

**DIVULGACIÓN CIENTÍFICA**

## Una visión universitaria del teorema de Pitágoras

J. G. Mendieta, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta

**Resumen.** El objetivo del trabajo es extender las ideas básicas del conocido teorema de Pitágoras al marco de las Matemáticas de la Universidad.

**Abstract.** The objective of this work is to extend the basic ideas of the famous Pythagorean theorem to the framework of University Mathematics.

### Introducción.

El teorema de Pitágoras, tal y como se conoció por los geómetras del antiguo mundo griego, establece que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, sin embargo, desde que se aprende, en los cursos de geometría elemental, hay quienes sospechan algo más, quizá la misma palabra, “cuadrado” los induce a creer que sobre los lados puede construirse otro tipo de figuras: ¿por qué no triángulos o círculos?

Para extender las ideas sobre el teorema de Pitágoras de la Matemática Escolar a la Matemática Universitaria, comenzaremos por analizar varios conceptos clásicos de la Matemática Superior; el primero de ellos es el de curva. Una primera aproximación nos proporciona la definición de Curva como una aplicación o función  $f(t)$  de un intervalo  $[a, b] = I$  en  $\mathbb{R}$  a un subconjunto  $C$  del espacio  $\mathbb{R}^3$  (o del plano), de tal manera que la función vectorial de variable real  $f$  puede considerarse como la traza descrita por el radiovector  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ ,  $t \in [a, b]$ .

Desde luego, debe hacerse la clara distinción entre la curva  $C$  y la función  $f(t)$  que la describe; la curva  $C$  es la imagen de la función  $f(t)$  en  $\mathbb{R}^3$ , es decir:  $C = \{(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \in \mathbb{R}^3 | t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}\}$ .

De este modo, la intención original de esta definición es la de poder considerar a una curva como la trayectoria en el espacio que describe el movimiento de una

partícula.

Una curva es suave si  $f(t)$  es de clase  $C^1[a, b]$  y  $f'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ , lo que equivale a decir que la curva tiene una tangente bien definida en cada uno de los puntos que la constituyen. Si la curva puede considerarse como la unión de curvas suaves, entonces se dice que es suave a trozos. Consideraremos únicamente curvas suaves o suaves a trozos. Una curva se llama rectificable si tiene una longitud bien determinada, es decir, finita. Mediante las poligonales y el concepto de integral de Riemann se puede demostrar que la longitud de la

curva  $C$  parametrizada mediante  $f(t)$ , es:  $s(t) = \int_a^t \left| \frac{df(t)}{dt} \right| dt$ ,  $t \in [a, b]$ .

No es mucho pedir que una curva tenga longitud finita, aunque es cierto que al estudiar las figuras fractales se encuentran “curvas” que tienen longitud infinita a pesar de tener un punto inicial y uno final bien definidos (la curva de Koch es un ejemplo de ello).

Consideremos una curva  $C$  descrita mediante la función paramétrica  $f(t)$ ,  $t \in I = [a, b]$ . Si la curva  $C$  tiene sus puntos  $f(t)$  en un mismo plano para todo  $t \in [a, b]$ , entonces decimos que es plana. Si  $f(t_1) \neq f(t_2)$  siempre que  $t_1 \neq t_2$  para todo  $t_1, t_2 \in I = [a, b]$  entonces la curva se llama simple. Si  $f(a) = f(b)$  entonces la curva  $C$  se llama cerrada. La curva  $f(t)$  es suave y cerrada si  $f(a) = f(b)$  y  $f'(a) = kf'(b)$  para algún  $k > 0$ . Se dice que una curva es simple y cerrada si  $f(t_1) \neq f(t_2)$  cuando  $t_1 \neq t_2$  para todo  $t_1, t_2 \in I = [a, b]$  siempre que  $t_1$  y  $t_2$  no sean  $a$  y  $b$ , porque en ese caso  $f(a) = f(b)$ . Una curva  $f(t)$  plana, cerrada y simple se llama curva de Jordan, debido a los trabajos que efectuó, sobre curvas y su longitud, el eminente matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922).

