])^2$ es un submódulo primo de $(\mathbb{Q}[x, y])^2$.

Teniendo en cuenta que $\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \rangle$ es un ideal primo según se mostró en el Ejemplo 4.2 y además por la Proposición 2.15,

$$\left(\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \rangle (\mathbb{Q}[x, y])^2 : (\mathbb{Q}[x, y])^2 \right) = \langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \rangle$$

Nótese que, $\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \rangle (\mathbb{Q}[x, y])^2$ es igual al submódulo

$$\langle (y - x + 1, 0), (0, y - x + 1), (x^2 - x + 1, 0), (0, x^2 - x + 1) \rangle$$

(\supseteq) Un elemento $\mathbf{m} \in \langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \rangle (\mathbb{Q}[x, y])^2$ es de la forma,

$$u_1(f_1(y - x + 1) + f_2(x^2 - x + 1))(1, 0) + u_2(f_1(y - x + 1) + f_2(x^2 - x + 1))(0, 1)$$

donde $u_1, u_2, f_1, f_2 \in \mathbb{Q}[x, y]$.

De manera que, $(y - x + 1, 0)$ se obtiene con $u_1 = f_1 = 1$, $u_2 = f_2 = 0$, $(0, y - x + 1)$ se obtiene con $u_2 = f_1 = 1$, $u_1 = f_2 = 0$, $(x^2 - x + 1, 0)$ se obtiene con $u_1 = f_2 = 1$, $u_2 = f_1 = 0$, $(0, x^2 - x + 1)$ se obtiene con $u_2 = f_2 = 1$, $u_1 = f_1 = 0$.

$$(\subseteq) u_1(f_1(y - x + 1) + f_2(x^2 - x + 1))(1, 0) + u_2(f_1(y - x + 1) + f_2(x^2 - x + 1))(0, 1) =$$

$$(u_1 f_1(y - x + 1), 0) + (u_1 f_2(x^2 - x + 1), 0) + (0, u_2 f_1(y - x + 1)) + (0, u_2 f_2(x^2 - x + 1))$$

pero el término de la derecha pertenece a

$$\langle (y - x + 1, 0), (0, y - x + 1), (x^2 - x + 1, 0), (0, x^2 - x + 1) \rangle$$

Ejemplo 4.4. Los submódulos primos de los Ejemplos 4.2 y 4.3 tienen el mismo cociente sin embargo son submódulos diferentes.

Con ayuda de CoCoA se calcularon las Bases de Gröbner Reducidas para los submódulos primos de los Ejemplos 4.2 y 4.3, como aparece a continuación:

considerando como antes, el orden POT sobre $(\mathbb{Q}[x, y])^2$ con $e_1 > e_2$ y lex sobre $\mathbb{Q}[x, y]$ con $y > x$. Para N definido por

$$\langle (0, x^3), (y - x^2, 0), (x^3 + 1, x), (0, y - x^2), (x^2 - x + 1, 0), (0, x^2 - x + 1) \rangle$$

la base reducida es

$$G_1 = \{(x^2 - x + 1, 0), (0, 1), (y - x + 1, 0)\}.$$

Ahora, para $\langle y - x + 1, x^2 - x + 1 \rangle (\mathbb{Q}[x, y])^2$ la base reducida es

$$G_2 = \{(0, y - x + 1), (y - x + 1, 0), (0, x^2 - x + 1), (x^2 - x + 1, 0)\}.$$

De nuevo con ayuda de CoCoA, se estudió si el vector $(0, 1)$ pertenece o no a G_2 , concluyendo que esto no ocurre. De tal forma que los dos submódulos son diferentes porque tienen sus bases reducidas diferentes.

Bibliografía

- [1] Adams, W., & Loustanaunau, P.(1994). An Introduction to Gröbner Bases. Providence, Rhode Island, USA: American Mathematical Society.
- [2] Avila, J. (2005). *Spec(R)* y Axiomas de separación entre T_0 y T_1 . Divulgaciones Matemáticas.
- [3] Barragán, S. (2001). La Condición de Noether para el espectro primo de un módulo sobre un anillo conmutativo. Universidad Nacional de Colombia. Tesis de Maestría.
- [4] Gianni, P., Trager, B., & Zacharias, G. (1988). Gröbner Bases and Primary Decomposition of Polinomial Ideals. *Journal of Symbolic Computation*, 149-167.
- [5] Lu, C. P. (1984). Prime Submodules of Modules. *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli*, 61-69.
- [6] McCasland, R., Moore, M., & Smith, P. (1997). On the spectrum of a module over commutative ring. *Communications in Algebra*, 79-103.
- [7] Muñoz, J. (2008). Introducción a la Topología. Bogotá, Colombia. Universidad Nacional de Colombia.
- [8] Rutman, E. (1992). Gröbner Bases and Primary Decomposition of Modules. *Journal of Symbolic Computation*, 483-503.

Sandra Patricia Barragán Moreno.
Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.

e-mail: sandra.barragan@utadeo.edu.co
cardinal181@gmail.com

Invariant points under strict contractive conditions.

Ravindra K. Bisht and Aditya Harbola.

Abstract. This paper is intended to consider a new approach for obtaining common fixed points under strict contractive conditions in metric spaces without assuming continuity or completeness (or closedness) of the range of any one of the involved maps. The results proved by us can be extended to the nonexpansive or Lipschitz type mapping pairs. Our results substantially improve the results of Pant [Discontinuity and fixed points, *J. Math. Anal. Appl.* 240, (1999), 284-289], Imdad et al. [Coincidence fixed points in symmetric spaces under strict contractions, *J. Math. Anal. Appl.* 320, (2006), 352-360], Jin-xuan and Yang [Common fixed point theorems under strict contractive conditions in Menger spaces, *Nonlinear Analysis* 70, (2009), 184-193] and Pant and Pant [Common fixed points under strict contractive conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 248,(2000), 327-332].

Resumen. Este artículo tiene la intención de considerar un nuevo enfoque para la obtención de puntos fijos comunes bajo estrictas condiciones contractivas en espacios métricos sin asumir la continuidad o integridad (o cercanía) de la gama de cualquiera de los mapas implicados. Los resultados obtenidos por nosotros se puede extender a los mapas de tipo no expansivos o Lipschitz. Nuestros resultados mejoran sustancialmente los resultados de Pant [Discontinuity and fixed points, *J. Math. Anal. Appl.* 240, (1999), 284-289], Imdad et al. [Coincidence fixed points in symmetric spaces under strict contractions, *J. Math. Anal. Appl.* 320, (2006), 352-360], Jin-xuan and Yang [Common fixed point theorems under strict contractive conditions in Menger spaces, *Nonlinear Analysis* 70, (2009), 184-193] y Pant y Pant [Common fixed points under strict contractive conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 248,(2000), 327-332].

Key words and phrases: Fixed point theorems, conditional reciprocal continuity, f -compatible and g -compatible.

2000 Mathematics Subject Classifications: Primary 54H25, Secondary 47H10.

1. Introduction:

In metric fixed point theory, strict contractive conditions constitute a very important class of mappings and include contraction mappings as their subclass. It may be observed that strict contractive conditions do not ensure the existence of common fixed points unless some strong condition is assumed either on the space or on the mappings. In such cases either the space is taken to be compact or some sequence of iterates is assumed to be Cauchy sequence. The study of common fixed points of strict contractive conditions using noncompatibility was initiated by Pant [9]. Motivated by Pant [9] researchers of this domain obtained common fixed point results for strict contractive conditions under generalized metric spaces [1, 3, 7, 10, 11, 16]. The significance of this paper lies in the fact that we can obtain fixed point theorems for conditionally reciprocally continuous mappings under generalized strict contractive conditions without assuming any strong conditions on the space or on the mappings.

The question of continuity of contractive maps in general and of continuity at fixed points in particular, emerged with the publication of two research papers by R. Kannan [5, 6] in 1968 and 1969 respectively. These papers generated unprecedented interest in the fixed point theory of contractive maps which, in turn, resulted in vigorous research on the existence of fixed points of contractive maps and the question of continuity of contractive maps at their fixed points turned into an open question.

This problem was settled in the affirmative by Pant [8] in 1998 when he introduced the notion of reciprocal continuity and as an application of this concept obtained the first result that established a situation in which a collection of mappings has a fixed point which is a point of discontinuity for all the mappings.

Definition 1.1. [8]. Two selfmappings f and g of a metric space (X, d) are called reciprocally continuous iff $\lim_n fgx_n = ft$ and $\lim_n gfx_n = gt$, whenever $\{x_n\}$ is a sequence such that $\lim_n fx_n = \lim_n gx_n = t$ for some t in X .

In the setting of common fixed point theorems for compatible maps satisfying contractive conditions, continuity of one of the mappings f and g implies their reciprocal continuity but not conversely [8].

More recently, Pant and Bisht [10] further generalized reciprocal continuity by introducing the new concept of conditional reciprocal continuity, which turns out to be the necessary condition for the existence of common fixed points. This notion is applicable to compatible as well as noncompatible mappings.

Definition 1.2. [10]. Two selfmappings f and g of a metric space (X, d) are called conditionally reciprocally continuous (CRC) iff whenever the set of sequences $\{x_n\}$ satisfying $\lim_n fx_n = \lim_n gx_n$ is nonempty, there exists a sequence $\{y_n\}$ satisfying $\lim_n fy_n = \lim_n gy_n = t$ (say) for some t in X such that $\lim_n fgy_n = ft$ and $\lim_n gfy_n = gt$.

If f and g are reciprocally continuous then they are obviously conditionally reciprocally continuous but, as shown in Example 2,1 below, the converse is not true.

In 1986, Jungck [4] generalized the notion of weakly commuting maps [15] by introducing the concept of compatible maps.

Definition 1.3. [4]. Two selfmaps f and g of a metric space (X, d) are called compatible iff $\lim_n d(fgx_n, gfx_n) = 0$, whenever $\{x_n\}$ is a sequence in X such that $\lim_n fx_n = \lim_n gx_n = t$ for some t in X .

The definition of compatibility implies that the mappings f and g will be noncompatible if there exists a sequence $\{x_n\}$ in X such that for some t in X but $\lim_n d(fgx_n, gfx_n)$ is either non zero or nonexistent.

In a recent work, Aamri and Moutawakil [1] introduced the idea of (E.A.) property, which is more general than noncompatible mappings.

Definition 1.4. [1]. A pair (f, g) of selfmappings of a metric space (X, d) is said to satisfy the property (E.A.) if there exists a sequence $\{x_n\}$ in X such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gx_n = t, \quad \text{for some } t \in X.$$

In 1997, Pathak et al. [13] further generalized the notion of weakly commuting maps [15] by introducing two new independent concepts of R - weakly commuting of type (A_f) and (A_g) .

Definition 1.5. [13] Two selfmappings f and g of a metric space (X, d) are called R -weakly commuting of type (A_f) if there exists some positive real number R such that $d(fgx, ggx) \leq Rd(fx, gx)$ for all x in X .

Definition 1.6. [13] Two selfmappings f and g of a metric space (X, d) are called R -weakly commuting of type (A_g) if there exists some positive real number R such that $d(ffx, gfx) \leq Rd(fx, gx)$ for all x in X .

On the other hand in the same year 1997, Pathak and Khan [12] further introduced some interesting generalized noncommuting conditions analogous

to the notion of compatibility by defining the notions of f -compatibility and g -compatibility.

Definition 1.7. [12]. Two selfmaps f and g of a metric space (X, d) are called f -compatible iff $\lim_n d(fgx_n, ggx_n) = 0$, whenever $\{x_n\}$ is a sequence in X such that $\lim_n fx_n = \lim_n gx_n = t$ for some t in X .

Definition 1.8. [12]. Two selfmaps f and g of a metric space (X, d) are called g -compatible iff $\lim_n d(ffx_n, gffx_n) = 0$, whenever $\{x_n\}$ is a sequence in X such that $\lim_n fx_n = \lim_n gx_n = t$ for some t in X .

It may be observed that f -compatibility or g -compatibility implies R -weak commutativity of type (A_f) or (A_g) respectively, but the converse is not true in general. It may also be noted that both compatible and noncompatible mappings can be R -weakly commuting of type (A_g) or (A_f) [9].

The question whether there exists a contractive definition which is strong enough to generate a fixed point but which does not force the map to be continuous at the fixed point was reiterated by Rhoades in [14] as an existing open problem. Pant [8, 9], Pant and Pant [11], Pant and Bisht [10], Imdad et al.[3] and Singh et al.[16] have provided some solutions to this problem. It is of worth to note that in all the results proved by us, none of the mappings under consideration has been assumed continuous. In fact, the mappings become discontinuous at the fixed point. We, thus, also provide one more answer to the open problem of Rhoades [14].

2. Main Results:

Theorem 2.1.

Let f and g be conditionally reciprocally continuous noncompatible selfmappings of a metric space (X, d) satisfying

$$(I). \quad fX \subseteq gX$$

$$(II).$$

$$d(fx, fy) < \max \{d(gx, gy), [d(fx, gx) + d(fy, gy)]/2, [d(fx, gy) + d(fy, gx)]/2\}$$

whenever the right hand side is positive. If f and g are either g -compatible or f -compatible then f and g have a unique common fixed point.

Proof:

Since f and g are noncompatible maps, there exists a sequence $\{x_n\}$ in X such that $fx_n \rightarrow t$ and $gx_n \rightarrow t$ for some t in X but either $\lim_n d(fgx_n, gfx_n) \neq 0$ or the limit does not exist. Since f and g are conditionally reciprocally continuous and $fx_n \rightarrow t, gx_n \rightarrow t$ there exists a sequence $\{y_n\}$ satisfying $\lim_n fy_n = \lim_n gy_n = u$ such that $\lim_n fgy_n = fu$ and $\lim_n gfy_n = gu$. Since $fX \subseteq gX$, for each y_n there exists z_n in X such that $fy_n = gz_n$. Thus $fy_n \rightarrow u, gy_n \rightarrow u$ and $gz_n \rightarrow u$ as $n \rightarrow \infty$. By virtue of this and using (ii) we obtain $fz_n \rightarrow u$. Therefore, we have

$$fy_n = gz_n \rightarrow u, gy_n \rightarrow u, fz_n \rightarrow u. \quad (1)$$

Now, suppose that f and g are g -compatible. Then $\lim_n d(ffy_n, gfy_n) = 0$, i.e., $ffy_n \rightarrow gu$. We assert that $fu = gu$. If not, using (ii) we get $d(ffy_n, fu) < \max \{d(gfy_n, gu), [d(ffy_n, gfy_n) + d(fu, gu)]/2, [d(ffy_n, gu) + d(fu, gfy_n)]/2\}$. On letting $n \rightarrow \infty$ this yields $d(gu, fu) \leq \frac{1}{2}d(fu, gu)$, a contradiction unless $fu = gu$. Since g -compatibility implies commutativity at coincidence points, i.e., $fgu = gfu$ and, hence $ffu = fgu = gfu = ggu$. If $fu \neq ffu$ then by using (ii), we get $d(ffu, fu) < \max \{d(gfu, gu), [d(ffu, gfu) + d(fu, gu)]/2, [d(ffu, gu) + d(fu, gfu)]/2\} = d(ffu, fu)$, a contradiction. Hence $fu = ffu = gfu$ and fu is a common fixed point of f and g .

Finally, suppose that f and g are f -compatible. Then $\lim_n d(fgz_n, ggz_n) = 0$. Using $ggz_n = gfy_n \rightarrow gu$, this yields $fgz_n \rightarrow gu$. If $fu \neq gu$, the inequality $d(fgz_n, fu) < \max \{d(ggz_n, gu), [d(fgz_n, ggz_n) + d(fu, gu)]/2, [d(fgz_n, gu) + d(fu, ggz_n)]/2\}$, on letting $n \rightarrow \infty$ we get $d(gu, fu) \leq \frac{1}{2}d(fu, gu)$, a contradiction. This implies $fu = gu$. Again, f -compatibility of f and g implies that $fgu = gfu$ and, hence, $ffu = fgu = gfu = ggu$. If $fu \neq ffu$ then by using (ii), we get $d(ffu, fu) < \max \{d(gfu, gu), [d(ffu, gfu) + d(fu, gu)]/2, [d(ffu, gu) + d(fu, gfu)]/2\} = d(ffu, fu)$, a contradiction. Hence $fu = ffu = gfu$ and fu is a common fixed point of f and g . This completes the proof of the theorem.

Theorem 2.1 can be generalized further if we use the property (E.A.) instead of the notion of noncompatibility. We do so in our next theorem.

Theorem 2.2.

Let f and g be conditionally reciprocally continuous selfmappings of a metric space (X, d) satisfying the property (E.A.) and

(I). $fX \subseteq gX$

(II).

$$d(fx, fy) < \max \{d(gx, gy), [d(fx, gx) + d(fy, gy)]/2, [d(fx, gy) + d(fy, gx)]/2\},$$

whenever the right hand side is positive. If f and g are either g -compatible or f -compatible then f and g have a unique common fixed point.

Proof:

Since f and g satisfy the property (E.A.), there exists a sequence $\{x_n\}$ in X such that $fx_n \rightarrow t$ and $gx_n \rightarrow t$ for some t in X . Since f and g are conditionally reciprocally continuous and $fx_n \rightarrow t, gx_n \rightarrow t$ there exists a sequence $\{y_n\}$ satisfying $\lim_n fy_n = \lim_n gy_n = u$ such that $\lim_n fgy_n = fu$ and $\lim_n gfy_n = gu$. Rest of the proof follows on the same lines as in the corresponding part of the Theorem 2.1.

The next example illustrates the above theorem.

Example 2.1.

Let $X = [2, 20]$ and d be the usual metric on X . Define $f, g : X \rightarrow X$ as follows

$$\begin{aligned} fx &= 2 \text{ if } x = 2 \text{ or } x > 5, \quad fx = 6 \text{ if } 2 < x \leq 5, \\ g2 &= 2, \quad gx = 12, \text{ if } 2 < x \leq 5, \quad gx = \frac{(x+1)}{3} \text{ if } x > 5. \end{aligned}$$

Then f and g satisfy all the conditions of Theorem 2,2 and have a common fixed point at $x = 2$. It can be verified in this example that f and g satisfy the condition (ii). Furthermore, f and g are g -compatible. It can also be noted that f and g are conditionally reciprocally continuous. To see this, let $\{x_n\}$ be the constant sequence given by $x_n = 2$. Then $fx_n \rightarrow 2, gx_n \rightarrow 2$. Also $fgy_n \rightarrow 2 = f2$ and $gfy_n \rightarrow 2 = g2$. Hence f and g are conditionally reciprocally continuous. It is also obvious that f and g are not reciprocally continuous but satisfy (E. A.) property. To see this, let $\{y_n\}$ be a sequence in X given by $y_n = 5 + \epsilon_n$ where $\epsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Then $fy_n \rightarrow 2, gy_n = (2 + \frac{\epsilon_n}{3}) \rightarrow 2, \lim_n fgy_n = f(2 + \frac{\epsilon_n}{3}) = 6 \neq f2$ and $\lim_n gfy_n = g2 = 2$. Thus $\lim_n gfy_n = g2$ but $\lim_n fgy_n \neq f2$. Hence f and g are not reciprocally continuous mappings but satisfy (E. A.) property.

As a direct consequence of the above theorem we get the following corollary.

Corollary 2.1.

Let f and g be reciprocally continuous selfmappings of a metric space (X, d) satisfying

- (i). $fX \subseteq gX$

(II).
 $d(fx, fy) < \max \{d(gx, gy), [d(fx, gx) + d(fy, gy)]/2, [d(fx, gy) + d(fy, gx)]/2\}$,

whenever the right hand side is positive. Suppose f and g satisfy the property (E.A.). If f and g are either g -compatible or f -compatible then f and g have a unique common fixed point.

The corollary follows from the main theorem since reciprocally continuous maps are conditionally reciprocally continuous.

The next theorem demonstrates the applicability of conditional reciprocal continuity and noncompatibility in diverse settings by establishing the existence of fixed point under the Lipschitz type analogue of a strict contractive condition.

Theorem 2.3.

Let f and g be conditionally reciprocally continuous noncompatible selfmappings of a metric space (X, d) satisfying

(I). $fX \subseteq gX$

(II).
 $d(fx, fy) < \max \{d(gx, gy), k[d(fx, gx) + d(fy, gy)]/2, [d(fx, gy) + d(fy, gx)]/2\}$,
 $1 \leq k < 2$,

whenever the right hand side is positive. If f and g are either g -compatible or f -compatible then f and g have a unique common fixed point.

Proof:

Since f and g are noncompatible maps, there exists a sequence $\{x_n\}$ in X such that $fx_n \rightarrow t$ and $gx_n \rightarrow t$ for some t in X but either $\lim_n d(fgx_n, gfx_n) \neq 0$ or the limit does not exist. Since f and g are conditionally reciprocally continuous and $fx_n = gx_n \rightarrow t$ there exists a sequence $\{y_n\}$ satisfying $\lim_n fy_n = \lim_n gy_n = u$ such that $\lim_n fgy_n = fu$ and $\lim_n gfy_n = gu$. Since $fX \subseteq gX$, for each y_n there exists z_n in X such that $fy_n = gz_n$. Thus $fy_n \rightarrow u$, $gy_n \rightarrow u$ and $gz_n \rightarrow u$ as $n \rightarrow \infty$. By virtue of this and using (ii) we obtain $fz_n \rightarrow u$. Therefore, we have

$$fy_n = gz_n \rightarrow u, gy_n \rightarrow u, fz_n \rightarrow u. \tag{2}$$

Now, suppose that f and g are g -compatible. Then $\lim_n d(ffy_n, gfy_n) = 0$, i.e., $ffy_n \rightarrow gu$. We assert that $fu = gu$. If not, using (ii) we get $d(ffy_n, fu) < \max \{d(gfy_n, gu), k[d(ffy_n, gfy_n) + d(fu, gu)]/2, [d(ffy_n, gu) + d(fu, gfy_n)]/2\}$. On letting $n \rightarrow \infty$ this yields $d(gu, fu) \leq \frac{k}{2}d(fu, gu)$, a contradiction unless

$fu = gu$. Since g -compatibility implies commutativity at coincidence points, i.e., $fgu = gfu$ and, hence $ffu = fgu = gfu = ggu$. If $fu \neq ffu$ then by using (ii), we get $d(ffu, fu) < \max \{d(gfu, gu), k[d(ffu, gfu) + d(fu, gu)]/2, [d(ffu, gu) + d(fu, gfu)]/2\} = d(ffu, fu)$, a contradiction. Hence $fu = ffu = gfu$ and fu is a common fixed point of f and g .