Una curva de Jordan  $C$  divide el plano en dos conjuntos; uno es el interior de  $C$  y el otro exterior, los cuales se denotan, respectivamente, por  $Int(C)$  y  $Ext(C)$ . El conjunto  $Int(C)$  es acotado mientras que  $Ext(C)$  no lo es; además,  $Int(C)$  y  $Ext(C)$  son conjuntos disjuntos; la frontera de  $Int(C)$  y de  $Ext(C)$  es  $C$ ; la frontera de un conjunto  $R$  se denota por  $\partial R$  y si  $R$  es o bien  $Int(C)$  o bien  $Ext(C)$ , se tiene que  $\partial R = C$ . Al hecho de que una curva de Jordan y su demostración requiere el análisis de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones para ecuaciones diferenciales.

Diremos que una región es un subconjunto cerrado del plano cuya frontera es la unión de un número finito de curvas de Jordan. El interior de una curva de Jordán rectificable  $C$  es una región  $R$  bien definida. La región  $R$  puede ser convexa o no. Decimos que una región  $R$  es convexa si la recta  $l$  que une dos puntos cualesquiera,  $x$  e  $y$  de  $R$ , también está contenida en  $R$ . Es decir,  $R$  es convexa si  $x, y \in R \rightarrow xy = l \subset R$ , con  $l$  definido como el segmento en el plano euclídeo:  $l = \{\alpha(\lambda) | \alpha(\lambda) = x + \lambda(y - x), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ .

Una región  $R$  se llama arcoconexa si dados dos puntos cualesquiera de  $R$ , existe una curva  $\varphi(\lambda)$  que los une y que también está contenida en  $R$ ; es decir,  $R$  es

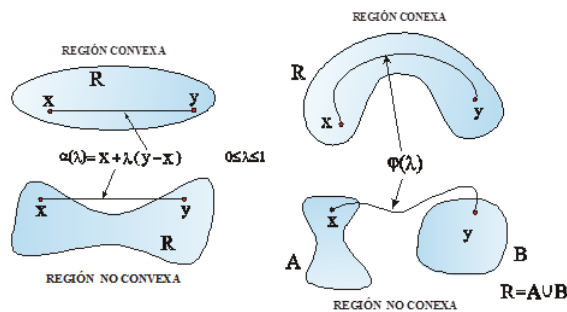


Figura 1: Regiones convexas y conexas

arcoconexa si para todo  $x, y \in R$ , existe  $\varphi(\lambda)$ , definida y continua en  $[0, 1]$ , tal que  $\varphi(0) = x, \varphi(\lambda) = y$  y  $\varphi(\lambda) \in R, \forall \lambda \in [0, 1]$ . El interior  $Int(C)$  de una curva de Jordan es arcoconexo, mientras que la unión de los interiores de dos curvas de Jordan disjuntas no es arcoconexa si dichos interiores son disjuntos, las ideas anteriores se pueden visualizar en la Figura 1.

Decimos que la región  $R$  es simplemente conexa si es conexa y el interior de cualquier curva de Jordan en la región  $R$  pertenece también a  $R$ , es decir, si para toda curva de Jordan  $G \subset R$  se tiene entonces  $Int(G) \subset R$ . Equivalentemente, la región  $R$  es simplemente conexa si es el interior de una curva de Jordan. O, expresado de forma heurística,  $R$  es simplemente conexa si no tiene agujeros.

Ahora, consideramos una región  $R_1$  delimitada por la curva de Jordan  $C$  y una curva simple y cerrada  $C_1$  en  $Int(C)$  (ver Figura 2). Como  $R_1 = Int(C) - Int(C_1)$  no contiene al  $Int(C_1)$ , se dice que  $R_1$  tiene un agujero y que no es simplemente conexa. Si ahora  $R$  denota la región delimitada por la curva de Jordan  $C$  y existen curvas de Jordan rectificables y disjuntas  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  en la región  $R$ , tales que sus interiores también son disjuntos, entonces a la región:

$$R_1 = R - Int(C_1) - Int(C_2) - Int(C_3) - \dots - Int(C_n)$$

se le llama múltiplemente conexa (ver Figura 2).

Así, una región que tiene un agujero es múltiplemente conexa de orden uno, si tiene dos se llama múltiplemente coneza de orden dos y en general si tiene  $n$  agujeros se llama múltiplemente conexa de orden  $n$ .