Finally, suppose that f and g are f -compatible. Then $\lim_n d(fgz_n, ggz_n) = 0$. Using $ggz_n = gfy_n \rightarrow gu$, this yields $fgz_n \rightarrow gu$. If $fu \neq gu$, the inequality $d(fgz_n, fu) < \max \{d(ggz_n, gu), k[d(fgz_n, ggz_n) + d(fu, gu)]/2, [d(fgz_n, gu) + d(fu, ggz_n)]/2\}$, on letting $n \rightarrow \infty$ we get $d(gu, fu) \leq \frac{k}{2}d(fu, gu)$, a contradiction. This implies $fu = gu$. Again, f -compatibility of f and g implies that $fgu = gfu$ and, hence, $ffu = fgu = gfu = ggu$. If $fu \neq ffu$ then by using (ii), we get $d(ffu, fu) < \max \{d(gfu, gu), k[d(ffu, gfu) + d(fu, gu)]/2, [d(ffu, gu) + d(fu, gfu)]/2\} = d(ffu, fu)$, a contradiction. Hence $fu = ffu = gfu$ and fu is a common fixed point of f and g . This completes the proof of the theorem.

Theorem 2.3 can be generalized further if we use the property (E.A.) instead of the notion of noncompatibility as patterned in Theorem 2.2.

Remark 2.1.

If f and g fail to be reciprocally continuous then there exists a sequence $\{x_n\}$ in X such that $fx_n \rightarrow t$ and $gx_n \rightarrow t$ for some t in X but either $\lim_n ffx_n \neq ft$ or $\lim_n gfx_n \neq gt$ or one of fgx_n, gfx_n is not convergent. It is also pertinent to mention here that if f and g are not reciprocally continuous then they necessarily satisfy the (E. A.) property, however the mappings satisfying (E. A.) property may be reciprocally continuous (see Example 11 [10]).

Theorem 2.4.

Let f and g be conditionally reciprocally continuous selfmappings of a metric space (X, d) satisfying

(I). $fX \subseteq gX$

(II).

$$d(fx, fy) < \max \{d(gx, gy), [d(fx, gx) + d(fy, gy)]/2, [d(fx, gy) + d(fy, gx)]/2\},$$

whenever the right hand side is positive. Suppose f and g are not reciprocally continuous. If f and g are either g -compatible or f -compatible then f and g have a unique common fixed point.

Proof:

Since f and g are not reciprocally continuous, there exists a sequence $\{x_n\}$ in X such that $fx_n \rightarrow t$ and $gx_n \rightarrow t$ for some t in X but either $\lim_n fgx_n \neq ft$ or $\lim_n gfx_n \neq gt$ or one of fgx_n, gfx_n is not convergent. Rest of the proof can be completed on the similar lines as has been done in Theorem 2.1.

Example 2.1. also illustrates Theorem 2.4.

Theorem 2.5.

The conclusions of all the above Theorems 2.1, 2.2, 2,3 and 2.4 respectively remain true if the noncommuting condition, i.e., f -compatible or g -compatible is replaced by the strong noncommuting notion of R - weakly commuting of type (A_f) or (A_g) respectively.

Proof:

Theorem 2.5 follows from the fact that f -compatible or g -compatible are R - weakly commuting of type (A_f) or (A_g) respectively.

Remark 2.2.

In all the above results we have not assumed any of the strong condition, i.e., continuity or completeness (or closedness) of the range of any one of the involved mappings. Our results substantially improve the results of Pant [9], Imdad et. al. [3], Kubiacyk and Sharma [7] and many others.

Remark 2.3.

In this paper we have proved all the results using strict contractive conditions. It may be observed that strict contractive conditions do not ensure the existence of common fixed points unless the space is assumed compact or the strict contractive condition is replaced by some strong conditions, e.g., a Banach type contractive condition or a ϕ - contractive condition or a Meir-Keeler type contractive condition.

Remark 2.4.

In all the results established in this paper, we have not assumed any mapping to be continuous. We now show that f and g are discontinuous at the common fixed point $u = fu = gu$. If possible, suppose f is continuous. Then taking the sequence $\{y_n\}$ of (1) (Theorem 2.1) we get $ffy_n \rightarrow fu = u$ and $fgy_n \rightarrow fu = u$. g -compatibility now implies that $\lim_n d(ffy_n, gfy_n) = 0$, i.e., $gfy_n \rightarrow fu = u$. This, in turn, yields $\lim_n d(fgy_n, gfy_n) = 0$. This contradicts the fact that $\lim_n d(fgy_n, gfy_n)$ is either nonzero or nonexistent. Hence f is discontinuous at the fixed point. Next, suppose that g is continuous. Then, for the sequence $\{y_n\}$, we get $gfy_n \rightarrow gu = u$ and $ggy_n \rightarrow gu = u$. In view of these limits, the inequality $d(fgy_n, fu) < \max\{d(ggy_n, gu), [d(fgy_n, ggy_n) + d(fu, gu)]/2, [d(fgy_n, gu) + d(fu, ggy_n)]/2\}$, yields a contradiction unless $fgy_n \rightarrow fu = u$. But $fgy_n \rightarrow u$ and $gfy_n \rightarrow u$ contradicts the fact that $\lim_n d(fgy_n, gfy_n)$ is either nonzero or nonexistent. Thus we provide more answers to the problem posed by Rhoades [14] regarding existence a contractive definition which is strong enough to generate a fixed point, but which does not force the map to be continuous at the fixed point.

Referencias

- [1] Aamri, A., El Moutawakil, D.: Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions, J. Math. Anal. Appl. 270,(2002), 181-188.
- [2] Fang Jin-Xuan and Gao Yang: Common fixed point theorems under strict contractive conditions in Menger spaces, Nonlinear Analysis 70, (2009), 184-193.
- [3] Imdad M., Ali Javid and Khan Ladlay: Coincidence fixed points in symmetric spaces under strict contractions, J. Math. Anal. Appl. 320, (2006), 352-360.
- [4] Jungck G.: Compatible mappings and common fixed points, Internat. J. Math. Math. Sci. 9,(1986), 771-779.
- [5] Kannan R.: Some results on fixed points, Bull. Cal. Math. Soc. 60,(1968), 71-76.
- [6] Kannan R.: Some results on fixed points - II, Amer. Math. Monthly 76, (1969), 405-408.
- [7] Kubiacyk I. and Sharma S: Some common fixed point theorems in Menger space under strict contractive conditions, Southeast Asian Bull. Math.,32, (2008),117-124.

- [8] Pant R. P.: Common fixed points of four mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 90,(1998), 281-286.
- [9] Pant R. P.: Discontinuity and fixed points, J. Math. Anal. Appl. 240, (1999), 284-289.
- [10] Pant R. P. and Bisht R. K.: Common fixed point theorems under a new continuity condition, Ann Univ Ferrara 58 no. 1, (2012), 127-141.
- [11] Pant R. P. and Pant V.: Common fixed points under strict contractive conditions, J. Math. Anal. Appl. 248,(2000), 327-332.
- [12] Pathak H. K. and Khan M. S.: A comparison of various types of compatible maps and common fixed points, Indian J. Pure Appl. Math. 28, no. 4,(1997), 477-485.
- [13] Pathak, H. K: Cho, Y. J. and Kang, S. M.: Remarks of R-weakly commuting mappings and common fixed point theorems, Bull. Korean Math. Soc., 34 (1997), 247-257.
- [14] Rhoades, B. E: Contractive definitions and continuity, Contemporary Math. (Amer. Math. Soc.) 72, (1988), 233-245.
- [15] Sessa, S: On a weak commutativity condition in fixed point considerations, Publ. Inst. Math.(Beograd) (NS) 34 (46) (1982) 149-153.
- [16] Singh, S. L: Cho, Y. J. and Kumar, A.: Fixed points of Meir-Keeler type hybrid contractions, PanAmerican Mathematical Journal vol., no. 4, (2006), 35-54.

Ravindra K. Bisht¹ and Aditya Harbola².

¹Department of Applied Sciences, BTKIT, Dwarahat, Almora, Uttarakhand (India)

²MCA Department, Graphic Era University, Dehradun, Uttarakhand (India)

e-mail: ¹ravindra.bisht@yahoo.com (corresponding author) and ²adityaharbola@gmail.com

Bounds on the effective energy density of a more general class of the Willis dielectric composites

Gaetano Tepedino Aranguren, Javier Quintero C.,
Eribel Marquina

Abstract. The authors Willis (see [W]) and Milkis (see [MM]) considered a composite formed by a periodic mixed in prescribed proportion of a two homogeneous dielectric materials whose respectively energy density are $W_1(Z) = \frac{\alpha_1}{2}|z|^2$, $W_2(Z) = \frac{\alpha_2}{2}|Z|^2 + \frac{\gamma}{4}|Z|^4$, being $0 < \alpha_1 < \alpha_2, \gamma > 0$. Willis gave a lower bound on the effective energy density, but his method failed to give an upper bound. The difference between Milkis work and ours is that Milkis gives a self-consistent asymptotic expansion for the effective dielectric constant when the microstructure geometry is fixed and the non-linear phase has very low volume fraction. By contrast, we will give bounds on the effective energy density for the same material with arbitrary geometry and volume fractions θ_1, θ_2 , valid for any spatially periodic microstructure.

This work gives not only lower and upper bound of that composite but also of a more general class considering $W_1(Z) = \frac{\alpha_1}{2}|Z|^2$, $W_2(Z) = \frac{\alpha_2}{2}|Z|^2 + \frac{\gamma}{p}|Z|^p$ being $0 < \alpha_1 < \alpha_2, \gamma > 0$ and $p > 2$. Moreover, we will prove that our bounds converge, as $\gamma \rightarrow 0^+$, to the optimal bounds of the effective energy density \widetilde{W}_L of the considered *Linear Composites*, that is when $\gamma = 0$. In the article [L.C] it has been proved that the optimal bounds of the **linear-isotropic** case (this is when $\gamma = 0$) are expressed in the form:

$$(\widetilde{W}_L - W_1)^*(\eta) \leq A(\eta), \quad (W_2 - \widetilde{W}_L)^*(\eta) \leq B(\eta),$$

while in our composite, the bounds of the **isotropic** case will be expressed in the form

$$(\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq A(\eta) - \gamma \mathcal{L}(\eta) + o(\gamma^2)|\eta|^{2p-4},$$

$$(W_0 + W_2 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq B(\eta) - \gamma \mathcal{U}(\eta) + o(\gamma^2)|\eta|^{2p-4}$$

where $W_0(\xi) = \frac{\gamma 2^{p-1}}{p} |\xi|^p$.

Moreover, we will give bounds to the **anisotropic** case. This article is a generalization of the particular case $p = 4$, which is called the Willis Composite (this particular case was first studied by [W] and [MM] and later was completed by [T]).

Resumen. Los autores Willis (ver [W]) y Milkis (ver [MM]) consideraron un compuesto formado por una mezcla periódica y de proporción prescrita de dos materiales dieléctricos homogéneos, cuyas densidad de energía son, respectivamente, $W_1(Z) = \frac{\alpha_1}{2}|Z|^2$, $W_2(Z) = \frac{\alpha_2}{2}|Z|^2 + \frac{\gamma}{p}|Z|^p$, siendo $0 < \alpha_1 < \alpha_2, \gamma > 0$. Willis dio un límite inferior para la densidad de energía eficaz, pero su método no dio una cota superior. La diferencia entre el trabajo de Milkis y el nuestro es que Milkis da una expansión asintótica auto-consistente de la constante dieléctrica efectiva cuando la geometría micro estructura es fija y la fase no lineal tiene fracción de volumen muy bajo. Por el contrario, vamos a dar límites a la densidad de energía eficaz para el material propio con una geometría arbitraria y fracciones de volumen θ_1, θ_2 válido para cualquier micro estructura espacial periódica.

Este trabajo no sólo da cotas inferior y superior de ese compuesto pero también de una clase más general teniendo en cuenta $W_1(Z) = \frac{\alpha_1}{2}|Z|^2$ $W_2(Z) = \frac{\alpha_2}{2}|Z|^2 + \frac{\gamma}{p}|Z|^p$ es $0 < \alpha_1 < \alpha_2, \gamma > 0$ y $p > 2$. Por otra parte, vamos a probar que nuestros límites convergen cuando $\gamma \rightarrow 0^+$, a la cota óptima de la densidad efectiva de energía \widetilde{W}_L del considerado *Composites lineales*, que es cuando $\gamma = 0$. En el artículo [LC] ha sido probado que los límites óptimos del caso **isótropo lineal** (esto es cuando $\gamma = 0$) se expresan en la forma:

$$(\widetilde{W}_L - W_1)^*(\eta) \leq A(\eta), \quad (W_2 - \widetilde{W}_L)^*(\eta) \leq B(\eta),$$

y mientras en nuestro compuesto, los límites del caso **isotrópico** serán expresados en forma

$$(\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq A(\eta) - \gamma \mathcal{L}(\eta) + o(\gamma^2)|\eta|^{2p-4},$$

$$(W_0 + W_2 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq B(\eta) - \gamma \mathcal{U}(\eta) + o(\gamma^2)|\eta|^{2p-4}$$

donde $W_0(\xi) = \frac{\gamma 2^{p-1}}{p} |\xi|^p$.

Además, daremos límites en el caso **anisotrópico**. Este artículo es una generalización del caso particular $p = 4$, que se llama Willis compuesto (este caso fue estudiado por primera vez por [W] y [MM] y más tarde se completó con [T]).

1 Introduction

Given $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ open-bounded the region occupied by a dielectric, then its *electrostatic potential* satisfies the constitutive equation field

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \mathcal{E}(x, \nabla u) \nabla u & = \rho & \text{if } x \in \Omega \\ u & = \varphi_0 & \text{if } x \in \partial\Omega \end{cases},$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \nabla_Z W(x, \nabla u) & = \rho & \text{if } x \in \Omega \\ u & = \varphi_0 & \text{if } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

being ρ its *free charge density*, $E_0 = -\nabla\varphi_0$ its *electric field* at the boundary, and \mathcal{E} is its *dielectric tensor*. If there is a function $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\nabla_Z W(x, Z) = \mathcal{E}(x, Z)Z$, then we say that W is the *Energy Density* of this material. We will consider this class of material.

A dielectric is called *homogeneous* when W does not depend on the space variable, otherwise, it is called *heterogeneous or inhomogeneous*. If a material is inhomogeneous with energy density W , we say that $\widetilde{W} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is its *effective energy density* when $u_\epsilon \rightarrow u_0$, in some sense, being u_ϵ, u_0 solution of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \nabla_Z W(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u) \nabla u & = \rho & \text{if } x \in \Omega \\ u & = \varphi_0 & \text{if } x \in \partial\Omega \end{cases},$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \nabla_Z \widetilde{W}(\nabla u) & = \rho & \text{if } x \in \Omega \\ u & = \varphi_0 & \text{if } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

We will consider a composite formed by a periodic mixed of two homogeneous dielectric in prescribed proportions which energy densities are respectively W_1, W_2 . The composite formed has energy density $W(x, \xi) = \chi_1(x)W_1(\xi) + \chi_2(x)W_2(\xi)$ in a cell Y , where χ_k is the characteristic function of Y_k , being $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $Y = Y_1 \cup Y_2 \subset \Omega$ a cell and $\theta_k = |Y_k|/|Y|$. We will suppose that the composite has a Y -periodic structure. That is, microscopically given $\epsilon > 0$, the energy density of the composite in a cell ϵY is $W_\epsilon(x, \xi) = W(x/\epsilon, \xi)$. Therefore, extending Y -periodically $W(\cdot, \xi)$ to all \mathbb{R}^n , we find that

$$\begin{cases} W(x, \xi) = \chi_1(x)W_1(\xi) + \chi_2(x)W_2(\xi) \\ \text{being } W_1(\xi) = \frac{\alpha_1}{2}|\xi|^2, \quad W_2(\xi) = \frac{\alpha_2}{2}|\xi|^2 + \frac{\gamma}{p}|\xi|^p, \\ \text{where } < \alpha_1 < \alpha_2, \gamma > 0, p > 2. \end{cases} \quad (1.1)$$

The set Y is the open rectangle $\prod_{i=1}^n (0, a_i)$, being $\{a_1, \dots, a_n\} \subset (0, \infty)$. We will prove that the *Effective Energy Density* is given by the variational principle

$$\widetilde{W}(\xi) = \inf_{v \in V_p} \int_Y W(x, v + \xi) dx, \quad (1.2)$$

where V_p is the completion of $C_{per}^1(\bar{Y}, \mathbb{R}^n)$ under the L_p -norm. This and other spaces will be defined in the next section. The formula (1.2) will be proved together with the exact definition of the effective energy density.

2 Definitions and Notations

Definition 1 Given $n \in \mathbb{N}$ and $\{a_1, \dots, a_n\} \subset (0, \infty)$ we consider $Y = \prod_{i=1}^n (0, a_i)$. If $\emptyset \neq X$, a function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ is called Y -periodic when

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{Z}^n : f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + \delta_1 a_1, \dots, x_n + \delta_n a_n). \quad (2.1)$$

The usual norm and the usual inner product in \mathbb{R}^n will be denoted by $|\cdot|$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition 2 The integral $\int_A f$ means the average $\frac{1}{|A|} \int f$, where $|A|$ is the L -measure of A .

Definition 3 The space $C_{per}(Y)$ are the function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continues in \bar{Y} and Y -periodic. In the same way we define $C_{per}^1(Y)$, $C_{per}(Y, \mathbb{R}^n)$, $C_{per}^1(Y, \mathbb{R}^n)$. If $1 \leq p \leq \infty$ the spaces $L_{per}^p(Y)$, $L_{per}^p(Y, \mathbb{R}^N)$ are defined in natural way and usually we will write L_{per}^p for both spaces. If $1 \leq p < \infty$ we will use the normalized norm $\|f\|_p = \left(\int_Y |f|^p \right)^{1/p}$. The usual inner product of L_{per}^2 will be

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_Y fg \text{ and } \langle F, G \rangle_2 = \int_Y \langle F, G \rangle.$$

Definition 4 We will consider the following: natural spaces:

$$CV = \{\text{constants vector fields } \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N\}.$$

$$M = M(Y) = \{\sigma \in C_{per}(Y, \mathbb{R}^N) : \sigma = \nabla u \text{ for some } u \in C_{per}^1(Y)\}.$$

$$N = N(Y) = \{\sigma \in C_{per}^1(Y, \mathbb{R}^N) : \int_Y \sigma = \theta \text{ and } \text{div}(\sigma) = 0 \text{ in } Y\}.$$

Definition 5 Given $1 < p < \infty$ and $p^{-1} + q^{-1} = 1$ we will consider the spaces:

$$K_p = K_p(Y) = W_{per}^{1,p}(Y) \text{ the completion of } C_{per}^1(Y) \text{ under the norm } \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p.$$

$$V_p = V_p(Y) = \text{the completion of } M \text{ under the } \|\cdot\|_p\text{-norm.}$$

$$S_q = S_q(Y) = \text{the completion of } N \text{ under the } \|\cdot\|_q\text{-norm.}$$

$X_q = \{\sigma \in L_{per}^q(Y, \mathbb{R}^N) : \text{div}(\sigma) = 0 \text{ in } Y\}$. And given $\eta \in \mathbb{R}^N$ we have the space

$$X_q(\eta) = \{\sigma \in X_q : \int_Y \sigma = \eta\}.$$

Definition 6 Given $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_N = \{\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^N : \Omega \text{ is open and bounded}\}$.

Definition 7 Given (\mathcal{E}, τ) a topological vector space which satisfies the first axiom of countability, $A \subset \mathcal{E}$, $S \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{S}$, $\{F_s : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid s \in \overline{S}\}$ and $u \in \overline{A}$, we say $\lambda = \Gamma(\tau) \lim_{s \rightarrow a} F_s(u)$ if and only if

$$(i) \forall \{s_n\} \subset S, \forall \{u_n\} \subset A \text{ with } s_n \rightarrow a \text{ and } u_n \xrightarrow{\tau} u : \\ \lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{s_n}(u_n).$$

$$(ii) \forall \{s_n\} \subset S \text{ with } s_n \rightarrow a \text{ there is } \{u_n\} \subset A \text{ with } u_n \xrightarrow{\tau} u \text{ such that} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{s_n}(u_n) \leq \lambda.$$

In this work, given $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ and $\Omega \in \mathcal{A}_N$ we will take $\mathcal{E} = L^p(\Omega)$, $A = W^{1,p}(\Omega)$, τ the topology induced by the L^p -norm and τ^* the weak*-topology of $W^{1,p}(\Omega)$.

Definition 8 If V is a real reflexive topological vector space and $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, we define $f^* : V^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ and $f^{**} : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ as

$$\forall l \in V^* : f^*(l) = \sup_{x \in V} \{l(x) - f(x)\}, \quad \forall x \in V : f^{**}(x) = \sup_{l \in V^*} \{l(x) - f^*(l)\}$$

We will use the fact:

$$f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ is convex} \iff f = f^{**}, \text{ that is } \forall x \in V : f(x) = \sup_{l \in V^*} \{l(x) - f^*(l)\}.$$

3 Existence of \widetilde{W} , Γ -convergence and Homogenization

In this section we will prove the formula (1.2) and give general results for future considerations.

Lemma 1 The function $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ defined by (1.1) satisfies:

- (1) $\forall z \in \mathbb{R}^N : W(\cdot, z)$ is Y -periodic and measurable.
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}^n : W(x, \cdot)$ is $C^1(\mathbb{R}^N)$ and strictly convex.
- (3) There are $\beta > 0$ and $\lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ a Y -periodic positive function such that

$$\forall x, z \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \lambda^{-1}(x)|z|^p \leq W(x, z) \leq \beta(1 + |z|^p). \quad (3.1)$$

Lemma 2 Given $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \in \mathcal{A}_N$, $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\rho \in L^q(\Omega)$, X a closed linear subspace containing $W_0^{1,p}(\Omega)$ and $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ a function which satisfies the conditions (2) and (3) of lemma 1 (the periodicity is not necessary here), then the function

$$T(\Omega, u) = \int_{\Omega} (W(x, \nabla u) - \rho u) dx, \quad (3.2)$$

has an unique minimizer over X which satisfies

$$-\operatorname{div} \nabla_z W(\cdot, \nabla u) = \rho \quad \text{in } \Omega, \quad (3.3)$$

And reciprocally, the solution of (3.3) is the minimizer of (3.2).

Proof This is a consequence of a more general statement proved in [D.A]. \square

Theorem 1 $\forall N \in \mathbb{N}, \Omega \in \mathcal{A}_N, 2 \leq p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$ and W a function, which satisfies the conditions (1) to (3) of lemma 1. Then, the function $\widetilde{W} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ defined as

$$\widetilde{W}(\xi) = \inf_{u \in K_p} \int_Y W(x, \nabla u + \xi) dx, \quad (3.4)$$

is well defined and has the following properties:

- (1) \widetilde{W} satisfies the conditions (1) to (3) of lemma 1.
- (2) Given $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \rho \in L^q_{per}, \epsilon > 0$ and u_0, u_ϵ solutions of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x \nabla_Z W(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u) \nabla u = \rho & \text{if } x \in \Omega \\ u = \varphi & \text{if } x \in \partial\Omega \\ -\operatorname{div}_x \nabla_Z \widetilde{W}(\nabla u) = \rho & \text{if } x \in \Omega \\ u = \varphi & \text{if } x \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.5)$$

then $u_\epsilon \xrightarrow{L^p(\Omega)} u_0$ and $\nabla u_\epsilon \xrightarrow{L^p(\Omega)} \nabla u_0$.

Proof This is a consequence of a more general statement proved in [AB]. \square

We conclude that $\forall \Omega \in \mathcal{A}_N$ the operators $T_\epsilon(\Omega, u) = \int_\Omega (W(x/\epsilon, \nabla u) - \rho u) dx$ is $\Gamma(\tau_\Omega^*)$ -convergent to the operators $T_0(\Omega, u) = \int_\Omega [\widetilde{W}(\nabla u) - \rho u] dx$, as $\epsilon \rightarrow 0$.

We have compute \widetilde{W} as a primal variational principle (3.4). The next section will prove a dual variational principal associate with \widetilde{W} . We suggest to our readers to review the definition of F^* the dual of the function $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, being X a real locally compact vector topological space, see for example [EK].

4 Dual and Hashin-Shtrikman Variational Principles

Lemma 3 Let $1 < p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$ and ν the outer unit vector on ∂Y .

- (1) $\forall f \in C_{per}(Y) : \int_{\partial Y} f = 0$.

- (2) $\forall u \in C^1_{per}(Y), \forall 1 \leq i \leq N : \int_Y D_i u = 0.$
- (3) $\sigma \in V_p \iff \sigma = \nabla u \text{ some } u \in K_p.$
- (4) $\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall v \in V_p : \int_Y \langle v, \xi \rangle = 0.$
- (5) $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \sigma \in S_q : \int_Y \langle \sigma, \xi \rangle = 0.$
- (6) $\forall \sigma \in X_q, \forall v \in V_p : \int_Y \langle \sigma, v \rangle = 0.$
- (7) $V_p^\perp = S_q \oplus CV, S_q^\perp = V_p \oplus CV.$

Theorem 2 *If \widetilde{W} is the function defined by (3.4), then*

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^n : \widehat{W}^*(\eta) = \inf_{\sigma \in S_q} \int_Y W^*(x, \sigma + \eta) dx. \quad (4.1)$$

Proof *From lemma 2 given $\xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) = \int_Y W(x, \nabla u_\xi + \xi) dx$, where $u_\xi \in K_p$ and*

$$\operatorname{div} \nabla_z W(\cdot, \nabla u_\xi + \xi) = 0 \text{ in } Y. \quad (4.2)$$

*Since $W(x, \cdot)$ is convex, then $W(x, \cdot) = W^{**}(x, \cdot)$, therefore (see for example [E.T])*

$$\widetilde{W}(\xi) = \int_Y W(x, \nabla u_\xi + \xi) dx = \sup_{\sigma \in L^q_{per, Y}} \int_Y [\langle \nabla u_\xi, \sigma \rangle - W^*(x, \sigma)] dx, \quad (4.3)$$

since the integrand is concave, thus the supreme is achieved at some $\sigma_\xi \in L^q_{per}$ which satisfies $\nabla W^(\cdot, \sigma_\xi) = \nabla_\xi + \xi$ in Y , then (see [E.T]) $\sigma_\xi = \nabla_z W(\cdot, \nabla u_\xi + \xi)$ in Y and by (4.2) $\operatorname{div}(\sigma_\xi) = 0$ in Y , that is $\sigma_\xi \in X_q$. On the other hand, since $X_q \subset L^q_{per}$, then using the lemma 3, we have*

$$\widetilde{W}(\xi) \geq \sup_{\sigma \in X_q} \int_Y [\langle \nabla u_\xi + \xi, \sigma \rangle - W^*(x, \sigma)] dx = \sup_{\sigma \in X_q} \int_Y [\langle \xi, \sigma \rangle - W^*(x, \sigma)] dx. \quad (4.4)$$

Given $\sigma \in S_q$ and $\eta \in \mathbb{R}^N$ we have $\sigma + \eta \in X_q(\eta)$, then from (4.4)

$$\begin{aligned}
& \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \\
& \widetilde{W}(\xi) \geq \sup_{\sigma \in S_q^Y} \int_Y [\langle \xi, \sigma + \eta \rangle - W^*(x, \sigma + \eta)] dx \\
& = \langle \xi, \eta \rangle - \inf_{\sigma \in S_q^Y} \int_Y W^*(x, \sigma + \eta) dx,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

because $\int_Y \langle \sigma, \xi \rangle = 0$. Subtracting $\langle \xi, \eta \rangle$ in both sides of (4.5), multiplying by -1 and taking supreme over $\xi \in \mathbb{R}^N$, we obtain

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N : W^*(\eta) \leq \inf_{\sigma \in S_q^Y} \int_Y W^*(x, \sigma + \eta) dx. \tag{4.6}$$

On the other hand, since the supreme in (4.3) is achieved at $X_q \subset L_{per}^q$, then

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : W^*(\xi) = \sup_{\sigma \in L_{per}^q} \int_Y [\langle \xi, \sigma \rangle - W^*(x, \sigma)] dx, \tag{4.7}$$

subtracting $\langle \xi, \eta \rangle$ from both sides of (4.7) with $\eta = \int_Y \sigma_\xi$ we get $\langle \xi, \eta \rangle - \widetilde{W}(\xi) = \inf_{\sigma \in X_q(\eta)} \int_Y [W^*(x, \sigma) - \langle \sigma + \eta, \xi \rangle] dx$. Since \widetilde{W} is convex, we have $\widetilde{W}(\xi) \geq \langle \xi, \eta \rangle - W^*(\eta)$, therefore $\widetilde{W}^*(\eta) \geq \inf_{\sigma \in X_q(\eta)} \int_Y W^*(x, \sigma)$, because $\int_Y (\sigma - \eta) dx = \theta$.

Hence

$$\widetilde{W}^*(\eta) \geq \inf_{\sigma \in S_q^Y} \int_Y W^*(x, \sigma + \eta) dx, \tag{4.8}$$

thus from (4.6), (4.7) and (4.8) we obtain (4.1). \square

The arguments used in the proof of this theorem can be used to obtain, under certain conditions on W , other variational principles. Under a more general approach there is a method called (see [H.S]) Hashin-Shtrikman variational principles and improved in the article [TW]. We are going to present this result restricted to our particular case.

Theorem 3 (Talbot-Willis) *If W satisfies the hypothesis of lemma 1 and $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ are convex functions of class C^1 such that $\forall x \in \mathbb{R}^N$: $W(x, \cdot) - f_1, f_2 - W(x, \cdot), W^*(x, \cdot) - f_3, f_4 - W^*(x, \cdot)$ are convex, then*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) = \sup_{\sigma \in L_{per}^q} \inf_{u \in K_p} \int_Y [\langle \nabla u + \xi, \sigma \rangle - (W - f_1)^*(\sigma) + f_1(\nabla u + \xi)] dx. \quad (4.9)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) = \inf_{\sigma \in L_{per}^q} \inf_{u \in K_p} \int_Y [-\langle \nabla u + \xi, \sigma \rangle + (f_2 - W)^*(\sigma) + f_2(\nabla u + \xi)] dx. \quad (4.10)$$

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}^*(\eta) = \sup_{v \in L_{per}^p} \inf_{\sigma \in S_q} \int_Y [\langle \sigma + \eta, v \rangle - (W^* - f_3)^*(v) + f_3(\sigma + \eta)] dx. \quad (4.11)$$

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}^*(\eta) = \inf_{v \in L_{per}^p} \inf_{\sigma \in S_q} \int_Y [-\langle \sigma + \eta, v \rangle + (f_4 - W^*)^*(v) + f_4(\sigma + \eta)] dx. \quad (4.12)$$

Proof We have $\widetilde{W}(\xi) = \inf_{u \in K_p} \int_Y [W(x, \nabla u + \xi) - f_1(\nabla u + \xi) + f_1(\nabla u + \xi)] dx$,

and since

$W(x, \cdot) - f_1$ is convex, then, following the same approach of the proof of the theorems 1 and 2 we obtain

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(\xi) &= \inf_{u \in K_p} \sup_{\sigma \in L_{per}^q} \int_Y [\langle \nabla u + \xi, \sigma \rangle - (W - f_1)^*(\sigma) + f_1(\nabla u + \xi)] dx \\ &= \inf_{u \in K_p} \sup_{\sigma \in L_{per}^q} T(u, \sigma), \end{aligned}$$

since $\forall u \in K_p : T(u, \cdot)$ is concave on L_{per}^q and $\forall \sigma \in L_{per}^q : T(\cdot, \sigma)$ is convex on K_p , then the usual Theorem of the Saddle Point (see for example [E.T]) gives the existence of $(\hat{u}, \hat{\sigma}) \in K_p \times L_{per}^q$ such that $\inf_{u \in K_p} \sup_{\sigma \in L_{per}^q} T(u, \sigma) = T(\hat{u}, \hat{\sigma}) =$

$\sup_{\sigma \in L_{per}^q} \inf_{u \in K_p} T(u, \sigma)$. Therefore, we can interchange sup and inf to obtain (4.9).

The item (4.10) is easier because $W(x, \cdot) - f_2$ is a concave C^1 function, thus

$$\widetilde{W}(\xi) = \inf_{u \in K_p} \inf_{\sigma \in L_{per}^q} \int_Y [-\langle \nabla u + \xi, \sigma \rangle + (f_2 - W)^*(\sigma) + f_2(\nabla u + \xi)] dx,$$

and interchanging the order of the inf we obtain (4.10).

The items (4.11) and (4.12) are obtained by similar arguments using (4.1) of theorem 2. \square

5 Some important results

Lemma 4 *Given $H = (h_{i,j}) \in \mathbb{R}(N, N)$ a symmetric real matrix with $\sigma(H) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, then*

$$\forall r > 0 : \int_{S_r} |H\eta|^2 = \frac{r^2}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 = \frac{r^2}{N} \text{tr}(H^2). \quad (5.1)$$

Proof *There is $P \in \mathbb{R}(N, N)$ such that $P^t P = I$ and $H = P^t D P$ where $D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$. Then $|H\eta|^2 = |DP\eta|^2$, $|\det(P)| = 1$ and $|\eta|^2 = |P\eta|^2$. A change of variable gives $\int_{S_r} |H\eta|^2 = \int_{S_r} |Dz|^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \int_{S_r} z_i^2$. Since $\int_{S_r} |z_i|^2 = \int_{S_r} |z_j|^2$, then $N \int_{S_r} |z_i|^2 = \int_{S_r} |z|^2 = r^2$ and $\int_{S_r} |z_i|^2 = \frac{r^2}{N}$, thus we obtain (5.1). \square*

Theorem 4 *If φ is a Y -periodic solution of $\Delta\varphi = \chi_k - \theta_k$ in Y , H its Hessian matrix, $\delta \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ and $u = \delta \langle \nabla\varphi, \eta \rangle$, then*

$$u \in K_p, \quad \nabla u = \delta H\eta, \quad \int_Y H\chi_k = \int_Y H^2, \quad \int_Y \langle \nabla u, \eta \rangle \chi_k = \delta \int_Y |H\eta|^2, \quad (5.2)$$

$$\int_{S_r} \int_Y |H\eta|^2 = \frac{r^2}{N} \theta_1 \theta_2. \quad (5.3)$$

Proof *Exists such a solution $\varphi \in W_{per}^{2,p}$ because $\chi_k - \theta_k \in L_{per}^t$ for all $1 \leq t \leq \infty$ and $\int_Y (\chi_k - \theta_k) = 0$, then $u = \delta \langle \nabla u, \eta \rangle \in K_p$. Let $H = (h_{i,j})$ the Hessian matrix of φ , clearly H is real and symmetric, where $h_{i,j} = D_{i,j}\varphi$. We have $u = \delta \sum_{j=1}^N \eta_j D_j \varphi$, then $D_i u = \delta \sum_{I=1}^N \eta_I D_{i,I} \varphi$ and $\nabla u = H\eta$.*

Since φ is Y -periodic, then $\theta_k \int_Y h_{i,j} = 0$, and $\int_Y h_{i,j} \chi_k = \int_Y (\chi_k - \theta_k) h_{i,j} = \int_Y \Delta\varphi h_{i,j} = \sum_{t=1}^N \int_Y h_{t,t} h_{i,h}$, integrating by parts, we get $\int_Y h_{i,j} \chi_k = \sum_{t=1}^N \int_Y h_{i,t} h_{t,j}$, then $\int_Y H\chi_k = \int_Y H^2$.

$$\begin{aligned} \text{On the other hand } \int_Y \langle \nabla u, \eta \rangle \chi_k &= \delta \int_Y \langle H \chi_k \eta, \eta \rangle = \delta \langle \int_Y H \chi_k \eta, \eta \rangle = \\ \langle \int_Y H^2 \eta, \eta \rangle &= \delta \int_Y \langle H^2 \eta, \eta \rangle = \delta \int_Y \langle H \eta, H \eta \rangle = \delta \int_Y |H \eta|^2. \end{aligned}$$

Using the Theorem of Fubini and lemma 4 we get

$$\int_{S_r Y} \int_Y |H \eta|^2 = \int_Y \int_{S_r} |H \eta|^2 = \frac{r^2}{N} \int_Y \text{tr}(H^2),$$

and using integration by parts twice, we get

$$\begin{aligned} \int_Y \text{tr}(H^2) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_Y h_{i,j} h_{j,i} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_Y h_{i,i} h_{j,j} \\ &= \int_Y |\Delta \varphi|^2 = \int_Y |\chi_k - \theta_k|^2 = \theta_1 \theta_2. \end{aligned}$$

□

Lemma 5 Given $p > 1$, the function defined implicitly by

$$\forall x \geq 0 : xG^{p-1}(x) + G(x) = 1, \quad (5.4)$$

is a well defined C^2 function on $[0, \infty)$, $G(0) = 1$, $G((0, \infty)) \subset (0, 1)$ and

$$G(x) = 1 - x + o(x^2) \text{ as } x \rightarrow 0^+. \quad (5.5)$$

Proof Given $a \geq 0$, lets consider the function $\varphi_a(x) = ax^{p-1} + x - 1$ defined on $[0, \infty)$. If $a = 0$ this function has the unique real zero $G(0) = 1$. If $a > 0$ then $\varphi'_a > 0$, $\varphi_a \in C[0, \infty)$, $\varphi_a(0) < 0$ and $\varphi_a(1) > 0$, then φ_a has an unique real zero $G(a) \in (0, 1)$. Therefore, the function $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ defined $G(a)$ to be the unique real zero of φ_a it is a well defined real function which satisfies $\forall a \in [0, \infty) : aG^{p-1}(a) + G(a) = 1$, thus clearly $G(0) = 1$ and $G((0, \infty)) \subset (0, 1)$.

Moreover, using the Implicit Function Theorem to $F : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ given as $F(x, y) = xy^{p-1} + y - 1$, we obtain that G is differentiable and $G' = G^{p-1}/(1 + (p-1)xG^{p-2})$, then G is C^1 . Using again the Implicit Function Theorem we get that G is C^2 .

On the other hand we have $G(0) = 1, G'(0) = -1, G''(0) = 2(p-1)$ and using the L'Hopital Theorem we get $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x)-1+x-(p-1)x^2}{x^2} = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x)-1+x}{x^2} = p-1$. □

Lemma 6 Given $p > 2, \alpha > 0, \gamma > 0$ and $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ given as

$$\forall z \in \mathbb{R}^N : h(z) = \frac{\alpha}{2}|z|^2 + \frac{\gamma}{p}|z|^p, \quad (5.6)$$

then, h is a convex C^1 function which satisfies

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N : h^*(\eta) = \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) G(b) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) G^2(b) \right] |\eta|^2, \quad (5.7)$$

$$\text{where } b = \frac{\gamma}{\alpha^{p-1}} |\eta|^{p-2},$$

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N : h^*(\eta) = \frac{1}{2\alpha} |\eta|^2 - \frac{\gamma}{p\alpha^p} |\eta|^p + o(\gamma^2) |\eta|^{2p-4}, \quad \text{as } \gamma \rightarrow 0^+. \quad (5.8)$$

Proof We have $H(\eta) = f(|\eta|)$, where $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is given as $f(t) = \frac{\alpha}{2} t^2 + \frac{\gamma}{p} t^p$. Then $h^*(\eta) = f^*(|\eta|)$, where $\forall s \geq 0 : f^*(s) = \sup\{st - f(t) : t \geq 0\}$. Clearly $f^*(0) = 0$. If $s > 0$, then $F^*(s) = \widehat{s\hat{t}} - f(\widehat{t})$, where $s - \alpha\widehat{t} - \gamma\widehat{t}^{p-1} = 0$, thus $\frac{\gamma}{s}\widehat{t}^{p-1} + \frac{\alpha}{s}\widehat{t} = 1$. Taking $\widehat{z} = \frac{\alpha}{s}\widehat{t}$ we get $a\widehat{z}^{p-1} + \widehat{z} = 1$, where $a = \gamma s^{p-2}/\alpha^{p-1}$. Therefore,

$$\forall s \geq 0 : f^*(s) = \frac{s^2}{\alpha} G(a) - \frac{s^2}{2\alpha} G^2(a) - \frac{\gamma s^p}{p\alpha^p} G^p(a), \quad \text{where } a = \frac{\gamma s^{p-2}}{\alpha^{p-1}}. \quad (5.9)$$

Since $aG^{p-1}(a) + G(a) = 1$, we get $\frac{s^p \gamma}{p\alpha^p} G^p(a) = \frac{s^2}{p\alpha} (G(a) - G^2(a))$, replacing this into (5.9) we get

$$\forall s \geq 0 : f^*(s) = \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{p}\right) G(a) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) G^2(a) \right] s^2, \quad \text{where } a = \frac{\gamma s^{p-2}}{\alpha^{p-1}}. \quad (5.10)$$

From (5.10) we obtain (5.7). On the other hand $G(a) = 1 - a + o(a^2)$ and $G^2(a) = 1 - 2a + o(a^2)$, replacing this into (5.10) we get $f^*(s) = \frac{1}{2\alpha} s^2 - \frac{1}{p\alpha^p} a s^2 + o(a^2) s^2$. Since $a = \gamma s^{p-2}/\alpha^{p-1}$, we get $\frac{1}{p\alpha} a s^2 = \frac{\gamma s^p}{p\alpha^p}$ and $o(a^2) s^2 = o(\gamma^2) s^{2p-2}$, then $f^*(s) = \frac{1}{2\alpha} s^2 - \frac{\gamma}{p\alpha^p} s^p + o(\gamma^2) s^{2p-4}$, from this we obtain (5.8). \square

6 A Lower Bound on \widetilde{W}

Theorem 5 Given W by (1.1), (1.2) and \widetilde{W} by (3.4), then $\forall r > 0$:

$$\int_{\widetilde{S}_r} (\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq \frac{1}{2\theta_2} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\theta_1}{N\alpha_1} \right) r^2 - \frac{\gamma}{p(\alpha_2 - \alpha_1)^p \theta_2^{p-1}} r^p + o(\gamma^2) r^{2p-4}. \quad (6.1)$$

Proof Since $W(x, z) - W_1(z) = \chi_2(x)(W_2 - W_1)(z) = \chi_2(x)h(z)$, where h is the convex C^1 function given by (5.6) with $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, then we can use (4.9) to obtain

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) = \sup_{\sigma \in L_{per}^q} \inf_{u \in K_p} \int_Y [\langle \nabla u + \xi, \sigma \rangle - \chi_2 h^*(\sigma) + W_1(\nabla u + \xi)] dx,$$

we choose $\sigma = \chi_2 \eta$, where $\eta \in \mathbb{R}^N$ and get

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) \geq \theta_2 \langle \xi, \eta \rangle - \theta_2 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} \int_Y [\langle \nabla u, \eta \rangle \chi_2 + W_1(\nabla u + \xi)] dx,$$

Since $W_1(\nabla u + \xi) = \frac{\alpha_1}{2} (|\nabla u|^2 + 2\langle \nabla u, \xi \rangle + |\xi|^2)$ and $\int_Y \langle \nabla u, \xi \rangle = 0$, then

$$\begin{aligned} \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \\ \widetilde{W}(\xi) \geq W_1(\xi) - \theta_2 \langle \xi, \eta \rangle - \theta_2 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} \int_Y \left[\langle \nabla u, \eta \rangle \chi_2 + \frac{\alpha_1}{2} |\nabla u|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (6.2)$$

The inf in (6.2) is achieved by $u \in K_p$ such that $\alpha_1 \Delta u = -\text{div}(\eta \chi_2)$ in Y , that is $u = -\frac{1}{\alpha_1} \langle \nabla \varphi, \eta \rangle$ where $\varphi \in W^{2,p}(Y)$ satisfies $\Delta \varphi = \chi_2 - \theta_2$ in Y . From (5.2) we get

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : (\widetilde{W} - W_1)(\xi) \geq \theta_2 \langle \xi, \eta \rangle - \theta_2 h^*(\eta) - \frac{1}{2\alpha_1} \int_Y |H\eta|^2 dx, \quad (6.3)$$

subtracting $\langle \xi, \eta \rangle$, multiplying by (-1) and taking sup over $\xi \in \mathbb{R}^N$ after having replaced $\eta \Rightarrow \eta/\theta_2$ on (6.3) we find

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N : (\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq \theta_2 h^*(\eta/\theta_2) + \frac{1}{2\alpha_1 \theta_2^2} \int_Y |H\eta|^2 dx, \quad (6.4)$$

where h^* is given by (5.7). Integrating over S_r and using (5.3) we get

$$\forall r > 0 : \int_{S_r} (\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq \theta_2 f^*(r/\theta_2) + \frac{\theta_1}{2N\alpha_1 \theta_2} r^2, \quad (6.5)$$

where f^* is given by (5.10). Replacing (5.10) or (5.8) into (6.5) we obtain (6.1). \square