Ahora nos ocuparemos de otro concepto, la orientabilidad de una curva. Se dice que una curva cerrada simple parametrizada  $C$  tiene orientación, o que es una curva orientada, si al recorrer  $C$  en el sentido creciente del parámetro  $t$  se deja sólo de un lado el interior de la misma. Decimos que la orientación es positiva si el interior queda a la izquierda de la curva o, dicho de otra forma, si  $C$  se

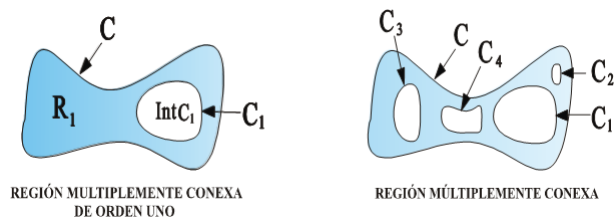


Figura 2: Regiones múltiplemente conexas.

recorre en sentido contrario a la agujas del reloj como se observa en la siguiente figura:

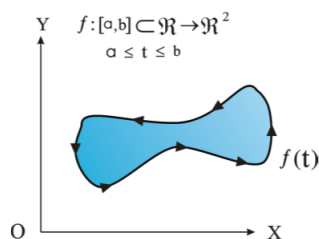


Figura 3: Orientación de una curva  $C$  parametrizada.

Esta idea de orientabilidad es muy elemental pero útil para nuestro objetivo. Ahora, en el caso de las superficies, se dice que una superficie  $S$  es orientable o que tiene dos caras si para cualquier curva  $g(t)$  cerrada sobre la superficie  $S$  existe una elección de vector normal  $\vec{n}$  a la superficie  $S$  desplazándose de forma continua a lo largo de la curva  $g(t)$  de tal manera que al retornar al punto inicial, la orientación de  $\vec{n}$  no cambia (ver Figura 4).

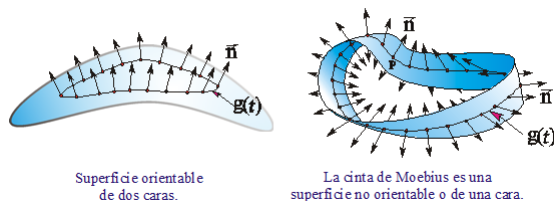


Figura 4: Superficies orientables y no orientables.

Aquí se debe entender, desde luego, que la normal  $\vec{n}$  a  $S$  en el punto  $P$  es perpendicular a cualquier tangente a  $S$  en  $P$  y en cualquier dirección; es decir,

la normal  $\vec{n}$  es perpendicular a todas y cada una de ellas, ya que todas las tangentes a  $S$  en  $P$  constituyen un plano, el plano tangente a  $S$  en  $P$ . En la Figura 4 se puede observar el comportamiento de una normal  $\vec{n}$  que se desliza sobre una superficie orientable y una no orientable.

Sin embargo, esta función elemental de orientabilidad sólo nos lleva a una noción primeriza que no es operativa, ya que determinar si una superficie es orientable en términos de curvas cerradas sobre  $S$  puede resultar un problema bastante difícil. Aún así, no necesitamos aquí más que esa noción de orientabilidad y supondremos que las curvas y superficies son orientables. Quizá el ejemplo más popular de superficie no orientable o de una sola cara lo constituye la cinta de Moebius que aparece en la Figura 4.

Ahora, consideramos dos curvas parametrizadas en  $[a, b]$ ,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \quad g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t));$$

se dice que  $f(t)$  y  $g(t)$  son curvas semejantes u homotéticas si existe una constante  $k \in \mathbb{R}$  tal que:  $g(t) = kf(t) = (kf_1(t), kf_2(t), kf_3(t))$ . Quizá podamos entender esto mejor si pensamos en términos de una transformación en el espacio  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que:

$$T[f(t)] = T[f_1(t), f_2(t), f_3(t)] = (kf_1(t), kf_2(t), kf_3(t)) = g(t).$$

Si  $k = 1$  decimos que las curvas son congruentes o que la transformación  $T[f(t)]$  es una isometría. Si  $k > 1$  decimos que es una dilatación y si  $0 < k < 1$  decimos que es una contracción. Si  $k = 0$  la curva imagen se reduce a un punto, y si  $k < 0$  la curva es simétrica con respecto al origen, es decir, se refleja con respecto al origen. Esto significa, geoméricamente, que la curva  $f(t)$  se amplifica o reduce para poder coincidir con  $g(t)$ .