Corollary 1 Under the same conditions of theorem 1, if \widetilde{W} is isotropic, then

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathbb{R}^N : (\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq \\ \frac{1}{2\theta_2} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\theta_1}{N\alpha_2} \right) |\eta|^2 - \frac{\gamma}{p(\alpha_2 - \alpha_1)^p \theta_2^{p-1}} |\eta|^p + o(\gamma^2) |\eta|^{2p-4}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Proof Direct consequence of theorem 1. \square

Corollary 2 *Under the same condition of theorem 1, if \widetilde{W} is isotropic, then the lower bound obtained by theorem 5 converges, as $\gamma \rightarrow 0$, to the optimal lower bound of the linear composite.*

Proof *The energy density of the linear composite is $W_L(x, z) = \chi_1(x)|\frac{\alpha_1}{2}|z|^2 + \chi_2(x)|\frac{\alpha_2}{2}|z|^2$, let \widetilde{W}_L its effective energy density, it has been proved, see for example [L.C], that the optimal bound on \widetilde{W}_L is given in the form $(\widetilde{W}_L - W_1)^*(\eta) \leq A(\eta)$, while we have found*

$$(\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq A(\eta) - \gamma \mathcal{L}(\eta) + o(\gamma^2)|\eta|^{2p-4}.$$

Moreover $W_L \leq W$, then $\widetilde{W}_L - W_1 \leq \widetilde{W} - W_1$ and $(\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq (\widetilde{W}_L - W_1)^*(\eta) \leq A(\eta)$. \square

7 An Upper Bound on \widetilde{W}

Theorem 6 *Under the same hypothesis of theorem 5, for all $r > 0$:*

$$\int_{S_r} (W_2 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\theta_2}{N\alpha_2} \right) r^2 - \frac{\gamma}{p(\alpha_2 - \alpha_1)^p \theta_1^{p-1}} r^p + o(\gamma^2) r^{2p-4}. \quad (7.1)$$

Proof *Since $W(x, z) - W_2(z) = \chi_1(x)(W_1 - W_2)(z)$, then $W_2(z) - W(x, z) = \chi_1(x)(W_2 - W_1)(z) = \chi_1(x)h(z)$, where h is the C^1 convex function given by (5.6) with $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Therefore, we can use (4.10) to get*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) = \inf_{\sigma \in L_{per}^q} \inf_{u \in K_p} \int_Y [-\langle \nabla u + \xi, \sigma \rangle + \chi_1 h^*(\sigma) + W_2(\nabla u + \xi)] dx,$$

given $\eta \in \mathbb{R}^N$, we can chose $\sigma = \eta \chi_1$ and obtain

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W} \leq -\theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} \int_Y [-\langle \nabla u, \eta \rangle \chi_2 + W_2(\nabla u + \xi)] dx,$$

Since $W_2(\nabla u + \xi) = \frac{\alpha_2}{2} (|\nabla u|^2 + 2\langle \nabla u, \xi \rangle + |\xi|^2) + \frac{\gamma}{p} |\nabla u + \xi|^p$ and $\int_Y \langle \nabla u, \xi \rangle = 0$,

then

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) \leq \frac{\alpha_2}{2} |\xi|^2 - \theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} (T_0 + S)(u), \quad (7.2)$$

where $T_0(u) = \int_Y [-\langle \nabla u, \eta \rangle \chi_1 + \frac{\alpha_2}{2} |\nabla u|^2] dx$ and $S(u) = \frac{\gamma}{p} \int_Y |\nabla u + \xi|^p dx$. Since $\inf_{u \in K_p} (T_0 + S)(u) \leq T_0(\hat{u}) + S(0)$, where \hat{u} is the minimizer of T_0 over K_p , we obtain $\inf_{u \in K_p} (T_0 + S)(u) \leq \inf_{K_p} T_0(u) + \frac{\gamma}{p} \|\xi\|^p$, then

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) \leq W_2(\xi) - \theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} T_0(u), \quad (7.3)$$

where the inf is achieved at $u \in K_p$ such that $\alpha_1 \Delta u = \text{div}(\eta \chi_1)$ in Y , then $u = \frac{1}{\alpha_1} \langle \nabla \varphi, \eta \rangle$ and φ the solution of $\Delta \varphi = \chi_1 - \theta_1$ in Y . Therefore, using (5.2) we get

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) \leq W_2(\xi) - \theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) - \frac{1}{2\alpha_2} \int_Y |H\eta|^2 dx,$$

replacing $\eta = \eta/\theta_1$, subtracting $\langle \xi, \eta \rangle$ and taking sup over $\xi \in \mathbb{R}^N$ we obtain

$$(W_2 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq \theta_1 h^*(\eta/\theta_1) - \frac{1}{2\alpha_2 \theta_1^2} \int_Y |H\eta|^2 dx, \quad (7.4)$$

integration over S_r and using (5.3) we have

$$\forall r > 0 : \int_{S_r} (W_2 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq \theta_1 f^*(r/\theta_1) - \frac{\theta_2}{2N\alpha_2 \theta_1} r^2, \quad (7.5)$$

where f^* is the function given by (5.8). Replacing the inequality (5.8) into (7.5) we obtain (7.1). \square

Corollary 3 If \widetilde{W} is isotropic, then $\forall \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$(W_2 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\theta_2}{N\alpha_2} \right) |\eta|^2 - \frac{\gamma}{p(\alpha_2 - \alpha_2)^p \theta_1^{p-1}} |\eta|^p + o(\gamma^2) |\eta|^{2p-4}. \quad (7.6)$$

Corollary 4 Under the same condition of theorem 1, if \widetilde{W} is isotropic, then the upper bound obtained by theorem 6 converges, as $\gamma \rightarrow 0$, to the optimal upper bound of the linear composite.

Proof Following the same notation of corollary 2, it has been proved, see for example [L.C], that the optimal bound on \widetilde{W}_L satisfies $(W_2^0 - \widetilde{W}_L)^*(\eta) \leq B(\eta)$, being $W_2^0(z) = \frac{\alpha_2}{2} |z|^2$, while we have found

$$(W_2 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq B(\eta) - \gamma \mathcal{U}_1(\eta) + o(\gamma^2) |\eta|^{2p-4}.$$

\square

Theorem 7 *Under the same hypothesis of theorem 5 and $0 < \theta_2 < \theta_1$, then $\forall r > 0$:*

$$\begin{aligned} \int_{S_r} (W_0 - \widetilde{W})^*(\eta) &\leq \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\theta_2}{N\alpha_2} \right) r^2 - \frac{\gamma}{p(\alpha_2 - \alpha_1)^p \theta_1^{p-1}} r^q \\ &\quad + \frac{\gamma}{p} \frac{2^p N^{p/2}}{\alpha_2^p} \theta_2 \mathcal{Z}(p) r^p + o(\gamma^2) r^{2p-4}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

being $W_0(z) = \frac{\alpha_2}{2}|z|^2 + 2^{p-1} \frac{\gamma}{p} |z|^p$, and $\mathcal{Z}(p) = \mathcal{C}^p(p)$, where $\mathcal{C}(p)$ is the Calderon-Zygmund-Stein constant given in [TG].

Proof *Following the procedure of the proof of the theorem 6 we had*

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) \leq \frac{\alpha_2}{2} |\xi|^2 - \theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} T_\gamma(u) \quad (7.8)$$

where $T_\gamma(u) = \int_Y [-\langle \nabla u, \eta \rangle \chi_1 + \frac{\alpha_2}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\gamma}{p} |\nabla u + \xi|^p] dx$. Since $|\nabla u + \xi|^p \leq 2^{p-1} |\nabla u|^p + 2^{p-1} |\xi|^p$, we get

$$\widetilde{W}(\xi) \leq W_0(\xi) - \theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} S_\gamma(u),$$

where $S_\gamma(u) = \int_Y [-\langle \nabla u, \eta \rangle \chi_1 + \frac{\alpha_2}{2} |\nabla u|^2 + 2^{p-1} \frac{\gamma}{p} |\nabla u|^p] dx$. We will estimate

$\inf_{u \in K_p} S_\gamma(u) \leq \widetilde{S}_\gamma(u)$ where u is the minimizer of S_0 . Therefore following the notation of theorem 6 we get $u = \frac{1}{\alpha_2} \langle \nabla \varphi, \eta \rangle$ and $\inf_{u \in K_p} S_\gamma(u) \leq -\frac{1}{2\alpha_1} \int_Y |H\eta|^2 +$

$2^{p-1} \frac{\gamma}{p\alpha_2^p} \int_Y |H\eta|^p$, thus

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : (\widetilde{W} - W_0)^*(\xi) \leq -\theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) - \frac{1}{2\alpha_2} \int_Y |H\eta|^2 + \frac{\gamma 2^{p-1}}{p\alpha_2^p} \int_Y |H\eta|^p,$$

replacing $\eta \Rightarrow \eta/\theta_1$, adding $\langle \xi, \eta \rangle$ and taking sup over $\xi \in \mathbb{R}^N$ we get

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N : (W_0 - \widetilde{W})(\eta) \leq \theta_1 h^*(\eta/\theta_1) - \frac{1}{2\alpha_2 \theta_1^2} \int_Y |H\eta|^2 + \frac{\gamma 2^{p-1}}{p\alpha_2^p \theta_1^p} \int_Y |H\eta|^p. \quad (7.9)$$

In [T] has been found $\mathcal{Z}(p) > 0$ such that

$$\int_{S_r} \int_Y |H\eta|^p \leq N^{p/2} \theta_2 \theta_1 (\theta_1^{p-1} + \theta_2^{p-1}) \mathcal{Z}(p) r^p, \quad (7.10)$$

replacing this inequality into (7.9) after having integrated over S_r , and using $0 < \theta_2 < \theta_1$, we finally get (7.7). \square

Corollary 5 *Under the same hypothesis of theorem 5 and $0 < \theta_2 < \theta_1$. If \widetilde{W} is isotropic, then*

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathbb{R}^N : (W_0 - \widetilde{W})^*(\eta) &\leq \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\theta_2}{N\alpha_2} \right) |\eta|^2 - \frac{\gamma}{p(\alpha_2 - \alpha_1)^p \theta_1^{p-1}} |\eta|^p \quad (7.11) \\ &+ \frac{\gamma}{p} \frac{2^p N^{p/2}}{\alpha_2^p} \theta_2 \mathcal{Z}(p) |\eta|^p + o(\gamma^2) |\eta|^{2p-4}, \end{aligned}$$

being $W_0(z) = \frac{\alpha_2}{2} |z|^2 + 2^{p-1} \frac{\gamma}{p} |z|^p$, and $\mathcal{Z}(p) = \mathcal{C}^p(p)$, where $\mathcal{C}(p)$ is the Calderon-Zygmund-Stein constant given in [TG].

Proof *Same proof of corollary 4.* \square

Summary of Bounds

Let \widetilde{W} be the effective energy density of the Willis-composite, \widetilde{W}_L is the effective energy density of the linear composite, and B_l, B_u are the optimal lower and upper bounds respectively of the linear composite

It is known that

$$(\widetilde{W}_L - W_1)^*(\eta) \leq B_l(|\eta|)$$

and

$$(W_2 - \widetilde{W}_L)^*(\eta) \leq B_u(|\eta|),$$

where

$$B_l(t) = \frac{1}{2\theta_2} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{\theta_1}{N\alpha_1} \right) t^2 = a_1 t^2$$

and

$$B_u(t) = \frac{1}{2\theta_1} \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\theta_2}{N\alpha_2} \right) t^2 = a_2 t^2.$$

Then the bounds for the Willis-composite can be written as:

(a) In the anisotropic Willis-composite. For all $r > 0$:

$$\int_{S_r} (\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) ds \leq B_l(r) + \gamma M_1(r) + o(\gamma^2)$$

and

$$\oint_{S_r} (W^0 - \widetilde{W})^*(\eta) ds \leq B_u(r) + \gamma M_2(r) + o(\gamma^2),$$

where

$$W^0(Z) = \frac{\alpha_2}{2}|Z|^2 + \left(\frac{p-1}{p}\right) (\theta_1\theta_2)^{1/2}\gamma|p|^p.$$

(b) In the isotropic Willis-composite. For all $\eta \in \mathbb{R}^N$:

$$(\widetilde{W} - W_1)^*(\eta) \leq B_l(|\eta|) + \gamma M_1(|\eta|) + o(\gamma^2) \quad (7.12)$$

and

$$(W^0 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq B_u(|\eta|) + \gamma M_2(|\eta|) + o(\gamma^2) \quad (7.13)$$

For both cases (a) and (b) : $M_1(t) = -b_1 t^p$ and $M_2(t) = b_2 t^p$ where

$$b_1 = \frac{1}{p}(\alpha_2 - \alpha_1)^{-p}\theta_2^{p-1}$$

$$b_2 = (p-1)\alpha_2^{-p}[C(p)]^p(\theta_1\theta_2)^{1/2}\theta_1^{-p}N^p - \frac{1}{p}\theta_1^{-p+1}(\alpha_2 - \alpha_1)^{-p}$$

Summary and Conclusions

In the isotropic case the bounds (7.11) and (7.12) implies the bounds:

$$\phi_l(|\eta|, \gamma, \theta_1) \leq \widetilde{W}(|\eta|, \gamma, \theta_1) \leq \phi_u(|\eta|, \gamma, \theta_1)$$

for all $r > 0$ and $\theta_1 \in [0, 1]$.

We have that

$$\phi_l(t, \gamma, \theta_1) = \frac{\alpha_1}{2}t^2 - \bar{s}t - a_1\bar{s}^2 + \gamma b_1\bar{s}^p$$

where

$$\bar{s} = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta_1 = 1 \\ (\alpha_2 - \alpha_1)^{-\frac{1}{p}}, & \text{if } \theta_1 = 0 \end{cases}$$

For all $\theta_1 \in (0, 1)$: \bar{s} satisfies

$$pb_1\gamma\bar{s}^{p-1} - 2a_1\bar{s} + t = 0.$$

On the other hand

$$\phi_u(t, \gamma, \theta_1) = \frac{\alpha_2}{2}t^2 - + \frac{p-1}{p}\gamma(\theta_1\theta_2)^{1/2}t^p - \bar{s}t + a_2\bar{s}^2 + \gamma b_2\bar{s}^p$$

where

$$\bar{s} = \begin{cases} 0, & \text{if } \theta_1 = 0 \\ (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}t, & \text{if } \theta_1 = 1 \end{cases}$$

for all $\theta_1 \in (0, 1)$: \bar{s} satisfies

$$pb_2\gamma\bar{s}^{p-1} + 2a_2\bar{s} - t = 0.$$

Notice that $\widetilde{W}(\cdot, 0, \theta_1) = \widetilde{W}_l(\cdot, \theta_1)$ and that $\phi_l(\cdot, 0, \cdot)$, $\phi_u(\cdot, 0, \cdot)$ are the optimal, respectively, lower and upper bounds of the isotropic linear composite.

Acknowledgement: The authors; want to thank Vincenzo Constenzo Alvarez of the Universidad Simón Bolívar, Department of Physics, for having revised this paper and Oswaldo Araujo of the University of the Andes, Faculty of Science, Department of Mathematics who helped this paper to be published in these Bulletin. Likewise, we thank Mr. Antonio Vizcaya P. for transcription it.

References

- [1] **B.Bergman.** *Bulk Physical Properties of a Composite Media.* lectures Notes. L'Ecole d'ete' de Analyse Numerique, 1983.
- [2] **A. Braides.** *Omogeneizzazione di Integrali non Coercive.* Estratto de Ricerche di Matematica, Volume XXXII, pp.347, 1983.
- [3] **R.Burridge, S.Childress, G.Papanicolaou.** *Macroscopic Properties of Disordered Media.* Spronger-Verlag, New York, 1982.
- [4] **I.Ekland,R.Temam.** *Convex Analysis and variational Problems.* North Holland, 1976.
- [5] **G.Dell'Antonio.** *Non-linear Electrostatic in Inhomogeneous Media.* Preprint, Dipartimento di Matematica, Universita' di Roma, La Sapienza, Italia, 1987.

- [6] **Alexander A. Denkov, Alexandra Navrotsky.** *Materials Fundamentals of Gate Dielectrics.* Springer, 2005.
- [7] **Karls Heins Bennomann.** *Superconductivity.* Volume I. Springer, 2008.
- [8] **K.Lurie, A.Cherkaev.** *Exact Estimates of Conductivity of Composites Formed by two Isotropic Conducting Media Taken in Prescribed Proportion.* Proc. Royal Soc. Edimburg, 29A, pp.71-87,1984.
- [9] **Prez L., Len A., Bruno J.** *About the Improvement of Variational Bounds for Nonlinear Composite Dielectric.* **Material Letters. Volume 59. Issue 12. 2005, pp. 1552-1557.**
- [10] **Hashin, Shtrikman.** *A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multi-phase Materials.* **J.Appl.Phys,33,pp.3125-3131, 1962.**
- [11] **Milkis M.** *Effective Dielectric Constants of a Non-linear Composite Material.* **SIAM J. Appl, Math. Vo. 43, Oct. 1983.**
- [12] **Mura T..** *Micro-mechanics of Defects in Solids.* **1987.**
- [13] **Milton W.** *Advances in Mathematical Modeling of Composite Materials, Heterogeneous Media.* **Advances in Mathematical for Applied Sciences. 2002.**
- [14] **Yves-Patricck Pellegrini.** *Self-consistent Effective-medium Approximation for Strongly Nonlinear Media.* **Phis.Rev B. Vol. 64, 2001.**
- [15] **Dong-Hau Kuo, Wun-Ku Wang.** *Dielectric Properties of three Ceramic Epoxy Composites.* **Materials Chemistry and Physics. Volume 85. Issue 1, 2004, pages 201-206.**
- [16] **Talbot D., Willis Jr.** *Bounds for the Effective Constitutive Relation of Nonlinear Composites.* **SC. The Royal Society. 10, pp. 1098.1309.**
- [17] **S.Talbot, J.Willis.** *Variational Principles for Inhomogeneous Non-linear Media.* **IMA, Journal of Applied Mathematics, 35,pp. 39-54, 1985.**
- [18] **G. Tepedino, J. Quintero, E. Marquina.** *An application of the Theory of Calderon-Zygmund to the Sciences of the Materials.* **Journal of Mathenatical Control Science and Applications (JMCSA). Vol.5, N.1, June 2012, pp, 11-18.)**
- [19] **G.Tepedino.** *Bounds on the Effective Energy Density of Nonlinear Composites.* **Doctoral Thesis, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1988.**

-
- [20] **Hung T. Vo and Frank G. Shi** *Towards Model-Based Engineering of Optoelectronic Packing Materials: Dielectric Constant Modeling*. **Microelectronics Journal**. Volume 33. Issues 5-6, 2002, pages 409-415.
- [21] **J. Willis**. *Variational and Related Methods for the Overall Properties of Composites*. **Advanced in Applied Mechanics**. Academic Press, Vol. 21, 1981.
- [22] **Zhou C., Neese B., Zhang Q., Baur F.** *Relaxers Ferroelectric Poly(Vinylidene fluoride-trifluororthylene-chlofluoroethylene) Terpolymer for High Energy Density Storage Capacitors*. **Dielectrics and Electrical Insulation, IEEE Transaction** . Vol 13, Issue 5, 2006.

Gaetano Tepedino Aranguren,
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias,
Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela.

Javier Quintero C.
Área de Matemática,
Universidad Nacional Abierta de Mérida.

Eribel Marquina.
Área de Matemática,
UNEFA, Mérida.

Bounds on the effective energy density of a special class p -dielectric

Gaetano Tepedino Aranguren, Javier Quintero C,
Eribel Marquina, José Soto

Abstract. This work gives lower and upper bounds on the effective energy density \widetilde{W} of a two phase composites material composed by a periodical mixed of two nonlinear homogeneous isotropic dielectric materials in prescribed proportion. These bounds are given as a function of θ , which is the volume fraction of the material with lowest dielectric constant in the mixture. The dielectric constant conductivity of the k -material are given respectively by

$$\nu_1(z) = \alpha_1|z|^{p-2}, \quad \nu_2(z) = \alpha_2|z|^{p-2},$$

where $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ and $1 < p < \infty$.

For anisotropic composites the bounds are given in the form

$$\Phi(p, r, \theta) \leq \int_{S_r} \widetilde{W} \leq \Psi(p, r, \theta),$$

where the functions Φ, Ψ reduce smoothly to the optimal lower and upper bound of the linear composite when $p \rightarrow 2$.

The method to obtain this bounds, in the case $p \neq 2$, follows a generalization of the Hashin–Shtrikman variational principles constructed from a comparison medium which is in general nonlinear and reduces to linear when $p = 2$.

Resumen. Este trabajo da cotas inferiores y superiores para la densidad de energía eficaz \widetilde{W} de un material compuesto de dos fases, constituido por una mezcla periódica de dos materiales dieléctricos isotrópicos homogéneos no lineales en proporción prescrita. Estas cotas son dadas como una función de θ , que es la fracción de volumen del material con constante dieléctrica más bajo en la mezcla. La constante dieléctrica de conductividad del k -material se dan, respectivamente, por

$$\nu_1(z) = \alpha_1|z|^{p-2}, \quad \nu_2(z) = \alpha_2|z|^{p-2},$$

donde $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ y $1 < p < \infty$.

Para compuestos anisotrópicos los límites se dan en la forma

$$\Phi(p, r, \theta) \leq \int_{S_r} \tilde{W} \leq \Psi(p, r, \theta),$$

donde las funciones Φ, Ψ se reducen suavemente a la cota inferior y superior del compuesto lineal cuando $p \rightarrow 2$.

El método para obtener estas cotas, en el caso $p \neq 2$, sigue de una generalización de los principios variacionales de Hashin–Shtrikman construido a partir de un medio de comparación que es en general no lineal y se reduce al lineal cuando $p = 2$.

1 Introduction

In this work we will follow the Y –periodic microstructure of the mixture, been

Y the cell $\prod_{i=1}^N (0, a_i)$, $\{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subset (0, \infty)$, if θ_k , for $k \in \{1, 2\}$, is the proportion of material type k in the mixed, $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ and χ_k is the characteristic function of the phase Y_k which only contains material k , then $\theta_k = \int_Y \chi_k$, $0 \leq \theta_k \leq 1$ and $\theta_1 + \theta_2 = 1$. Following the notation of [T.Q.M.S],

the *energy density* of the composite is the Y –periodic extension of the function $W : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$$\begin{aligned} W(x, z) &= \chi_1(x)W_1(z) + \chi_2(x)W_2(z), \quad \text{where} \\ W_k(z) &= \frac{\alpha_k}{p}|z|^p, \quad \text{and } 0 < \alpha_1 < \alpha_2, 1 < p < \infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

In [T.Q.M.S] has been proved that the *effective energy density* and its dual are given respectively by the variational principles:

$$\tilde{W}(\xi) = \inf_{v \in V_p} \int_Y W(x, v + \xi) dx, \quad \tilde{W}^*(\eta) = \inf_{\sigma \in S_q} \int_Y W^*(x, \sigma + \eta) dx, \quad (1.2)$$

where V_p is the completion of $C_{per}^1(\bar{Y}, \mathbb{R}^n)$ under the L_p –norm and S_q is the completion of $\mathfrak{R} = \{\sigma \in C_{per}^1(Y, \mathbb{R}^N) : \int_Y \sigma = \theta \text{ and } \operatorname{div}(\sigma) = 0 \text{ in } Y\}$ under the L_q –norm. Notice that $v \in V_p \iff v = \nabla u$ for some $u \in K_p$. Here K_p is the

completion of $C_{per}^1(\bar{Y})$ under the norm $\|u\|_{1,p} = \left(\int_Y |u|^p dx + \int_Y |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$.

Also we have $V_p^\perp = S_q \oplus CV$, where CV are the constants vector fields. See [T.Q.M.S] for a complete description of definitions and properties of these spaces.

2 Existence of \widetilde{W} , Γ -convergence and Homogenization

Lemma 1 *The function $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ defined by (1.1) satisfies:*

- (1) $\forall z \in \mathbb{R}^N : W(\cdot, z)$ is Y -periodic and measurable.
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}^N : W(x, \cdot)$ is $C^1(\mathbb{R}^n)$ and strictly convex.
- (3) $\forall x, z \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \frac{\alpha_1}{p} |z|^p \leq W(x, z) \leq \frac{\alpha_2}{p} |z|^p$.
- (4) $\exists L \geq 0$ such that $\forall x, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N : |W(x, z_1)^{1/p} - W(x, z_2)^{1/p}| \leq L|z_1 - z_2|$

Proof *The items (1) to (3) are direct consequences of 1.1. In other hand let $\beta_k = (\alpha_k)^{1/p}$, then $W(x, z_k)^{1/p} = \beta_1 \chi_1(x) |z_k| + \beta_2 \chi_2(x) |z_k|$ and $W(x, z_1)^{1/p} - W(x, z_2)^{1/p} = \beta_1 \chi_1(x) (|z_1| - |z_2|) + \beta_2 \chi_2(x) (|z_1| - |z_2|)$, therefore $|W(x, z_1)^{1/p} - W(x, z_2)^{1/p}| \leq L(|z_1| - |z_2|) \leq L|z_1 - z_2|$. \square*

Lemma 2 *If W is the function defined by 1.1, then \widetilde{W} and \widetilde{W}^* are given by 1.2.*

Proof *These are consequences of lema 1 and the articles [M.M] , [G.DA] . \square*

Lemma 3 *(Elementary Bounds)*

If W is defined by 1.1, \widetilde{W} is defined by 1.2 and $p^{-1} + q^{-1} = 1$, then

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{p} \left(\theta_1 \alpha_1^{-q/p} + \theta_2 \alpha_2^{-q/p} \right)^{-p/q} |\xi|^p \leq \widetilde{W}(\xi) \leq \frac{1}{p} (\theta_1 \alpha_1 + \theta_2 \alpha_2) |\xi|^p. \quad (2.1)$$

These bounds are called The Elementary Lower and Upper Bounds on \widetilde{W} .

Proof *Since the null vector field belongs to V_p , then from 1.2 we obtain*

$$\widetilde{W}(\xi) \leq \int_Y W(x, \xi) dx = \theta_1 \frac{\alpha_1}{p} |\xi|^p + \theta_2 \frac{\alpha_2}{p} |\xi|^p = \frac{1}{p} (\theta_1 \alpha_1 + \theta_2 \alpha_2) |\xi|^p. \quad (2.2)$$

In other hand since the null vector field belongs to S_q , then from 1.2 we get

$$\widetilde{W}^*(\eta) \leq \int_Y W^*(x, \eta) dx = \theta_1 W_1^*(\eta) + \theta_2 W_2^*(\eta) = \frac{1}{q} \left(\theta_1 \alpha_1^{-q/p} + \theta_2 \alpha_2^{-q/p} \right) |\eta|^q, \quad (2.3)$$

from this, using a typical result of convex analysis, see for example [E, T] , we get

$$\widetilde{W}(\xi) \geq \frac{1}{p} \left(\theta_1 \alpha_1^{-q/p} + \theta_2 \alpha_2^{-q/p} \right)^{-p/q} |\xi|^p,$$

from this last inequality and 2.2 we obtain 2.1. \square

Lemma 4 *Under the same hypothesis of lemma 3 we have:*

$$\forall x, \xi \in \mathbb{R}^N : W(x, \xi) - W_1(\xi) = \chi_2(x)h(\xi), \quad W_2(\xi) - W(x, \xi) = \chi_1(x)h(\xi) \quad (2.4)$$

$$\forall x, \eta \in \mathbb{R}^N : W_1^*(\eta) - W^*(x, \eta) = \chi_2(x)g(\eta), \quad W^*(x, \eta) - W_2^*(\eta) = \chi_1(x)g(\eta) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : h(\xi) &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{p} |\xi|^p, \quad h^*(\eta) = \frac{\beta}{q} |\eta|^q, \\ g(\eta) &= \frac{\beta_1 - \beta_2}{q} |\eta|^q, \quad g^*(\xi) = \frac{\kappa}{p} |\xi|^p \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{where } \beta_k^p \alpha_k^q = 1, \quad \beta^p (\alpha_2 - \alpha_1)^q = 1, \quad \text{and } \kappa^q (\beta_1 - \beta_2)^p = 1. \quad (2.7)$$

Proof *From 1.1 we get $W - W_1 = \chi_1 W_1 + \chi_2 W_2 - \chi_1 W_1 - \chi_2 W_1 = \chi_2 (W_2 - W_1)$, then $h(z) = (W_2 - W_1)(z) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{p} |z|^p$ which is a convex function, and $h^*(z) = \frac{\beta}{q} |z|^q$ where $\beta^p (\alpha_2 - \alpha_1)^q = 1$. Moreover $W_2 - W = \chi_1 W_2 + \chi_2 W_2 - \chi_1 W_1 - \chi_2 W_2 = \chi_1 (W_2 - W_1)$.*

In other hand $W^ = \chi_1 W_1^* + \chi_2 W_2^*$ and $W_k^*(z) = \frac{\beta_k}{q} |z|^q$ where $\beta_k^p \alpha_k^q = 1$. Therefore $W^* - W_2^* = \chi_2 (W_2^* - W_1^*)$ and $W_1^* - W^* = \chi_2 (W_1^* - W_2^*)$, then $g(z) = (W_1^* - W_2^*)(z) = \frac{\beta_1 - \beta_2}{q} |z|^q$ and $g^*(z) = \frac{\kappa}{p} |z|^p$ where $\kappa^q (\beta_1 - \beta_2)^p = 1$. \square*

Lemma 5 *Under the same hypothesis of lemma 1 we have:*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) = \inf_{\sigma \in L_{per}^q} \inf_{u \in K_p} \int_Y [-\langle \nabla u + \xi, \sigma \rangle + \chi_1(x)h^*(\sigma) + W_2(\nabla u + \xi)] dx, \quad (2.8)$$

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}^*(\eta) = \inf_{\zeta \in L_{per}^p} \inf_{\sigma \in S_q} \int_Y [-\langle \sigma + \eta, \zeta \rangle + \chi_2(x)g^*(\zeta) + W_1^*(\sigma + \eta)] dx. \quad (2.9)$$

Proof *These variational principles are consequences of theorem 3 of the article [T.Q.M.S] and the lemma 4. \square*

Lemma 6 *Let φ is a Y -periodic solution of $\Delta \varphi = \chi_k - \theta_k$ in Y , H its Hessian matrix, $\delta \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\eta \in \mathbb{R}^N$ and $u = \delta \langle \nabla \varphi, \eta \rangle$, then*

$$u \in K_p, \quad \nabla u = \delta H \eta, \quad \int_Y H \chi_k = \int_Y H^2, \quad \int_Y \langle \nabla u, \eta \rangle \chi_k = \delta \int_Y |H \eta|^2, \quad (2.10)$$

$$\int_{S_r Y} |H \eta|^2 = \frac{r^2}{N} \theta_1 \theta_2. \quad (2.11)$$

Proof *See for example the theorem 4 of [T.Q.M.S]. \square*

Lemma 7 *If $2 \leq p < \infty$, $r > 0$ and H as in the lemma 6, then*

$$\mathcal{G}(p, r) = \iint_{S_r Y} |H\eta|^p \leq \frac{r^2}{N} \theta_1 \theta_2 + (p-2) N^{\frac{p+1}{2}} \theta_1 \theta_2 \mathcal{Z}(p) (r^2 + r^{p+1}), \quad (2.12)$$

where $\mathcal{Z}(p) = \mathcal{C}^{p+1} (p+1)$ and \mathcal{C} is the Calderon-Zygmund-Stein constant given in [T.Q.M]. \square

Proof *Using the corollary 3 of [T.Q.M] there is $t \in [2, p]$ such that*

$$\mathcal{G}(p, r) \leq \mathcal{G}(2, r) + (p-2) N^{\frac{t+1}{2}} r^{t+1} \mathcal{C}^{t+1} (t+1) \theta_1 \theta_2 (\theta_1^t + \theta_2^t). \quad (2.13)$$

Clearly $\mathcal{C}^{t+1} (t+1) \leq \mathcal{C}^{p+1} (p+1) = \mathcal{Z}(p)$, $\theta_k^t \leq \theta_k^2 \leq \theta_k$ then $\theta_1^t + \theta_2^t \leq 1$ and $N^{(t+1)/2} \leq N^{(p+1)/2}$, then using 2.11 and 2.13 we get 2.12. \square

Lemma 8 *Given $N \in \mathbb{N}$, $2 \leq p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $0 < \epsilon < 1$ and $s \geq 0$, then $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$:*

$$\frac{1}{p} |x+y|^p \leq \frac{1}{p} [1 + (p-1)(p-2)2^{p-2}] |x|^p + \langle x, y \rangle |x|^{p-2} + \frac{1}{q} (p-1) 2^{p-2} \epsilon^{-sp/2} |y|^p. \quad (2.14)$$

Proof *If $p > 2$ the function $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ given as $F(x) = \frac{1}{p} |x|^p$ is of class $C^2(\mathbb{R}^N)$, then given $x, y \in \mathbb{R}^N$ there is $t \in [0, 1]$ such that $F(x+y) = F(x) + \langle \nabla F(x), y \rangle + \frac{1}{2} \langle A(z)y, y \rangle$ where $z = x+ty$ and $A(z)$ is the Hessian matrix of F at z . We have $\nabla F(x) = |x|^{p-2} x$ and $A(z) = I|z|^{p-2} + (p-2)B(z)|z|^{p-4}$, where I is the identity matrix and $B(z)$ is the matrix $((z_i, z_j))$, clearly the greatest eigenvalue of $B(z)$ is $|z|^2$, the greatest eigenvalue of $A(z)$ is $(p-1)|z|^{p-2}$, then $\frac{1}{2} \langle A(z)y, y \rangle \leq \frac{1}{2} |y|^2 |z|^{p-2}$. Using a standard inequality gives $|y|^2 |z|^{p-2} = (\epsilon^{-s} |y|^2) (\epsilon^s |z|^{p-2}) \leq \frac{2}{p} \epsilon^{-sp/2} |y|^p + \frac{p-2}{p} \epsilon^{sp/p-2} |z|^p \leq \frac{2}{p} \epsilon^{-sp/2} |y|^p + \frac{p-2}{p} \epsilon^{sp/p-2} 2^{p-1} (|x|^p + |y|^p) = \frac{p-2}{p} \epsilon^{sp/p-2} 2^{p-1} |x|^p + \frac{2}{p} (\epsilon^{-sp/2} + (p-2) \epsilon^{sp/p-2} 2^{p-2}) |y|^p$, then*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle A(z)y, y \rangle &\leq \frac{(p-1)}{p} (p-2) \epsilon^{sp/p-2} 2^{p-2} + \\ &+ \frac{(p-1)}{p} \left(\epsilon^{-sp/2} + (p-2) \epsilon^{sp/p-2} 2^{p-2} \right) |y|^p, \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} |x+y|^p &\leq \frac{1}{p} \left(1 + (p-1)(p-2) \epsilon^{sp/p-2} 2^{p-2} \right) |x|^p + \\ &+ \frac{1}{q} \left(\epsilon^{-sp/2} + (p-2) \epsilon^{sp/p-2} 2^{p-2} \right) |y|^p + \\ &+ \langle x, y \rangle |x|^{p-2}. \end{aligned}$$

Since $0 < \epsilon < 1, s > 0$ and $p > 2$, then $\epsilon^{sp/p-2} \leq 1, 2^{p-2} > 1, 1 \leq \epsilon^{-sp/2}$ and $\epsilon^{-sp/2} + (p-2)\epsilon^{sp/p-2}2^{p-2}2^{p-2} < \epsilon^{-sp/2} + (p-2)2^{p-2} < \epsilon^{-sp/2}2^{p-2}(p-2)\epsilon^{-sp/2}2^{p-2} = (p-1)\epsilon^{-sp/2}2^{p-2}$. From this we obtain 2.14. We notice that in the special case $p = 2$ we have $\frac{1}{2}|x+y|^2 = \frac{1}{2} + \langle x, y \rangle + \frac{1}{2}|y|^2 \leq \frac{1}{2}|x|^2 + \langle x, y \rangle + \frac{1}{2}\epsilon^{-s}|y|^2$, therefore the inequality 2.14 is also true when $p = 2$. \square

Lemma 9 Given $\gamma_1 \in \mathbb{R}, \gamma_2 > 0, \eta \in \mathbb{R}^N$ and $T_2 : K_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ defined as

$$T_2(u) = \int_Y \left[\gamma_1 \langle \nabla u, \eta \rangle \chi_k + \frac{\gamma_2}{2} |\nabla u|^2 \right] dx, \text{ then } \inf_{u \in K_2} T_2(u) = T_2(\hat{u}), \text{ where } \hat{u} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \langle \nabla \varphi, \eta \rangle \text{ and } \varphi \text{ is the } Y\text{-periodic solution of } \Delta \varphi = \chi_k - \theta_k \text{ in } Y.$$

Proof Clearly T_2 is a proper strictly convex function and G^1 -differentiable on the reflexive Banach space K_2 . By the used of the Poincaré inequality we can prove that $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} T_2(u) = +\infty$, therefore there is an unique minimizer $\hat{u} \in K_2$ which satisfies $\forall u \in K_2 : DT_2(\hat{u}, u) = 0$. Since $DT_2(\hat{u}, u) = \int_Y [\gamma_1 \langle \nabla u, \eta \rangle \chi_k + \gamma_2 \langle \nabla u, \nabla \hat{u} \rangle] = \int_Y \langle \nabla u, \gamma_1 \eta \chi_k + \gamma_2 \nabla \hat{u} \rangle$, then $\int_Y \operatorname{div} (\gamma_1 \eta \chi_k + \gamma_2 \nabla \hat{u}) u dx = 0$, hence $\gamma_2 \delta \hat{u} = -\operatorname{div} (\gamma_1 \eta \chi_k)$ in Y , from here we get the expected result. \square

Lemma 10 Given $\gamma_1 \in \mathbb{R}, \gamma_2 > 0, \xi \in \mathbb{R}^N$ and $M_2 : S_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ defines as

$$M_2(\sigma) = \int_Y \left[\gamma_1 \langle \sigma, \xi \rangle \chi_k + \frac{\gamma_2}{2} |\sigma|^2 \right] dx, \text{ then } \inf_{\sigma \in S_2} M_2(\sigma) = M_2(\hat{\sigma}), \text{ where } \hat{\sigma} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (H\xi - (\chi_k - \theta_k)\xi) \text{ and } H \text{ is the Hessian matrix of the } Y\text{-periodic solution of } \Delta \varphi = \chi_k - \theta_k \text{ in } Y.$$

Proof Clearly M_2 is a proper strictly convex function which is G^1 -differentiable and coercive (Poincaré inequality) on the reflexive Banach space S_2 , therefore there is an unique minimizer $\hat{\sigma}$ which satisfies $\forall \sigma \in S_2 : DM_2(\hat{\sigma}, \sigma) = 0$, since $DM_2(\hat{\sigma}, \sigma) = \int_Y [\gamma_1 \langle \sigma, \xi \rangle \chi_k + \gamma_2 \langle \sigma, \hat{\sigma} \rangle] dx = \int_Y \langle \sigma, \gamma_1 \xi \chi_k + \gamma_2 \hat{\sigma} \rangle dx$, then $(\gamma_1 \xi \chi_k + \gamma_2 \hat{\sigma}) \in S_2^\perp = V_2 \oplus CV$, then there is $u \in K_2$ and $c \in \mathbb{R}^N$ such that $\gamma_1 \xi \chi_k + \gamma_2 \hat{\sigma} = \nabla u + c$. Since $\operatorname{div}(\hat{\sigma}) = 0$ in Y we have $\Delta u = \operatorname{div}(\gamma_1 \xi \chi_k)$, that is $u = \gamma_1 \langle \nabla \varphi, \xi \rangle$ where φ is the Y -periodic solution of $\Delta \varphi = \chi_k - \theta_k$ in Y . Since $\nabla u = \gamma_1 H\xi$, then $\gamma_1 \xi \chi_k + \gamma_2 \hat{\sigma} = \gamma_1 H\xi + c$. From the fact $\int_Y \hat{\sigma} = \theta$, we obtain $\gamma_1 \xi \theta_k = c$ and $\hat{\sigma} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (H\xi - (\chi_k - \theta_k)\xi)$. \square

3 An Upper Bound on \widetilde{W} when $2 \leq p < \infty$

Theorem 1 *Given W and \widetilde{W} as 1.1 and 1.2, then if $2 \leq p < \infty$ and $p^{-1} + q^{-1} = 1$ we have*

$$\forall r > 0, t > 0 : \int_{S_r} (W^0 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq \mathcal{F}_1(p, \theta, r, t) = ar^q - br^2t - cr^2t^p + d(r^2 + r^{p+1})t^p, \quad (3.1)$$

$$\text{where } W^0(\xi) = \frac{C^0}{p} |\xi|^p, \quad C^0 = \alpha_2 [1 + (p-1)(p-2)2^{p-2}] \quad (3.2)$$

$$\text{and } a = \frac{\beta}{q\theta_1^{p-1}}, \quad b = \frac{\theta_2^{2-2/p}}{N\alpha_2\theta_1^{2/p}}, \quad c = \frac{(p-1)2^{p-2}\theta_2}{Nq\theta_1^{p-1}\alpha_2^{p-1}}, \quad d = \frac{(p-1)(p-2)2^{p-2}\theta_1\theta_2 N^{(p+1)/2} \mathcal{Z}(p)}{\theta_1^{p-1}\alpha_2^{p-1}}. \quad (3.3)$$

Proof *We will use the variational principle 2.8 where h is given by 2.6. Given $\eta \in \mathbb{R}^N$ and $\sigma(x) = \chi_1(x)\eta$ we have*

$$\forall \xi \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) \leq \theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} \int_Y [-\langle \nabla u, \eta \rangle \chi_1(x) + W_2(\nabla u + \xi)] dx. \quad (3.4)$$

Using lemma 8 with $x = \xi, y = \nabla u$ and $s = 2 - 4/p$ we get

$$W_2(\nabla u + \xi) \leq \frac{\alpha_2}{p} [1 + (p-1)(p-2)2^{p-2}] + \alpha_2 \langle \xi, \nabla u \rangle |\xi|^{p-2} + \frac{\alpha_2}{q} (p-1)2^{p-2} \epsilon^{2-p} |\nabla u|^p,$$

substituting this into 3.4 we obtain

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) - W^0(\xi) \leq -\theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} T_p(u), \quad (3.5)$$

$$\text{where } T_p(u) = \int_Y [-\langle \nabla u, \eta \rangle \chi_1 + \frac{\alpha_2}{q} (p-1)2^{p-2} \epsilon^{2-p} |\nabla u|^p] dx.$$

It is known that $\inf_{u \in K_2} T_2(u) = T_2(\tilde{u})$ where $\tilde{u} = \frac{1}{\alpha_2} \langle \nabla \varphi, \eta \rangle$ being φ the Y -periodic solution of $\Delta \varphi = \chi_1 - \theta_1$, then $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned} \inf_{u \in K_p} T_p(u) &\leq T_p(t(\theta_1\theta_2)^{1-p/2}\tilde{u}) = \\ &\leq \int_Y \left[-t(\theta_1\theta_2)^{1-2/p} \langle \nabla \tilde{u}, \eta \rangle \chi_1 + \frac{\alpha_2}{q} (p-1)2^{p-2} \epsilon^{2-p} t^p (\theta_1\theta_2)^{p-2} |\nabla \tilde{u}|^p \right] dx. \end{aligned}$$

If H is the Hessian matrix of φ , then using the lemma 6 and replacing 2.10 into the last inequality we obtain that $\forall t > 0$:

$$\inf_{u \in K_p} T_p(u) \leq \int_Y \left[-\frac{t}{\alpha_2} (\theta_1 \theta_2)^{1-2/p} |H\eta|^2 + \frac{p-1}{q} 2^{p-2} \epsilon^{2-pt} \frac{(\theta_1 \theta_2)^{p-2}}{\alpha_2^{p-1}} |H\eta|^p \right] dx, \quad (3.6)$$

choosing $\epsilon = \theta_1 \theta_2$ and replacing 3.6 into 3.5 we get $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0$:

$$\begin{aligned} (\widetilde{W} - W^0)(\xi) &\leq -\theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) - t \frac{(\theta_1 \theta_2)^{1-2/p}}{\alpha_2} \int_Y |H\eta|^2 dx + \\ &\quad + \frac{p-1}{q} 2^{p-2} \frac{t^p}{\alpha_2^{p-1}} \int_Y |H\eta|^p dx, \end{aligned}$$

replacing $\eta = \eta/\theta_1$, adding $\langle \xi, \eta \rangle$ to both sides of the last result and taking sup over $\xi \in \mathbb{R}^N$ we obtain $\forall \eta \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0$:

$$(W^0 - \widetilde{W})^*(\eta) \leq \theta_1 h^*(\eta/\theta_1) - \frac{t\theta_2^{1-2/p}}{\alpha_2 \theta_1^{1+2/p}} \int_Y |H\eta|^2 dx + \frac{p-1}{q} 2^{p-2} \frac{t^p}{\alpha_2^{p-1} \theta_1^p} \int_Y |H\eta|^p dx. \quad (3.7)$$

Given $r > 0$, integrating both sides of 3.7 over S_r and using 2.11 of lemma 6 and 2.12 of lemma 7 we obtain 3.1, 3.2 and 3.3. \square

Theorem 2 Under the same hypothesis of theorem 1, given \mathcal{F}_1 and C^0 by 3.1 and 3.2, then:

$$\forall r > 0 : \int_{S_r} \widetilde{W} \leq \frac{1}{p} \left[C^0(p) - (qA_1(p))^{1-p} \right] r^p, \quad \text{where} \quad (3.8)$$

$$A_1(p) = \inf_{r>0} \inf_{t>0} r^{-q} \mathcal{F}_1(p, r, t). \quad (3.9)$$

Proof Since $\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall r > 0 : W^0(r\xi) = r^p W^0(\xi)$ and $\widetilde{W}(r\xi) = r^p \widetilde{W}(\xi)$, then $(W^0 - \widetilde{W})(r\xi) = r^p (W^0 - \widetilde{W})(\xi)$ and $(W^0 - \widetilde{W})^*(r\eta) = r^q (W^0 - \widetilde{W})^*(\eta)$, hence $(W^0 - \widetilde{W})^*(\eta) = r^{-q} (W^0 - \widetilde{W})^*(\eta)$ and by 3.1 we obtain

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (W^0 - \widetilde{W})^*(\eta) ds(\eta) &= r^q \int_{S_1} (W^0 - \widetilde{W})^*(r\eta) ds(\eta) \\ &= r^{-q} \int_{S_r} (W^0 - \widetilde{W})^* \leq r^{-q} \mathcal{F}_1(p, r, t), \end{aligned}$$

therefore $\int_{S_1} (W^0 - \widetilde{W})^* \leq A_1(p)$, where A_1 is given by 3.9.