La Geometría Diferencial determina un estudio mucho más profundo de las curvas. Las curvas en el espacio están caracterizadas mediante la curvatura  $k$  y la torsión  $\tau$ , que pueden considerarse como funciones de la longitud  $s$  de la curva,  $k(s)$  y  $\tau(s)$ . Mediante estas cantidades el Teorema Fundamental para las Curvas establece que si dos curvas en el espacio tienen la misma curvatura y torsión entonces son la misma, salvo quizá una rotación y/o traslación que las haga coincidir; sin embargo, la reflexión sobre las relaciones pitagóricas asociadas a curvas nos reduce a un tipo de curvas más restringido, es decir, a las curvas planas; en ellas  $\tau(s) = 0$  y, por ello, consideraremos que las curvas asociadas a las relaciones pitagóricas son planas, es decir, tienen la forma:  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ . Además, la relación de las áreas determinadas por las curvas, nos lleva a considerar curvas semejantes, puesto que las figuras colocadas proporcionalmente sobre los catetos presupone su semejanza, y por ello, sólo nos interesa el área que determinan.

Existe una relación fundamental entre el área delimitada por la curva  $C$  y su longitud. El matemático Lucasiano, el irlandés Sir George Stokes (1819 –

1903) siguiendo las ideas del físico y matemático, el inglés William Thompson (1824 – 1907), quien a su vez se basó en los trabajos del inglés George Green (1793 – 1841), enunció una fórmula que contiene esta relación como caso particular. Esta fórmula se conoce como el teorema de Stokes.

Si  $R$  es una superficie de dos caras cuya frontera es una curva  $C$  cerrada, rectificable y simple y  $F(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$  es una función vectorial con derivadas continuas, entonces se sigue que:

$$\oint_C F \cdot dr = \int_R \int (\nabla \times F) \cdot d\vec{s} = \int \int (\nabla \times F) \cdot \vec{n} ds,$$

en donde  $dr = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ , con  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  vectores canónicos en  $\mathbb{R}^3$  y  $d\vec{s} = \vec{n} ds$ , siendo  $\vec{n}$  el vector normal unitario al elemento diferencial  $ds = dxdy$ , de superficie.

Particularmente, considerando todo esto en el plano,  $R$  una región y  $\vec{n} = k$ , si el campo vectorial  $F(t)$  está determinado mediante la función:  $F(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ , entonces se tiene que:

$$\oint_C f \cdot dr = \int_a^b xdy - ydx = \int \int_R (\nabla \times f) \cdot d\vec{s} = \int \int_R \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{n} dxdy =$$

$$2 \int \int_R dxdy = 2A(C)$$

en donde  $A(C)$  representa el área delimitada por la curva de Jordan  $C$ , y donde  $C$  está orientada en sentido positivo.

Esto quiere decir que, si la curva de Jordan  $C$  en el plano  $XY$  está parametrizada por la relación  $f(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ , entonces se tiene la siguiente fórmula:

$$A(C) = \frac{1}{2} \int (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \int (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt,$$

donde, como ya hemos dicho,  $A(C) = A(R)$  denota el área de la región  $R$  limitada por la curva de Jordan rectificable  $C$ . Esta relación es una versión del teorema de Green en el plano y fue el panadero y matemático irlandés George Green quien la estableció por vez primera en su libro: *AN ESSAY ON THE APPLICATION OF MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM*.

El teorema de Green presupone la continuidad de la función  $f(t)$  y de sus derivadas; sin embargo, puede generalizarse a curvas cerradas que están formadas por un número finito de arcos simples de clases  $C^1$ , denominadas curvas  $C^1$  a trozos o suaves a trozos; estas curvas pueden no tener derivada en un número finito de puntos o valores de  $t$  en  $[a, b]$ .