In other hand, $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : (W^0 - \widetilde{W}^*)(\eta) \geq \langle \xi, \eta \rangle - W^0(\xi) + \widetilde{W}(\xi)$. Let $\eta \neq \theta, r > 0$ and $\xi = r\eta/|\eta|$, we get $(W^0 - \widetilde{W}^*)(\eta) \geq r|\eta| - W^0(r|\eta/|\eta|) + \widetilde{W}(r\eta/|\eta|) = r|\eta| - \frac{C^0}{p} r^p + r^p \widetilde{W}(\eta/|\eta|)$, integrating over S_1 we obtain $A_1(p) \geq r - \frac{C^0}{p} r^p + r^p \int_{S_1} \widetilde{W}$, from this $\int_{S_1} \widetilde{W} \leq \frac{C^0}{p} - r^{1-p} + r^{-p} A_1(p)$, then $\int_{S_1} \widetilde{W} \leq \frac{C^0}{p} \inf_{r>0} \{-r^{1-p} + r^{-p} A_1(p)\} = \frac{C^0}{p} + \widehat{r}^{1-p} + A_1(p) \widehat{r}^{-p}$ where $\widehat{r} = qA_1(p)$, the substitution gives the estimation 3.9 with $r = 1$, then $\int_{S_r} \widetilde{W}(\xi) ds(\xi) = \int_{S_1} \widetilde{W}(r\xi) ds(\xi) = r^p \int_{S_1} \widetilde{W}(\xi) ds(\xi) \leq \frac{1}{p} [C^0 - (qA_1(p))^{1-p}] r^p$. \square

Corollary 1 Under the same hypothesis of theorem 1, if \widetilde{W} is isotropic, then

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) \leq \frac{1}{p} [C^0 - (qA_1(p))^{1-p}] |\xi|^p, \quad (3.10)$$

where C^0 and A_1 are given by 3.2 and 3.9.

Observation-(1): In the limit case $p = 2$ we have $\mathcal{F}_1(2, r, t) = \frac{\beta}{2\theta_1} r^2 - \frac{\theta_2}{\alpha_2 N \theta_1} r^2 t + \frac{\theta_2}{2\theta_1 N \alpha_2} = \frac{\beta}{2} \theta_1^{-1} r^2 + (\frac{t^2}{2} - t) \alpha_2^{-1} \theta_1^{-1} \theta_2 N^{-1} r^2$, where $\beta = (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}$, then $A_1(2) = \inf_{r>0} \inf_{t>0} r^{-2} \mathcal{F}_1(2, r, t) = \frac{1}{2\theta_1} (\beta - \frac{\theta_2}{\alpha_2 N})$, therefore

$$\frac{1}{2} [C^0 - (2A_1(2))^{-1}] = \frac{1}{2} \left[\alpha_2 - \theta_1 \left(\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\theta_2}{\alpha_2 N} \right)^{-1} \right],$$

which is the optimal upper bound of the linear composite.

4 An Upper Bound On \widetilde{W} when $1 < p \leq 2$

Theorem 3 Given W and \widetilde{W} as 1.1 and 1.2, then if $1 < p \leq 2$ and $p^{-1} + q^{-1} = 1$ we have

$$\forall r > 0, \forall t > 0 : \int_{S_r} (W_2 - \widetilde{W})^* \leq \mathcal{F}_2(p, r, t) = ar^q - btr^2 + ct^p r^p, \quad (4.1)$$

$$\text{where } a = \frac{\beta}{\theta_1^{q-1}}, \quad b = \frac{\theta_2}{\alpha_2 N \theta_1}, \quad c = \frac{(\theta_1 \theta_2)^{p/2} N^{-p/2}}{p \alpha_2^{p-1} \theta_1^p}. \quad (4.2)$$

Proof Given $u \in K_p$ and $\xi \in \mathbb{R}^N$, since $\int_Y \langle \nabla u, \xi \rangle = 0$, using the Jensen inequality and the inequality $(|a| + |b|)^{p/2} \leq |a|^{p/2} + |b|^{p/2}$ when $1 < p \leq 2$, we have

$$\int_Y |\nabla u + \xi|^p \leq \left(\int_Y |\nabla u + \xi|^2 \right)^{p/2} = \left(|\xi|^2 + \int_Y |\nabla u|^2 \right)^{p/2} \leq |\xi|^p + \left(\int_Y |\nabla u|^2 \right)^{p/2},$$

substituting this result into 3.4 we obtain $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} (\widetilde{W} - W_2)(\xi) &\leq -\theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \inf_{u \in K_p} M_p(u), \\ \text{where } M_p(u) &= \frac{\alpha_2}{p} \left(\int_Y |\nabla u|^2 \right)^{p/2} - \int_Y \langle \nabla u, \eta \rangle \chi_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

It is known that $\inf_{u \in K_2} M_2(u) = M_2(\widehat{u})$ where $\widehat{u} = \frac{1}{\alpha_2} \langle \nabla \varphi, \eta \rangle$ being φ the Y -periodic solution of $\nabla \varphi = \chi_1 - \theta_1$ in Y . Therefore $\forall t > 0$: $\inf_{u \in K_p} M_p(u) \leq M_p(t\widehat{u})$ and by the same arguments used in the proof of theorem 1 we obtain

$$\inf_{u \in K_p} M_p(u) \leq \frac{t^p}{p\alpha_2^{p-1}} \left(\int_Y |H\eta|^2 \right)^{p/2} - \frac{t}{\alpha_2} \int_Y |H\eta|^2,$$

substituting this into 4.3 we get

$$\begin{aligned} \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0: \\ (\widetilde{W} - W_2)(\xi) &\leq -\theta_1 \langle \xi, \eta \rangle + \theta_1 h^*(\eta) + \frac{t^p}{p\alpha_2^{p-1}} \left(\int_Y |H\eta|^2 \right)^{p/2} - \frac{t}{\alpha_2} \int_Y |H\eta|^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Replacing $\eta \Leftarrow \eta/\theta_1$ in 4.4, adding $\langle \xi, \eta \rangle$ to both sides of that result and taking sup over $\xi \in \mathbb{R}^N$ we obtain

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0: \\ (W_2 - \widetilde{W})^*(\eta) &\leq \theta_1 h^*(\eta/\theta_1) + \frac{t^p}{p\alpha_2^{p-1}\theta_1^p} \left(\int_Y |H\eta|^2 \right)^{p/2} - \frac{t}{\alpha_2\theta_1^2} \int_Y |H\eta|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Given $r > 0$ the Jensen inequality gives $\int_{S_r} \left(\int_Y |H\eta|^2 \right)^{p/2} \leq \left(\int_{S_r} \int_Y |H\eta|^2 \right)^{p/2}$.

Hence integrating 4.5 over S_r and using 2.11 we get 4.1 and 4.2. \square

Theorem 4 Under the same hypothesis of theorem 3, given \mathcal{F}_2 by 4.1 and 4.2, then:

$$\int_{S_r} \widetilde{W} \leq \frac{1}{p} \left[\alpha_2 - (qA_2(p))^{1-p} \right] r^p, \quad (4.6)$$

$$\text{where } A_2(p) = \inf_{r>0} \inf_{t>0} r^{-q} \mathcal{F}_2(p, r, t). \quad (4.7)$$

Proof Similar to the proof of theorem 2. \square

Corollary 2 Under the same hypothesis of theorem 3, if \widetilde{W} is isotropic, then

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\xi) \leq \frac{1}{p} \left[\alpha_2 - (qA_2(p))^{1-p} \right] r^p, \quad (4.8)$$

where A_2 is given by 4.6.

Observation-(2): In the limit case $p = 2$ the formula 4.8 gives the optimal upper bound of the linear composite.

5 A Lower Bound On \widetilde{W} when $2 \leq p < \infty$

Theorem 5 Given W and \widetilde{W} as 1.1 and 1.2, then if $2 \leq p < \infty$ and $p^{-1} + q^{-1} = 1$ we have

$$\forall r > 0, \forall t > 0 : \int_{S_r} (W_1 - \widetilde{W})^* \leq \mathcal{F}_3(p, r, t) = ar^p - btr^2 + dt^q r^q, \quad (5.1)$$

$$\text{where } a = \frac{\kappa}{p} \theta_2^{1-p}, \quad b = (1 - N^{-1}) \theta_1 \theta_2^{-1} \beta_1^{-1}, \quad d = (1 - N^{-1})^{q/2} \theta_1^{q/2} \theta_2^{-q/2} \frac{\beta_1^{1-q}}{q}, \quad (5.2)$$

and κ, β_1 are given by 2.7

Proof We choose the variational principal 2.9, given $\xi \in \mathbb{R}^N$ we take $\zeta = \chi_2 \xi$, then $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\widetilde{W}^*(\eta) \leq -\langle \eta, \xi \rangle \theta_2 + \theta_2 g^*(\xi) + \inf_{\sigma \in S_q} \int_Y \left[-\langle \sigma, \xi \rangle \chi_2 + \frac{\beta_1}{q} |\sigma + \eta|^q \right] dx. \quad (5.3)$$

Since $1 < q \leq 2$ and $\int_Y \langle \sigma, \eta \rangle = 0$, then $\int_Y |\sigma + \eta|^q \leq \left(\int_Y |\sigma + \eta|^2 \right)^{q/2} = \left(|\eta|^2 + \int_Y |\sigma|^2 \right)^{q/2} \leq |\eta|^q + \left(\int_Y |\sigma|^2 \right)^{q/2}$, hence

$$\forall \eta, \xi \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}^*(\eta) \leq W_1^*(\eta) - \langle \eta, \xi \rangle \theta_2 + \theta_2 g^*(\xi) + \inf_{\sigma \in S_q} M_q(\sigma), \quad (5.4)$$

where $M_q(\sigma) = \frac{\beta_1}{q} \left(\int_Y |\sigma|^2 \right)^{q/2} - \int_Y \langle \sigma, \xi \rangle \chi_2$. We know that $\inf_{\sigma \in S_2} M_2(\sigma) = M_2(\hat{\sigma})$, where $\hat{\sigma} = -\frac{1}{\beta_1} (H\xi - (\chi_2 - \theta_2)\xi)$, being H the Hessian matrix of the Y -periodic solution of $\Delta\varphi = \chi_2 - \theta_2$, then

$$\inf_{\sigma \in S_q} M_q(\sigma) \leq M_q(t\hat{\sigma}) = \frac{\beta_1}{q} t^q \left(\int_Y |\hat{\sigma}|^2 \right)^{q/2} - t \int_Y \langle \hat{\sigma}, \xi \rangle \chi_2. \quad (5.5)$$

We have $\langle \hat{\sigma}, \xi \rangle = -\frac{1}{\beta_1} \langle H\xi, \xi \rangle \chi_2 + \frac{1}{\beta_1} (\chi_2 - \theta_2) |\xi|^2 \chi_2$ and $\int_Y \langle \hat{\sigma}, \xi \rangle \chi_2 = -\frac{1}{\beta_1} \int_Y |H\xi|^2 + \frac{1}{\beta_1} \theta_1 \theta_2 |\xi|^2$. Also $|\hat{\sigma}|^2 = \frac{1}{\beta_1^2} (|H\xi|^2 - 2(\chi_2 - \theta_2) \langle H\xi, \xi \rangle + (\chi_2 - \theta_2)^2 |\xi|^2)$ and $\int_Y |\hat{\sigma}|^2 = \frac{1}{\beta_1^2} \left(\theta_1 \theta_2 |\xi|^2 - \int_Y |H\xi|^2 \right)$. Hence

$$\inf_{\sigma \in S_q} M_2(\sigma) \leq \frac{\beta_1^{1-q}}{q} t^q \left(\theta_1 \theta_2 |\xi|^2 - \int_Y |H\xi|^2 \right)^{q/2} + \frac{t}{\beta_1} \int_Y |H\xi|^2 - \frac{t}{\beta_1} \theta_1 \theta_2 |\xi|^2. \quad (5.6)$$

Substituting 5.5 5.6 into 5.4 we get

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^*(\eta) - W_1^*(\eta) &\leq -\langle \eta, \xi \rangle \theta_2 + \theta_2 g^*(\xi) + \frac{\beta_1^{1-q}}{q} t^q \left(\theta_1 \theta_2 |\xi|^2 - \int_Y |H\xi|^2 \right)^{q/2} \\ &\quad + \frac{t}{\beta_1} \int_Y |H\xi|^2 - \frac{t}{\beta_1} \theta_1 \theta_2 |\xi|^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Replacing $\xi \Leftarrow \xi/\theta_2$ in 5.7, adding $\langle \xi, \eta \rangle$ to both side of the last result and taking sup over $\eta \in \mathbb{R}^N$ we get

$$\begin{aligned} (W_1^* - \widetilde{W}^*)^*(\xi) &\leq \frac{\kappa \theta_2^{1-p}}{p} |\xi|^p + \frac{\beta_1^{1-q} t^q}{q} \left(\theta_1 \theta_2^{-1} |\xi|^2 - \theta_2^{-2} \int_Y |H\xi|^2 \right)^{q/2} \\ &\quad + \frac{t}{\beta_1} \theta_2^{-2} \int_Y |H\xi|^2 - \frac{t}{\beta_1} \theta_1 \theta_2 |\xi|^2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

integrating over S_r we finally get 5.1 and 5.2. \square

Theorem 6 Under the same hypothesis of theorem 5 we have

$$\int_{S_1} \widetilde{W}^* \leq \frac{1}{q} \left[\beta_1 - (pA_3(p))^{1-q} \right], \quad \int_{S_1} \widetilde{W} \geq \frac{1}{p} \left[\beta_1 - (pA_3(p))^{1-q} \right]^{1-p}, \quad (5.9)$$

where $A_3(p) = \inf_{r>0} \inf_{t>0} r^{-p} \mathcal{F}_3(p, r, t)$ being \mathcal{F}_3 given by 5.1.

Proof By the same homogeneity properties using in the proof of the theorem 4 we have

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (W_2^* - \widetilde{W}^*)^* &\leq r^{-p} \mathcal{F}_3(p, r, t), \text{ then } \int_{S_1} (W_2^* - \widetilde{W}^*)^* \leq A_3(p). \text{ Since } (W_1^* - \\ \widetilde{W}^*)^* &\geq \langle \xi, \eta \rangle - W_1^*(\eta) + \widetilde{W}^*(\eta), \text{ fixing } \xi \neq \theta \text{ and } r > 0, \text{ let } \eta = r\xi/|\xi|, \\ \text{we obtain } (W_1^* - \widetilde{W}^*)^*(\xi) &\geq r|\xi| - r^q W_1^*(\xi/|\xi|) + r^q \widetilde{W}^*(\xi/|\xi|), \text{ then } A_3(p) \geq \\ \int_{S_1} (W_1^* - \widetilde{W}^*)^* &\geq r - r^q \frac{\beta_1}{q} + r^q \int_{S_1} \widetilde{W}^* \text{ and } \int_{S_1} \widetilde{W}^* \leq r^{-q} A_3(p) - r^{1-q} + \frac{\beta_1}{q}, \text{ hence} \\ \int_{S_1} \widetilde{W}^* &\leq \inf_{r>0} (r^{-q} A_3(p) - r^{1-q}) + \frac{\beta_1}{q}, \text{ that is} \end{aligned}$$

$$\int_{S_1} \widetilde{W}^* \leq \frac{1}{q} \left[\beta_1 - (pA_3(p))^{1-q} \right] = B_3(p). \quad (5.10)$$

In other hand, since $\widetilde{W}^*(\eta) \geq \langle \xi, \eta \rangle - \widetilde{W}$, taking $\eta \neq \theta$, $r > 0$ and $\xi = r\eta/|\eta|$, we get $\widetilde{W}^*(\eta) \geq r|\eta| - r^p \widetilde{W}(\eta/|\eta|)$, integrating over S_1 and using 5.10 we obtain $B(p) \geq r - r^p \int_{S_1} \widetilde{W}$ and $\int_{S_1} \widetilde{W} \geq r^{1-p} - r^{-p} B(p)$, then $\sup_{r>0} (r^{1-p} - r^{-p} B(p)) \leq$

$\int_{S_1} \widetilde{W}$. From here and 5.10 we obtain 5.9. \square

Corollary 3 Under the same hypothesis of theorem 5 we have

$$\forall r > 0: \int_{S_r} \widetilde{W}^* \leq \frac{1}{q} \left[\beta_1 - (pA_3(p))^{1-q} \right] r^q, \quad \int_{S_r} \widetilde{W} \geq \frac{1}{p} \left[\beta_1 - (pA_3(p))^{1-q} \right]^{1-p} r^p, \quad (5.11)$$

Corollary 4 Under the same hypothesis of theorem 5, if \widetilde{W} is isotropic, then

$$\begin{aligned} \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N: \\ \widetilde{W}^*(\eta) \leq \frac{1}{q} \left[\beta_1 - (pA_3(p))^{1-q} \right] |\eta|^q, \quad \widetilde{W}(\xi) \geq \frac{1}{p} \left[\beta_1 - (pA_3(p))^{1-q} \right]^{1-p} |\xi|^p. \end{aligned} \quad (5.12)$$

6 Lower Bound on \widetilde{W} , when $1 < p \leq 2$

Theorem 7 *Given W and \widetilde{W} as 1.1 and 1.2, then if $1 \leq p \leq 2$ and $p^{-1} + q^{-1} = 1$ we have*

$$\forall r > 0, t > 0 : \int_{S_r} (W_0^* - \widetilde{W}^*)^* \leq \mathcal{F}_4(p, r, t) = ar^p - br^2t + dr^2t^q + ct^q(r^2 + r^{q+1}) \quad (6.1)$$

$$\text{where } W_0^*(\eta) = \frac{C_0^*}{q} |\eta|^q, \quad C_0^* = \beta_1 (1 + (q-1)(q-2)2^{q-2}) \quad \text{and} \quad (6.2)$$

$$a = \frac{\theta_2^{1-p} \kappa}{p}, \quad b = (1 - \frac{1}{N}) \beta_1^{2-2/q} \theta_2^{-2/q}, \quad c = \frac{\beta_1^q}{q} (q-1) 2^{2q-2} \theta_2^{-1} (1 + \frac{1}{N}), \quad (6.3)$$

$d = \frac{\beta_1^{-q}}{q} (q-1)(q-2) 2^{2q-2} \theta_2^{-q} N^{(q+1)/2} \mathcal{Z}(q)$ and $\mathcal{Z}(p) = \mathcal{C}(q+1)^{q+1}$ is the Stein-constants.

We choose the variational principle 4.3, then $\forall \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\widetilde{W}(\eta) \leq -\langle \eta, \xi \rangle \theta_2 + g^*(\xi) \theta_2 + \inf_{\sigma \in S_q} \int_Y \left[-\langle \sigma, \xi \rangle \chi_2 + \frac{\beta_1}{q} |\sigma + \eta|^q \right] dx. \quad (6.4)$$

Since $q \geq 2$ using 2.14 with $x = \eta$, $y = \sigma$ and $s = 2 - 4/q$ we get

$$\frac{1}{q} |\sigma + \eta|^q \leq \frac{1}{q} \left[1 + (q-1)(q-2) 2^{q-2} \right] |\eta|^q + \langle \eta, \sigma \rangle |\eta|^{q-2} + \frac{1}{q} (q-1) 2^{q-2} \epsilon^{2-q} |\sigma|^q,$$

substituting this inequality into 6.4 we get

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N : \widetilde{W}(\eta) - W_0(\eta) \leq -\langle \eta, \xi \rangle \theta_2 + g^*(\eta) \theta_2 + \inf_{\sigma \in S_q} M_q(\sigma), \quad (6.5)$$

where $M_q(\sigma) = \int_Y \left[-\langle \sigma, \xi \rangle \chi_2 + \frac{1}{q} (q-1)(q-2) 2^{q-2} \epsilon^{2-q} |\sigma|^q \right] dx$. Since

$\inf_{\sigma \in S_2} M_2(\sigma) = M_2(\widehat{\sigma})$, where $\widehat{\sigma} = -\frac{1}{\beta_1} [H\xi - (\chi_2 - \theta_2)]$, being H the Hessian matrix of the Y -periodic solution of $\Delta\varphi = \chi_2 - \theta_2$, then $\forall t > 0$:

$$\begin{aligned} \inf_{\sigma \in S_q} M_q(\sigma) &\leq M_q(t(\theta_1\theta_2)^{1-2/q}\widehat{\sigma}) \\ &= -t(\theta_1\theta_2)^{1-2/q} \int_Y \langle \widehat{\sigma}, \xi \rangle \chi_2 + \frac{\beta_1}{q} (q-1) 2^{q-2} \epsilon^{2-q} t^q (\theta_1\theta_2)^{q-2} \int_Y |\widehat{\sigma}|^q. \end{aligned} \quad (6.6)$$

In other hand $\langle \widehat{\sigma}, \xi \rangle = -\frac{1}{\beta_1} [\langle H\xi, \xi \rangle - (\chi_2 - \theta_2)|\xi|^2]$ and $\int_Y \langle \widehat{\sigma}, \xi \rangle \chi_2 = -\frac{1}{\beta_1} \int_Y |H\xi|^2$.

Therefore from here, 6.6, taking $\epsilon = \theta_1\theta_2$ and using an standard inequality, we get

$$\begin{aligned} \inf_{\sigma \in S_q} M_q(\sigma) \leq & -t\beta_1^{-1}(\theta_1\theta_2)^{2-2/q}|\xi|^2 + t(\theta_1\theta_2)^{1-2/q}\beta_1^{-1} \int_Y |H\xi|^2 + \\ & + t^q \frac{\beta_1^{-q}}{q} 2^{2q-3}(\theta_1\theta_2^q + \theta_1^q\theta_2)|\xi|^q + t^q \frac{\beta_1^{-1}}{q} (q-1)2^{2q-3} \int_Y |H\xi|^q, \end{aligned}$$

substituting this inequality into 6.4 we obtain that $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^*(\eta) - W_0^*(\eta) \leq & -\langle \xi, \eta \rangle \theta_2 + g^*(\xi)\theta_2 - t\beta_1^{-1}(\theta_1\theta_2)^{2-2/q}|\xi|^2 \\ & + t(\theta_1\theta_2)^{1-2/q}\beta_1^{-1} \int_Y |H\xi|^2 + \frac{t^q\beta_1^{-1}}{q} (q-1)2^{2q-2}|\xi|^2 + \\ & + \frac{t^q\beta_1^{-q}}{q} (q-1)2^{2q-3} \int_Y |H\xi|^q, \end{aligned} \quad (6.7)$$

replacing $\xi = \xi/\theta_2$, adding $\langle \xi, \eta \rangle$ to both side of the result and taking sup over $\eta \in \mathbb{R}^N$, we finally get 6.1, 6.2 and 6.3. \square

Theorem 8 Under the same hypothesis of theorem 7 we have

$$\forall r > 0 : \int_{S_r} \widetilde{W}^* \leq \frac{1}{q} [C_0^* - (pA_4(p))^{1-q}] r^q, \quad \int_{S_r} \widetilde{W} \geq \frac{1}{p} [C_0^* - (pA_4(p))^{1-q}]^{1-p} r^p, \quad (6.8)$$

where $A_4 = \inf_{r>0} \inf_{t>0} \mathcal{F}_4(p, r, t)$.

Corollary 5 Under the same hypothesis of theorem 7, when \widetilde{W} is isotropic we have $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(\xi) & \geq \frac{1}{p} [C_0^* - (pA_4(p))^{1-q}]^{1-p} |\xi|^p \\ \widetilde{W}^*(\eta) & \leq \frac{1}{q} [C_0^* - (pA_4(p))^{1-q}] |\eta|^q. \end{aligned}$$

7 Summary and Conclusions

Given $1 < p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1, 1 < \theta_k < 1, \theta_1 + \theta_2 = 1, \theta = \theta_1$, we obtain $C^0(p) > 0$ and $C_0(p) > 0$ such that

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left[C_0(p) - \theta_1^{q(p-1)} (pA(p, \theta))^{1-q} \right]^{1-p} r^p &\leq \int_{S_r} \widetilde{W} \\ &\leq \frac{1}{p} \left[C^0(p) - \theta_2^{p(q-1)} (qB(p, \theta))^{1-p} \right] r^p \end{aligned}$$

$$C_0(p) = \begin{cases} \alpha_2 [1 + (p-1)(p-2)2^{p-1}] & \text{if } p \geq 2 \\ \alpha_2 & \text{if } 1 < p < 2 \end{cases},$$

$$A(\theta, p) = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+} x^{-p} \mathcal{F}(\theta, p, x, y)$$

$$C^0(p) = \begin{cases} \beta_1 & \text{if } p \geq 2 \\ \beta_1 [1 + (q-1)(q-2)2^{q-1}] & \text{if } 1 < p < 2 \end{cases},$$

$$B(\theta, p) = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+} x^{-q} \gg (\theta, p, x, y)$$

where the functions \mathcal{F}, \gg are given in this work.

In the isotropic case we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \left[C_0(p) - \theta_1^{q(p-1)} (pA(p, \theta))^{1-q} \right]^{1-p} |\xi|^p &\leq \widetilde{W}(\xi) \\ &\leq \frac{1}{p} \left[C^0(p) - \theta_2^{p(q-1)} (qB(p, \theta))^{1-p} \right] |\xi|^p. \end{aligned}$$

Here we have $\theta_1 = \theta$ and $\theta_2 = 1 - \theta$, where $1 \leq \theta \leq 1$ is the volume fraction of the first material.

In the limit case $p = 2$, the left and right hand sides of the last inequality give the optimal lower and upper bound of the linear composite.

Acknowledgement: The authors; want to thank Vincenzo Constenzo Alvarez of the Universidad Simón Bolívar, Department of Physics, for having revised this paper and Oswaldo Araujo of the University of the Andes, Faculty of Science, Department of Mathematics who helped this paper to be published in these Bulletin. Likewise, we thank Mr. Antonio Vizcaya P. for transcription it.

References

- [1] **J. Ash and R. Jones.** *Calderon-Zygmund and Beyond. Conference in Honor of Stephen Vagi Retirement. De Paul University, Chicago, Illinois, 2006.*
- [2] **B.Bergman.** *Bulk Physical Properties of a Composite Media. lectures Notes. L'Ecole d'ete' de Analyse Numerique, 1983.*
- [3] **A. Braides.** *Omogeneizzazione di Integrali non Coercive. Estratto de Ricerche di Matematica, Volume XXXII, pp.347, 1983.*
- [4] **R.Burridge, S.Childress, G.Papanicolaou.** *Macroscopic Properties of Disordered Media. Spronger-Verlag, New York, 1982.*
- [5] **I.Ekland,R.Temam.** *Convex Analysis and variational Problems. North Holland, 1976.*
- [6] **G.Dell'Antonio.** *Non-linear Electrostatic in Inhomogeneous Media. Preprint, Dipartimento di Matematica, Universita' di Roma, La Sapienza, Italia, 1987.*
- [7] **K.Lurie, A.Cherkaev.** *Exact Estimates of Conductivity of Composites Formed by two Isotropic Conducting Media Taken in Prescribed Proportion. Proc. Royal Soc. Edimburg, 29A, pp.71-87,1984.*
- [8] **Hashin, Shtrikman.** *A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multi-phase Materials. J.Appl.Phys,33,pp.3125-3131, 1962.*
- [9] **M.Milkis.** *Effective Dielectric Constants of a Non-Linear Composites Material. SIAM, J.Appl Math, Vol 43, N.3, Oct,1983.*
- [10] **Yves-Patricck Pellegrini.** *Self-consistent Effective-medium Approximation for Strongly Nonlinear Media. Phis.Rev B. Vol. 64, 2001.*
- [11] **Sundaram Thangavelu .** *Harmonic Analysis on the Heisemberg Group. Springer, 1998.*
- [12] **Sundaram Thangavelu .** *An Introduction to the Uncertainty Principle. Springer, 2004.*
- [13] **Dong-Hau Kuo, Wun-Ku Wang.** *Dielectric Properties of three Ceramic Epoxy Composites. Materials Chemistry and Physics. Volume 85. Issue 1, 2004, pages 201-206.*
- [14] **S.Talbot, J.Willis.** *Variational Principles for Inhomogeneous Non-linear Media. IMA, Journal of Applied Mathematics, 35,pp. 39-54, 1985.*

- [15] **G.Tepedino, J. Quintero, E. Marquina.** *An application of the Theory of Calderon-Zygmund to the Sciences of the Materials. Journal of Mathematical Control Science and Applications (JMCSA). Vol.5, N.1, June 2012, pp, 11-18.*)
- [16] **G.Tepedino.** *Bounds on the Effective Energy Density of Nonlinear Composites. Doctoral Thesis, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1988.*
- [17] **G.Tepedino, J. Quintero, E. Marquina.** *Bounds on the Effective Energy Density of a More General Class Willis Dielectric Composites. To appear.*
- [18] **Hung T. Vo and Frank G. Shi** *Towards Model-Based Engineering of Optoelectronic Packing Materials: Dielectric Constant Modeling. Microelectronics Journal. Volume 33. Issues 5-6, 2002, pages 409-415.*
- [19] **Tom Wolf.** *Lectures in Harmonic Analysis. AMS University Lecture Series, Vol 29, 2003.*
- [20] **J.Willis.** *Variational and Related Methods for the Overall Properties of Composites. Advanced in Applied Mechanics. Academic Press, Vol. 21, 1981.*
- [21] **Zhou C., Neese B., Zhang Q., Baur F.** *Relaxor Ferroelectric Poly(Vinylidene fluoride-trifluororthylene-chlofluoroethylene) Terpolymer for High Energy Density Storage Capacitors. Dielectrics and Electrical Insulation, IEEE Transaction . Vol 13, Issue 5, 2006.*

Gaetano Tepedino Aranguren,
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias,
Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela.

Javier Quintero C.
Área de Matemática,
Universidad Nacional Abierta de
Mérida.

Eribel Marquina.
Área de Matemática,
UNEFA, Mérida.

José Soto,
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias,
Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela.

DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

Una visión universitaria del teorema de
Pitágoras

J. G. Mendieta, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta

Resumen. El objetivo del trabajo es extender las ideas básicas del conocido teorema de Pitágoras al marco de las Matemáticas de la Universidad.

Abstract. The objective of this work is to extend the basic ideas of the famous Pythagorean theorem to the framework of University Mathematics.

Introducción.

El teorema de Pitágoras, tal y como se conoció por los geómetras del antiguo mundo griego, establece que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, sin embargo, desde que se aprende, en los cursos de geometría elemental, hay quienes sospechan algo más, quizá la misma palabra, “cuadrado” los induce a creer que sobre los lados puede construirse otro tipo de figuras: ¿por qué no triángulos o círculos?

Para extender las ideas sobre el teorema de Pitágoras de la Matemática Escolar a la Matemática Universitaria, comenzaremos por analizar varios conceptos clásicos de la Matemática Superior; el primero de ellos es el de curva. Una primera aproximación nos proporciona la definición de Curva como una aplicación o función $f(t)$ de un intervalo $[a, b] = I$ en \mathbb{R} a un subconjunto C del espacio \mathbb{R}^3 (o del plano), de tal manera que la función vectorial de variable real f puede considerarse como la traza descrita por el radiovector $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, $t \in [a, b]$.

Desde luego, debe hacerse la clara distinción entre la curva C y la función $f(t)$ que la describe; la curva C es la imagen de la función $f(t)$ en \mathbb{R}^3 , es decir: $C = \{(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \in \mathbb{R}^3 | t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}\}$.

De este modo, la intención original de esta definición es la de poder considerar a una curva como la trayectoria en el espacio que describe el movimiento de una

partícula.

Una curva es suave si $f(t)$ es de clase $C^1[a, b]$ y $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, lo que equivale a decir que la curva tiene una tangente bien definida en cada uno de los puntos que la constituyen. Si la curva puede considerarse como la unión de curvas suaves, entonces se dice que es suave a trozos. Consideraremos únicamente curvas suaves o suaves a trozos. Una curva se llama rectificable si tiene una longitud bien determinada, es decir, finita. Mediante las poligonales y el concepto de integral de Riemann se puede demostrar que la longitud de la

curva C parametrizada mediante $f(t)$, es: $s(t) = \int_a^t \left| \frac{df(t)}{dt} \right| dt$, $t \in [a, b]$.

No es mucho pedir que una curva tenga longitud finita, aunque es cierto que al estudiar las figuras fractales se encuentran “curvas” que tienen longitud infinita a pesar de tener un punto inicial y uno final bien definidos (la curva de Koch es un ejemplo de ello).

Consideremos una curva C descrita mediante la función paramétrica $f(t)$, $t \in I = [a, b]$. Si la curva C tiene sus puntos $f(t)$ en un mismo plano para todo $t \in [a, b]$, entonces decimos que es plana. Si $f(t_1) \neq f(t_2)$ siempre que $t_1 \neq t_2$ para todo $t_1, t_2 \in I = [a, b]$ entonces la curva se llama simple. Si $f(a) = f(b)$ entonces la curva C se llama cerrada. La curva $f(t)$ es suave y cerrada si $f(a) = f(b)$ y $f'(a) = kf'(b)$ para algún $k > 0$. Se dice que una curva es simple y cerrada si $f(t_1) \neq f(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$ para todo $t_1, t_2 \in I = [a, b]$ siempre que t_1 y t_2 no sean a y b , porque en ese caso $f(a) = f(b)$. Una curva $f(t)$ plana, cerrada y simple se llama curva de Jordan, debido a los trabajos que efectuó, sobre curvas y su longitud, el eminente matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922).

Una curva de Jordan C divide el plano en dos conjuntos; uno es el interior de C y el otro exterior, los cuales se denotan, respectivamente, por $Int(C)$ y $Ext(C)$. El conjunto $Int(C)$ es acotado mientras que $Ext(C)$ no lo es; además, $Int(C)$ y $Ext(C)$ son conjuntos disjuntos; la frontera de $Int(C)$ y de $Ext(C)$ es C ; la frontera de un conjunto R se denota por ∂R y si R es o bien $Int(C)$ o bien $Ext(C)$, se tiene que $\partial R = C$. Al hecho de que una curva de Jordan y su demostración requiere el análisis de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones para ecuaciones diferenciales.

Diremos que una región es un subconjunto cerrado del plano cuya frontera es la unión de un número finito de curvas de Jordan. El interior de una curva de Jordán rectificable C es una región R bien definida. La región R puede ser convexa o no. Decimos que una región R es convexa si la recta l que une dos puntos cualesquiera, x e y de R , también está contenida en R . Es decir, R es convexa si $x, y \in R \rightarrow xy = l \subset R$, con l definido como el segmento en el plano euclídeo: $l = \{\alpha(\lambda) | \alpha(\lambda) = x + \lambda(y - x), 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Una región R se llama arcoconexa si dados dos puntos cualesquiera de R , existe una curva $\varphi(\lambda)$ que los une y que también está contenida en R ; es decir, R es

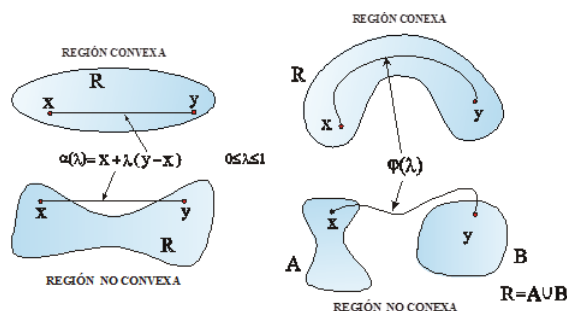


Figura 1: Regiones convexas y conexas

arcoconexa si para todo $x, y \in R$, existe $\varphi(\lambda)$, definida y continua en $[0, 1]$, tal que $\varphi(0) = x, \varphi(\lambda) = y$ y $\varphi(\lambda) \in R, \forall \lambda \in [0, 1]$. El interior $Int(C)$ de una curva de Jordan es arcoconexo, mientras que la unión de los interiores de dos curvas de Jordan disjuntas no es arcoconexa si dichos interiores son disjuntos, las ideas anteriores se pueden visualizar en la Figura 1.

Decimos que la región R es simplemente conexa si es conexa y el interior de cualquier curva de Jordan en la región R pertenece también a R , es decir, si para toda curva de Jordan $G \subset R$ se tiene entonces $Int(G) \subset R$. Equivalentemente, la región R es simplemente conexa si es el interior de una curva de Jordan. O, expresado de forma heurística, R es simplemente conexa si no tiene agujeros.

Ahora, consideramos una región R_1 delimitada por la curva de Jordan C y una curva simple y cerrada C_1 en $Int(C)$ (ver Figura 2). Como $R_1 = Int(C) - Int(C_1)$ no contiene al $Int(C_1)$, se dice que R_1 tiene un agujero y que no es simplemente conexa. Si ahora R denota la región delimitada por la curva de Jordan C y existen curvas de Jordan rectificables y disjuntas $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ en la región R , tales que sus interiores también son disjuntos, entonces a la región:

$$R_1 = R - Int(C_1) - Int(C_2) - Int(C_3) - \dots - Int(C_n)$$

se le llama múltiplemente conexa (ver Figura 2).

Así, una región que tiene un agujero es múltiplemente conexa de orden uno, si tiene dos se llama múltiplemente coneza de orden dos y en general si tiene n agujeros se llama múltiplemente conexa de orden n .

Ahora nos ocuparemos de otro concepto, la orientabilidad de una curva. Se dice que una curva cerrada simple parametrizada C tiene orientación, o que es una curva orientada, si al recorrer C en el sentido creciente del parámetro t se deja sólo de un lado el interior de la misma. Decimos que la orientación es positiva si el interior queda a la izquierda de la curva o, dicho de otra forma, si C se

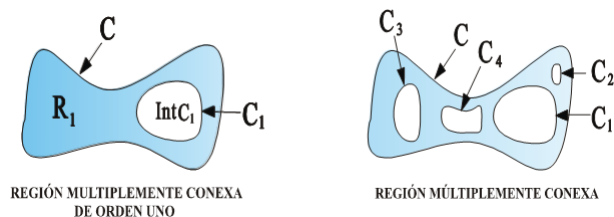


Figura 2: Regiones múltiplemente conexas.

recorre en sentido contrario a la agujas del reloj como se observa en la siguiente figura:

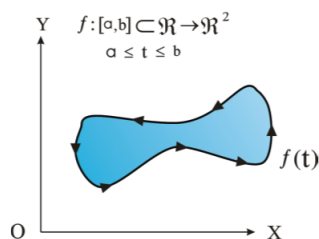


Figura 3: Orientación de una curva C parametrizada.

Esta idea de orientabilidad es muy elemental pero útil para nuestro objetivo. Ahora, en el caso de las superficies, se dice que una superficie S es orientable o que tiene dos caras si para cualquier curva $g(t)$ cerrada sobre la superficie S existe una elección de vector normal \vec{n} a la superficie S desplazándose de forma continua a lo largo de la curva $g(t)$ de tal manera que al retornar al punto inicial, la orientación de \vec{n} no cambia (ver Figura 4).

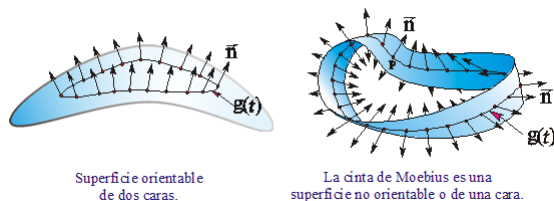


Figura 4: Superficies orientables y no orientables.

Aquí se debe entender, desde luego, que la normal \vec{n} a S en el punto P es perpendicular a cualquier tangente a S en P y en cualquier dirección; es decir,

la normal \vec{n} es perpendicular a todas y cada una de ellas, ya que todas las tangentes a S en P constituyen un plano, el plano tangente a S en P . En la Figura 4 se puede observar el comportamiento de una normal \vec{n} que se desliza sobre una superficie orientable y una no orientable.

Sin embargo, esta función elemental de orientabilidad sólo nos lleva a una noción primeriza que no es operativa, ya que determinar si una superficie es orientable en términos de curvas cerradas sobre S puede resultar un problema bastante difícil. Aún así, no necesitamos aquí más que esa noción de orientabilidad y supondremos que las curvas y superficies son orientables. Quizá el ejemplo más popular de superficie no orientable o de una sola cara lo constituye la cinta de Moebius que aparece en la Figura 4.

Ahora, consideramos dos curvas parametrizadas en $[a, b]$,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t));$$

se dice que $f(t)$ y $g(t)$ son curvas semejantes u homotéticas si existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que: $g(t) = kf(t) = (kf_1(t), kf_2(t), kf_3(t))$. Quizá podamos entender esto mejor si pensamos en términos de una transformación en el espacio $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que:

$$T[f(t)] = T[f_1(t), f_2(t), f_3(t)] = (kf_1(t), kf_2(t), kf_3(t)) = g(t).$$

Si $k = 1$ decimos que las curvas son congruentes o que la transformación $T[f(t)]$ es una isometría. Si $k > 1$ decimos que es una dilatación y si $0 < k < 1$ decimos que es una contracción. Si $k = 0$ la curva imagen se reduce a un punto, y si $k < 0$ la curva es simétrica con respecto al origen, es decir, se refleja con respecto al origen. Esto significa, geoméricamente, que la curva $f(t)$ se amplifica o reduce para poder coincidir con $g(t)$.

La Geometría Diferencial determina un estudio mucho más profundo de las curvas. Las curvas en el espacio están caracterizadas mediante la curvatura k y la torsión τ , que pueden considerarse como funciones de la longitud s de la curva, $k(s)$ y $\tau(s)$. Mediante estas cantidades el Teorema Fundamental para las Curvas establece que si dos curvas en el espacio tienen la misma curvatura y torsión entonces son la misma, salvo quizá una rotación y/o traslación que las haga coincidir; sin embargo, la reflexión sobre las relaciones pitagóricas asociadas a curvas nos reduce a un tipo de curvas más restringido, es decir, a las curvas planas; en ellas $\tau(s) = 0$ y, por ello, consideraremos que las curvas asociadas a las relaciones pitagóricas son planas, es decir, tienen la forma: $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$. Además, la relación de las áreas determinadas por las curvas, nos lleva a considerar curvas semejantes, puesto que las figuras colocadas proporcionalmente sobre los catetos presupone su semejanza, y por ello, sólo nos interesa el área que determinan.

Existe una relación fundamental entre el área delimitada por la curva C y su longitud. El matemático Lucasiano, el irlandés Sir George Stokes (1819 –

1903) siguiendo las ideas del físico y matemático, el inglés William Thompson (1824 – 1907), quien a su vez se basó en los trabajos del inglés George Green (1793 – 1841), enunció una fórmula que contiene esta relación como caso particular. Esta fórmula se conoce como el teorema de Stokes.