Además, el teorema de Green en el plano también puede generalizarse a regiones  $R$  múltiplemente conexas. Efectivamente, si podemos encontrar el área

determinada por las curvas de Jordan  $C, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  tales que la  $C_i$  están en el interior de  $C$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , no se intersectan y están orientados en sentido positivo, entonces, para determinar  $A(R)$  sólo es necesario restarle a  $A(C)$  las áreas:  $A(C_1), A(C_2), A(C_3), \dots, A(C_n)$ , es decir,  $A(R) = A(C) - \sum_{i=1}^n A(C_i)$  (ver Figura 5).

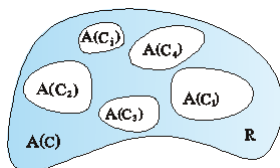


Figura 5: Teorema de Green en el plano para regiones múltiplemente conexas.

Así, mediante una aplicación sucesiva del teorema de Green podemos encontrar dicha área.

Consideremos una región múltiplemente conexa  $R$ , cuya frontera sea la unión de una curva  $C$  de Jordan de clase  $C^1$  a trozos definida y orientada positivamente por la parametrización:  $C(t) = (f_1(t), f_2(t)), t \in [a, b]$  y las curvas de Jordan disjuntas  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  también de clase  $C^1$ , todas orientadas positivamente y definidas mediante las funciones paramétricas:  $C_i(t) = (c_{i1}(t), c_{i2}(t)), i = 1, 2, 3, \dots, n$  y  $t \in [a_i, b_i] \in \mathbb{R}$  para cada  $C_i$  y tales que  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  están en el  $Int(C)$  y tienen interiores disjuntos. El teorema de Green para regiones múltiplemente conexas nos dan una forma práctica de hallar el área de  $R$ :

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt.$$

Ya que la búsqueda de las relaciones pitagóricas entre las curvas asociadas a los lados de un triángulo rectángulo conlleva el estudio de sus áreas asociadas, es necesario analizar la razón de cambio de las áreas asociadas en términos de los distintos tamaños de las curvas. Mediante el teorema de Green es posible determinar la razón  $A(f(t))/A(g(t))$  de las áreas que delimitan las curvas de Jordan  $f(t)$  y  $g(t)$  relacionadas mediante la semejanza,  $g = kf(t) = (kf_1, kf_2) : t \in [a, b]$ . Entonces, el cociente de sus áreas es:

$$\frac{A(f(t))}{A(g(t))} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt}{\frac{1}{2} \int_a^b (g_1 g_2' - g_2 g_1') dt} = \frac{\int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt}{\int_a^b (k f_1 k f_2' - k f_2 k f_1') dt}$$

Es decir,  $k^2 A(f(t)) = A(g(t))$ . Por tanto, el área determinada por la curva  $g(t) = kf(t) = (kf_1(t), kf_2(t))$  es la misma que la determinada por  $f(t)$ , multiplicada

por el factor  $k^2$ . Evidentemente, si a la región le aplicamos una rotación y/o una traslación, el área de la nueva región coincide con el área de la región original. Ahora podemos enunciar una relación pitagórica asociada a una curva  $f(t)$ .

**Teorema 1.** *Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se dibujan curvas de Jordan rectificables  $f, g$  y  $h$ , semejantes y de tamaño proporcional a los lados, entonces se tiene que:  $A(f) = A(g) + A(h)$ .*

*Demostración.* En efecto, consideremos un triángulo rectángulo  $ABC$  (ver Figura 6), y una curva de Jordan rectificable y orientada positivamente  $F(t) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$  con  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  y construyamos las curvas de Jordan semejantes  $f, g$  y  $h$  mediante las relaciones:  $f(t) = (AB)F(t)$ ,  $g(t) = (BC)F(t)$  y  $h(t) = (CA)F(t)$ .

Estas curvas tienen la misma orientación que  $F(t)$  y en la Figura 6 han sido asociadas a cada uno de los lados del triángulo rectángulo  $ABC$  a una distancia de  $1/4$  de  $AB, BC$  y  $CA$ , respectivamente, con las correspondientes traslaciones y rotaciones. Sin embargo, podrían haber sido asociadas a cualquier distancia y posición; sólo es necesario conservar la proporcionalidad entre los dos y las curvas  $f, g$  y  $h$ .

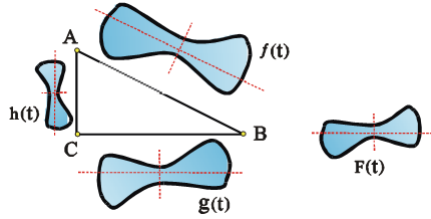


Figura 6: Curvas semejantes asociadas a los lados de un triángulo rectángulo  $ABC$ .