Si R es una superficie de dos caras cuya frontera es una curva C cerrada, rectificable y simple y $F(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ es una función vectorial con derivadas continuas, entonces se sigue que:

$$\oint_C F \cdot dr = \int_R \int (\nabla \times F) \cdot d\vec{s} = \int \int (\nabla \times F) \cdot \vec{n} ds,$$

en donde $dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vectores canónicos en \mathbb{R}^3 y $d\vec{s} = \vec{n} ds$, siendo \vec{n} el vector normal unitario al elemento diferencial $ds = dxdy$, de superficie.

Particularmente, considerando todo esto en el plano, R una región y $\vec{n} = k$, si el campo vectorial $F(t)$ está determinado mediante la función: $F(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, entonces se tiene que:

$$\oint_C f \cdot dr = \int_a^b xdy - ydx = \int \int_R (\nabla \times f) \cdot d\vec{s} = \int \int_R \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{n} dxdy =$$

$$2 \int \int_R dxdy = 2A(C)$$

en donde $A(C)$ representa el área delimitada por la curva de Jordan C , y donde C está orientada en sentido positivo.

Esto quiere decir que, si la curva de Jordan C en el plano XY está parametrizada por la relación $f(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$, entonces se tiene la siguiente fórmula:

$$A(C) = \frac{1}{2} \int (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \int (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt,$$

donde, como ya hemos dicho, $A(C) = A(R)$ denota el área de la región R limitada por la curva de Jordan rectificable C . Esta relación es una versión del teorema de Green en el plano y fue el panadero y matemático irlandés George Green quien la estableció por vez primera en su libro: *AN ESSAY ON THE APPLICATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM*.

El teorema de Green presupone la continuidad de la función $f(t)$ y de sus derivadas; sin embargo, puede generalizarse a curvas cerradas que están formadas por un número finito de arcos simples de clases C^1 , denominadas curvas C^1 a trozos o suaves a trozos; estas curvas pueden no tener derivada en un número finito de puntos o valores de t en $[a, b]$.

Además, el teorema de Green en el plano también puede generalizarse a regiones R múltiplemente conexas. Efectivamente, si podemos encontrar el área

determinada por las curvas de Jordan $C, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ tales que la C_i están en el interior de C para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, no se intersectan y están orientados en sentido positivo, entonces, para determinar $A(R)$ sólo es necesario restarle a $A(C)$ las áreas: $A(C_1), A(C_2), A(C_3), \dots, A(C_n)$, es decir, $A(R) = A(C) - \sum_{i=1}^n A(C_i)$ (ver Figura 5).

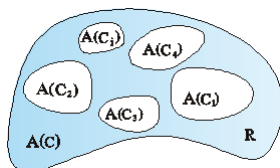


Figura 5: Teorema de Green en el plano para regiones múltiplemente conexas.

Así, mediante una aplicación sucesiva del teorema de Green podemos encontrar dicha área.

Consideremos una región múltiplemente conexa R , cuya frontera sea la unión de una curva C de Jordan de clase C^1 a trozos definida y orientada positivamente por la parametrización: $C(t) = (f_1(t), f_2(t)), t \in [a, b]$ y las curvas de Jordan disjuntas $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ también de clase C^1 , todas orientadas positivamente y definidas mediante las funciones paramétricas: $C_i(t) = (c_{i1}(t), c_{i2}(t)), i = 1, 2, 3, \dots, n$ y $t \in [a_i, b_i] \in \mathbb{R}$ para cada C_i y tales que $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ están en el $Int(C)$ y tienen interiores disjuntos. El teorema de Green para regiones múltiplemente conexas nos dan una forma práctica de hallar el área de R :

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt.$$

Ya que la búsqueda de las relaciones pitagóricas entre las curvas asociadas a los lados de un triángulo rectángulo conlleva el estudio de sus áreas asociadas, es necesario analizar la razón de cambio de las áreas asociadas en términos de los distintos tamaños de las curvas. Mediante el teorema de Green es posible determinar la razón $A(f(t))/A(g(t))$ de las áreas que delimitan las curvas de Jordan $f(t)$ y $g(t)$ relacionadas mediante la semejanza, $g = kf(t) = (kf_1, kf_2) : t \in [a, b]$. Entonces, el cociente de sus áreas es:

$$\frac{A(f(t))}{A(g(t))} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt}{\frac{1}{2} \int_a^b (g_1 g_2' - g_2 g_1') dt} = \frac{\int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt}{\int_a^b (k f_1 k f_2' - k f_2 k f_1') dt}$$

Es decir, $k^2 A(f(t)) = A(g(t))$. Por tanto, el área determinada por la curva $g(t) = kf(t) = (kf_1(t), kf_2(t))$ es la misma que la determinada por $f(t)$, multiplicada

por el factor k^2 . Evidentemente, si a la región le aplicamos una rotación y/o una traslación, el área de la nueva región coincide con el área de la región original. Ahora podemos enunciar una relación pitagórica asociada a una curva $f(t)$.

Teorema 1. *Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se dibujan curvas de Jordan rectificables f, g y h , semejantes y de tamaño proporcional a los lados, entonces se tiene que: $A(f) = A(g) + A(h)$.*

Demostración. En efecto, consideremos un triángulo rectángulo ABC (ver Figura 6), y una curva de Jordan rectificable y orientada positivamente $F(t) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ con $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ y construyamos las curvas de Jordan semejantes f, g y h mediante las relaciones: $f(t) = (AB)F(t)$, $g(t) = (BC)F(t)$ y $h(t) = (CA)F(t)$.

Estas curvas tienen la misma orientación que $F(t)$ y en la Figura 6 han sido asociadas a cada uno de los lados del triángulo rectángulo ABC a una distancia de $1/4$ de AB, BC y CA , respectivamente, con las correspondientes traslaciones y rotaciones. Sin embargo, podrían haber sido asociadas a cualquier distancia y posición; sólo es necesario conservar la proporcionalidad entre los dos y las curvas f, g y h .

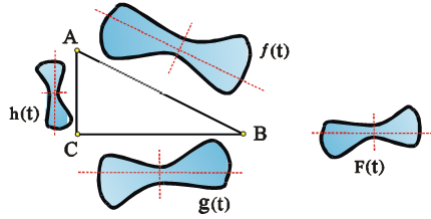


Figura 6: Curvas semejantes asociadas a los lados de un triángulo rectángulo ABC .

Utilizando el teorema de Green determinemos el área de cada una de las curvas f, g y h asociadas a los lados del triángulo rectángulo:

$$A(f(t)) = \frac{(AB)^2}{2} \int_a^b (F_1F_2' - F_2F_1') dt,$$

$$A(g(t)) = \frac{(BC)^2}{2} \int_a^b (F_1F_2' - F_2F_1') dt,$$

$$A(h(t)) = \frac{(CA)^2}{2} \int_a^b (F_1F_2' - F_2F_1') dt.$$

Así, partiendo del hecho de que en un triángulo rectángulo ABC se cumple la relación pitagórica: $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$ y multiplicando cada término por $\frac{1}{2} \int (F_1F_2' - F_2F_1') dt$, se tiene que: $A(f(t)) = A(g(t)) + A(h(t))$. \square

Para establecer una primera generalización de este teorema, consideremos la serie de elipses $E_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ que son homotéticas a la elipse $E(t) = (a \cos t, b \sin t)$ de semiejes a y b , $a > b$ y con $t \in [0, 2\pi]$. En la Figura 7 se muestra la familia de elipses que están relacionadas mediante las fórmulas: $E_1 = \frac{1}{2}E$, $E_2 = \frac{1}{4}E$, $E_3 = \frac{1}{8}E$, $E_4 = \frac{1}{16}E$, $E_5 = \frac{1}{16}E$.

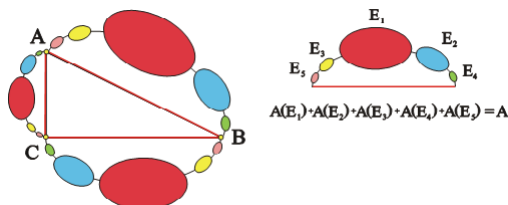


Figura 7: Teorema de Pitágoras para una familia de elipses.

El área total de todas ellas es: $\sum_{i=1}^5 A(E_i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) A(E(t))$.

Esta cadena de elipses se coloca en cada uno de los lados del triángulo rectángulo ABC según los factores de escala AB, BC y CA , con las correspondientes traslaciones y rotaciones. Ahora bien, el área de la elipse $E(t)$, según su representación paramétrica, es:

$$A(E(t)) = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

Entonces, la familia de elipses, E_{AB} , colocadas sobre el lado AB tiene por área:

$$A(E_{AB}) = (AB)^2 A(E(t)) = (AB)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i).$$

Y para los otros dos lados se tiene:

$$A(E_{BC}) = (BC)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i), \quad A(E_{CA}) = (CA)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i).$$

Y puesto que: $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$ entonces se tiene que:

$$(AB)^2 ab\pi = (BC)^2 ab\pi + (CA)^2 ab\pi.$$

De donde se deduce que:

$$(AB)^2 A(E_i) = (BC)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i) + (CA)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i).$$

Es decir: $A(EAB) = A(EBC) + A(ECA)$.

O dicho de otra forma, el área de la familia de elipses construida proporcionalmente sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC es igual a la suma de las áreas de la familia de elipses construidas proporcionalmente sobre los catetos.

Por tanto, usando este mismo argumento en un caso general, vemos que la conclusión del teorema también se verifica si reemplazamos la curva de Jordan por una unión finita de curvas de Jordan. Planteemos ahora otra generalización.

Si las figuras asociadas a cada uno de los lados del triángulo rectángulo ABC determinan regiones múltiplemente conexas entonces se deben hacer los ajustes necesarios para determinar la veracidad de la relación pitagórica encontrada. Pero ante todo, debe ser claro que las figuras asociadas a cada uno de los lados del triángulo rectángulo deben ser proporcionales a la longitud de éstos.

Efectivamente, consideremos una región R determinada por la curva C de Jordan de clase C^1 a trozos definida y orientada positivamente por la parametrización: $C(t) = (f_1(t), f_2(t))$ con $t \in [a, b]$ y las curvas de Jordan $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ de clase C^1 a trozos, todas orientadas positivamente, y definidas paramétricamente mediante las funciones: $C_i(t) = (c_{i1}(t), c_{i2}(t))$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ con $t \in [a_i, b_i]$ para cada $C_i(t)$, de tal forma que cada $C_i(t)$ está en el $\text{Int}(C)$ y tales que las C_i son disjuntas y sus interiores $\text{Int}(C_i)$ también son disjuntos (ver Figura 8).

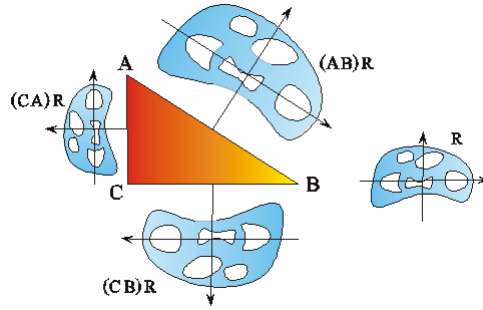


Figura 8: Teorema de Pitágoras para regiones múltiplemente conexas.

Entonces, para determinar el área de R utilizamos el teorema de Green para regiones múltiplemente conexas, y se tiene:

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt.$$

Si la región R aumenta o disminuye por el factor k , es decir:

$kC(t) = (kf_1(t), kf_2(t))$ y $kC_i(t) = (kc_{i1}(t), kc_{i2}(t))$ y por ello, su área debe aumentar en el factor k^2 , ya que:

$$A(kR) = \frac{k^2}{2} \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt$$

$$A(kR) = \frac{k^2}{2} \left[\int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right].$$

Así pues, si nuevamente consideramos la relación $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$ para el triángulo rectángulo ABC entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{(AB)^2}{2} \left[\int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right] \\ &= \frac{(BC)^2}{2} \left[\int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right] + \\ & \frac{(CA)^2}{2} \left[\int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right]. \end{aligned}$$

El término:

$$\frac{(AB)^2}{2} \left[\int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right] = A(R_{AB})$$

no es otra cosa que el área de la región R según el factor de escala u homotecia AB , es decir: $A(kR) = A((AB)R)$. Y lo mismo podemos decir de los términos: $A(R(BC))$ y $A(R(CA))$, es decir; $A(R(AB)) = A(R(BC)) + A(R(CA))$.

Así, tenemos que el área de la región $R(AB)$ múltiplemente conexa y proporcional a la magnitud del lado AB es igual a la suma de las áreas de las regiones $R(BC)$ y $R(CA)$, múltiplemente conexas, y proporcionales a los otros dos lados del triángulo rectángulo.

Hemos probado, por tanto, que el teorema también se verifica para regiones múltiplemente conexas.

Referencias

- [1] Altshiller, Court, N. College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle. Ed. Barnes Noble, Inc. 1952.
- [2] Boltyanskll, V. G. Figuras equivalentes y equidescomponibles. Ed. Limusa Wiley. México. 1973.

- [3] Bracho, Javier. Introducción analítica a la geometría. Ed. Fondo de la Cultura Económica. México. 2009.
- [4] Caniff, Patricia. Pitágoras. Colección Grandes Biografías. Edimat Libros S. A. España. 2004.
- [5] Gómez Pérez, Marco Antonio. Pitágoras. Ed. Grupo Editorial Tomo 1, S.A. de C. V. México. 2002.
- [6] Sigarreta, J. M., Mendieta, J.G. Hacia una generalización del teorema de Pitágoras. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 27, 179-194. 2011.

J. G. Mendieta,
Universidad Autónoma de Guerrero, México.

J. M. Rodríguez
Área de Matemática,
Universidad Carlos III de Madrid, España.

J. M. Sigarreta.
Universidad Autónoma de Guerrero, México.

INFORMACIÓN NACIONAL

La esquina olímpica

Rafael Sánchez Lamonedá

En esta edición de la Esquina Olímpica reseñamos la actividad de olimpiadas matemáticas durante el primer semestre del año 2013. De Enero a Junio se llevó a cabo la décima edición de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, con una participación en la primera fase, el Canguro Matemático, de 61754 alumnos, provenientes de 20 estados, 504 institutos y distribuidos de la siguiente manera: participaron 301 liceos públicos, con 40761 alumnos, y 203 colegios privados con 20811 estudiantes. Esta prueba se realizó el jueves 21 de marzo. Cabe señalar que el Canguro Matemático se lleva a cabo en 60 países, y todos ellos, salvo algunas excepciones, aplican la prueba el tercer jueves de marzo. Aquellos países que no lo hacen en esa fecha, lo pueden organizar después, nunca antes, y las pruebas no se suben a la red, antes del 30 de abril. El Canguro Matemático es el concurso de matemáticas más grande del mundo y convocó este año a más de cinco millones de jóvenes. La siguiente fase de la olimpiada, conocida como la Prueba Regional, fue el sábado 11 de Mayo. Esta consiste de una prueba escrita de 4 problemas de desarrollo. La presenta el diez por ciento superior de cada grado y de cada estado. Si bien el Canguro lo presentan los alumnos en sus colegios, la Prueba Regional la toman todos juntos en un colegio o preferiblemente en una universidad de cada estado participante. En esta etapa se otorgan medallas de oro, plata y bronce a los mejores estudiantes. La tercera y última parte de la competencia, llamada Final Nacional, se realizó en la Facultad de Ciencias de la UCV, en ella participaron los ganadores de medalla de oro en la fase anterior, en total, 137 estudiantes, representando a 19 estados. Los exámenes de cada una de las etapas, así como las listas de ganadores en la Prueba Regional y la Final Nacional, se pueden ver en nuestro sitio de internet, www.acm.ciens.ucv.ve.

En la escena internacional tenemos dos eventos a reseñar, la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, OMCC, y la 54^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO. La primera celebrada en Managua, Nicaragua, del 22 al 29 de Junio y la segunda en Santa Marta, Colombia, del 18 al 28 de Julio. El equipo de la OMCC estuvo integrado por tres estudiantes, Juan Cramer, del colegio San José, Maristas, de Maracay, José Guevara, colegio Bella

Vista, también de Maracay y Rafael Aznar, colegio Los Arcos, de Caracas. Los profesores tutor y jefe de la delegación, fueron, respectivamente, Darío Durán y José Nieto, ambos de la Universidad del Zulia. El joven Rafael Aznar ganó una medalla de bronce y Juan Cramer una mención honorífica. En esta OMCC participaron 39 estudiantes, tres por cada uno de los siguientes países: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela. El equipo de la IMO estuvo integrado por la estudiante Rubmary Rojas, del colegio San Vicente de Paúl, de Barquisimeto, la tutora fue Sofía Taylor, estudiante de la licenciatura en Física de la UCV y el jefe de la delegación Rafael Sánchez, también de la UCV. Rubmary ganó una mención honorífica. En esta IMO participaron 97 países y un total de 527 estudiantes. Pueden ver más información en www.imo-official.org.

Antes de finalizar esta Esquina Olímpica, un agradecimiento a nuestros patrocinadores y amigos, Fundación Empresas Polar, Acumuladores Duncan, la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman, MRW, la Academia Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, las universidades UCV, UNIMET, USB, Carabobo, LUZ, URU, ULA, UCLA, UNEXPO y UDO. Muchas gracias por seguir con nosotros otro año más.

Para terminar les ofrecemos los exámenes propuestos en la IMO de este año. La duración de las pruebas fue de 4 horas y media y cada problema tiene un valor de 7 puntos.

OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS SANTA MARTA, 23 de julio de 2013 Primer Día

Problema 1. Demostrar que para cualquier par de enteros positivos k y n , existen k enteros positivos m_1, m_2, \dots, m_k (no necesariamente distintos) tales que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Problema 2. Una configuración de 4027 puntos del plano, de los cuales 2013 son rojos y 2014 azules, y no hay tres de ellos que sean colineales, se llama *colombiana*. Trazando algunas rectas, el plano queda dividido en varias regiones. Una colección de rectas es *buena* para una configuración colombiana si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- ninguna recta pasa por ninguno de los puntos de la configuración;
- ninguna región contiene puntos de ambos colores.

Hallar el menor valor de k tal que para cualquier configuración colombiana de 4027 puntos hay una colección buena de k rectas.

Problema 3. Supongamos que el excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A es tangente al lado BC en el punto A_1 . Análogamente, se definen los puntos B_1 en CA y C_1 en AB , utilizando los excírculos opuestos a B y C respectivamente. Supongamos que el circuncentro del triángulo $A_1B_1C_1$ pertenece a la circunferencia que pasa por los vértices A , B y C . Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo.

El excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC , a la prolongación del lado AB más allá de B , y a la prolongación del lado AC más allá de C . Análogamente se definen los excírculos opuestos a los vértices B y C

OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS SANTA MARTA, 24 de julio de 2013 Segundo Día

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H , y sea W un punto sobre el lado BC , estrictamente entre B y C . Los puntos M y N son los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Se denota por ω_1 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BWN , y por X el punto de ω_1 tal que WX es un diámetro de ω_1 . Análogamente, se denota por ω_2 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo CWM , y por Y el punto de ω_2 tal que WY es un diámetro de ω_2 . Demostrar que los puntos X , Y y H son colineales.

Problema 5. Sea $\mathbb{Q}_{>0}$ el conjunto de los números racionales mayores que cero. Sea $f : \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las tres siguientes condiciones:

- (i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
- (ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
- (iii) existe un número racional $a > 1$ tal que $f(a) = a$.

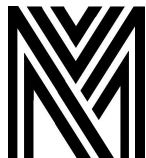
Demostrar que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Problema 6. Sea $n \geq 3$ un número entero. Se considera una circunferencia en la que se han marcado $n + 1$ puntos igualmente espaciados. Cada punto se etiqueta con uno de los números $0, 1, \dots, n$ de manera que cada número se usa exactamente una vez. Dos distribuciones de etiquetas se consideran la misma si una se puede obtener de la otra por una rotación de la circunferencia. Una distribución de etiquetas se llama *bonita* si, para cualesquiera cuatro etiquetas $a < b < c < d$ con $a + d = b + c$ la cuerda que une los puntos etiquetados a y d no corta la cuerda que une los puntos etiquetados b y c .

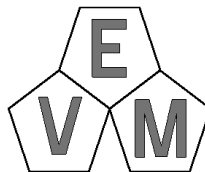
Sea M el número de distribuciones bonitas y N el número de pares ordenados (x, y) de enteros positivos tales que $x + y \leq n$ y $\text{mcd}(x, y) = 1$. Demostrar que

$$M = N + 1.$$

Rafael Sánchez Lamonedá
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV
e-mail: asomatemat8@gmail.com



Asociación Matemática Venezolana
Escuela Venezolana de Matemáticas



XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas

EMALCA Venezuela

Universidad de Los Andes, Mérida, 1 al 6 de septiembre, 2013

Cursos de la XXVI EVM – EMALCA Venezuela 2013

Curso I

Desarrollo de los Conceptos de Funciones Convexas.

Nelson Merentes, Universidad Central de Venezuela; Sergio Rivas, Universidad Nacional Abierta, Caracas, Venezuela.

Curso II

Sistemas dinámicos y minimización convexa en espacios de Hilbert.

Juan Peypouquet, Universidad Técnica Federico Santa María. Valparaiso, Chile.

Curso III

Teoría Ergódica.

Eleonora Catsigeras. Universidad de La República. Montevideo, Uruguay.

Nota: El curso se suspendió por razones de fuerza mayor que impidieron el viaje de la profesora.

Curso IV

Matemáticas de las elecciones.

Ramón Pino, Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela.

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs.F. 10 (US\$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history, philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance. All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsibility of the author. All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs.F. 10 (US\$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: <http://boletinamv.ma.usb.ve/>

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XX, Número 1, Año 2013

EDITORIAL

La conjetura de Goldbach Oswaldo Araujo	3
---	----------

ARTÍCULOS

Topología de Zariski para el espectro del módulo libre $(K[X])^s$. Sandra P. Barragán Moreno	7
---	----------

Invariant points under strict contractive conditions. Ravindra K. Bisht and Aditya Harbola.	21
---	-----------

Bounds on the effective energy density of a more general class of the Willis dielectric Composites. G. Tepedino, J. Quintero, E. Marquina.	33
--	-----------

Bounds on the effective energy density of a special class p-dielectric. Gaetano Tepedino, Javier Quintero, Eribel Marquina	55
---	-----------

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Una visión universitaria del teorema de Pitágoras. J. G. Mendieta, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta	73
---	-----------

INFORMACIÓN NACIONAL

La esquina olímpica Rafael Sánchez Lamonedá	85
---	-----------

XXVI EVM–EMALCA 2013	89
-----------------------------	-----------