Utilizando el teorema de Green determinemos el área de cada una de las curvas  $f, g$  y  $h$  asociadas a los lados del triángulo rectángulo:

$$A(f(t)) = \frac{(AB)^2}{2} \int_a^b (F_1F_2' - F_2F_1') dt,$$

$$A(g(t)) = \frac{(BC)^2}{2} \int_a^b (F_1F_2' - F_2F_1') dt,$$

$$A(h(t)) = \frac{(CA)^2}{2} \int_a^b (F_1F_2' - F_2F_1') dt.$$

Así, partiendo del hecho de que en un triángulo rectángulo  $ABC$  se cumple la relación pitagórica:  $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$  y multiplicando cada término por  $\frac{1}{2} \int (F_1F_2' - F_2F_1') dt$ , se tiene que:  $A(f(t)) = A(g(t)) + A(h(t))$ .  $\square$



Para establecer una primera generalización de este teorema, consideremos la serie de elipses  $E_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$  que son homotéticas a la elipse  $E(t) = (a \cos t, b \sin t)$  de semiejes  $a$  y  $b$ ,  $a > b$  y con  $t \in [0, 2\pi]$ . En la Figura 7 se muestra la familia de elipses que están relacionadas mediante las fórmulas:  $E_1 = \frac{1}{2}E$ ,  $E_2 = \frac{1}{4}E$ ,  $E_3 = \frac{1}{8}E$ ,  $E_4 = \frac{1}{16}E$ ,  $E_5 = \frac{1}{16}E$ .

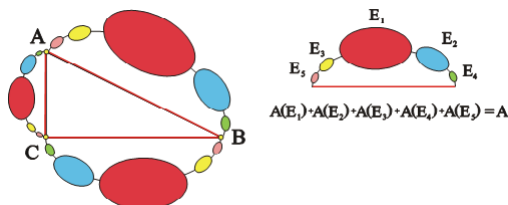


Figura 7: Teorema de Pitágoras para una familia de elipses.

El área total de todas ellas es:  $\sum_{i=1}^5 A(E_i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) A(E(t))$ .

Esta cadena de elipses se coloca en cada uno de los lados del triángulo rectángulo  $ABC$  según los factores de escala  $AB, BC$  y  $CA$ , con las correspondientes traslaciones y rotaciones. Ahora bien, el área de la elipse  $E(t)$ , según su representación paramétrica, es:

$$A(E(t)) = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

Entonces, la familia de elipses,  $E_{AB}$ , colocadas sobre el lado  $AB$  tiene por área:

$$A(E_{AB}) = (AB)^2 A(E(t)) = (AB)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i).$$

Y para los otros dos lados se tiene:

$$A(E_{BC}) = (BC)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i), \quad A(E_{CA}) = (CA)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i).$$

Y puesto que:  $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$  entonces se tiene que:

$$(AB)^2 ab\pi = (BC)^2 ab\pi + (CA)^2 ab\pi.$$

De donde se deduce que:

$$(AB)^2 A(E_i) = (BC)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i) + (CA)^2 \sum_{i=1}^5 A(E_i).$$

Es decir:  $A(EAB) = A(EBC) + A(ECA)$ .

O dicho de otra forma, el área de la familia de elipses construida proporcionalmente sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo  $ABC$  es igual a la suma de las áreas de la familia de elipses construidas proporcionalmente sobre los catetos.

Por tanto, usando este mismo argumento en un caso general, vemos que la conclusión del teorema también se verifica si reemplazamos la curva de Jordan por una unión finita de curvas de Jordan. Planteemos ahora otra generalización.

Si las figuras asociadas a cada uno de los lados del triángulo rectángulo  $ABC$  determinan regiones múltiplemente conexas entonces se deben hacer los ajustes necesarios para determinar la veracidad de la relación pitagórica encontrada. Pero ante todo, debe ser claro que las figuras asociadas a cada uno de los lados del triángulo rectángulo deben ser proporcionales a la longitud de éstos.

Efectivamente, consideremos una región  $R$  determinada por la curva  $C$  de Jordan de clase  $C^1$  a trozos definida y orientada positivamente por la parametrización:  $C(t) = (f_1(t), f_2(t))$  con  $t \in [a, b]$  y las curvas de Jordan  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  de clase  $C^1$  a trozos, todas orientadas positivamente, y definidas paramétricamente mediante las funciones:  $C_i(t) = (c_{i1}(t), c_{i2}(t))$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  con  $t \in [a_i, b_i]$  para cada  $C_i(t)$ , de tal forma que cada  $C_i(t)$  está en el  $Int(C)$  y tales que las  $C_i$  son disjuntas y sus interiores  $Int(C_i)$  también son disjuntos (ver Figura 8).

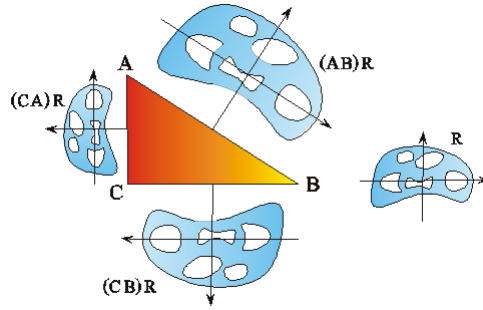


Figura 8: Teorema de Pitágoras para regiones múltiplemente conexas.

Entonces, para determinar el área de  $R$  utilizamos el teorema de Green para regiones múltiplemente conexas, y se tiene:

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt.$$

Si la región  $R$  aumenta o disminuye por el factor  $k$ , es decir:

$kC(t) = (kf_1(t), kf_2(t))$  y  $kC_i(t) = (kc_{i1}(t), kc_{i2}(t))$  y por ello, su área debe aumentar en el factor  $k^2$ , ya que:

$$A(kR) = \frac{k^2}{2} \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt$$

$$A(kR) = \frac{k^2}{2} \left[ \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right].$$

Así pues, si nuevamente consideramos la relación  $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$  para el triángulo rectángulo  $ABC$  entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{(AB)^2}{2} \left[ \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right] \\ &= \frac{(BC)^2}{2} \left[ \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right] + \\ & \frac{(CA)^2}{2} \left[ \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right]. \end{aligned}$$

El término:

$$\frac{(AB)^2}{2} \left[ \int_a^b (f_1 f_2' - f_2 f_1') dt - \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} (c_{i1} c_{i2}' - c_{i2} c_{i1}') dt \right] = A(R_{AB})$$

no es otra cosa que el área de la región  $R$  según el factor de escala u homotecia  $AB$ , es decir:  $A(kR) = A((AB)R)$ . Y lo mismo podemos decir de los términos:  $A(R(BC))$  y  $A(R(CA))$ , es decir:  $A(R(AB)) = A(R(BC)) + A(R(CA))$ .

Así, tenemos que el área de la región  $R(AB)$  múltiplemente conexa y proporcional a la magnitud del lado  $AB$  es igual a la suma de las áreas de las regiones  $R(BC)$  y  $R(CA)$ , múltiplemente conexas, y proporcionales a los otros dos lados del triángulo rectángulo.

Hemos probado, por tanto, que el teorema también se verifica para regiones múltiplemente conexas.

## Referencias

- [1] Altshiller, Court, N. College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle. Ed. Barnes Noble, Inc. 1952.
- [2] Boltyanskll, V. G. Figuras equivalentes y equidescomponibles. Ed. Limusa Wiley. México. 1973.

- [3] Bracho, Javier. Introducción analítica a la geometría. Ed. Fondo de la Cultura Económica. México. 2009.
- [4] Caniff, Patricia. Pitágoras. Colección Grandes Biografías. Edimat Libros S. A. España. 2004.
- [5] Gómez Pérez, Marco Antonio. Pitágoras. Ed. Grupo Editorial Tomo 1, S.A. de C. V. México. 2002.
- [6] Sigarreta, J. M., Mendieta, J.G. Hacia una generalización del teorema de Pitágoras. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 27, 179-194. 2011.

J. G. Mendieta,  
Universidad Autónoma de Guerrero, México.

J. M. Rodríguez  
Área de Matemática,  
Universidad Carlos III de Madrid, España.

J. M. Sigarreta.  
Universidad Autónoma de Guerrero, México.