

Fleuves oscillants

Franck Michel

Abstract

We present in this article some results about the asymptotic of scalar ordinary differential equations. We are interested in a family of equations, for which asymptotic concentrations of oscillatory solutions occur. With the following theorems, the presence of these trajectories can be deduced from the structure of the fields. The expression of their asymptotic expansion, and the algorithm to use for computing the coefficients (which are periodic functions) are given. Some studies for non oscillatory cases have already been done. There are related to what is called the “river phenomenon”.

1 Introduction

1.1 Généralités

F. et M. Diener ont étudié récemment des phénomènes de concentration exponentielle (à l’infini) de solutions d’équations différentielles ordinaires. Ces nouveaux types d’attracteurs ont reçu le nom de “fleuve” en raison de leur aspect sur les portraits de phase (voir figures 1 et 2). Pour une équation scalaire de la forme : $\frac{dY}{dX} = \sum_{j=0}^n P_j(X)Y^j$ où $P_j(X)$ est un polynôme (au sens large, i.e les puissances de X sont prises dans \mathbb{Q}), on dispose d’une méthode effective pour détecter la présence de ces fleuves. Ceux-ci sont soit attractifs, on a alors une infinité de solutions qui partagent un même développement asymptotique, soit répulsifs, auquel cas une unique solution est asymptotiquement instable. Les développements de ces fleuves (en puissances fractionnaires de X), sont généralement divergents mais toujours Gevrey. Les résultats ont été obtenus par des changements d’échelle et des méthodes d’analyse non standard (voir [6],[8], [5],[7], [13],[4]).

Received by the editors May 1994

Communicated by J. Mawhin

AMS Mathematics Subject Classification : 34E05, 34D05, 34C25

Keywords : differential equations, asymptotic expansions, river, periodic solutions.

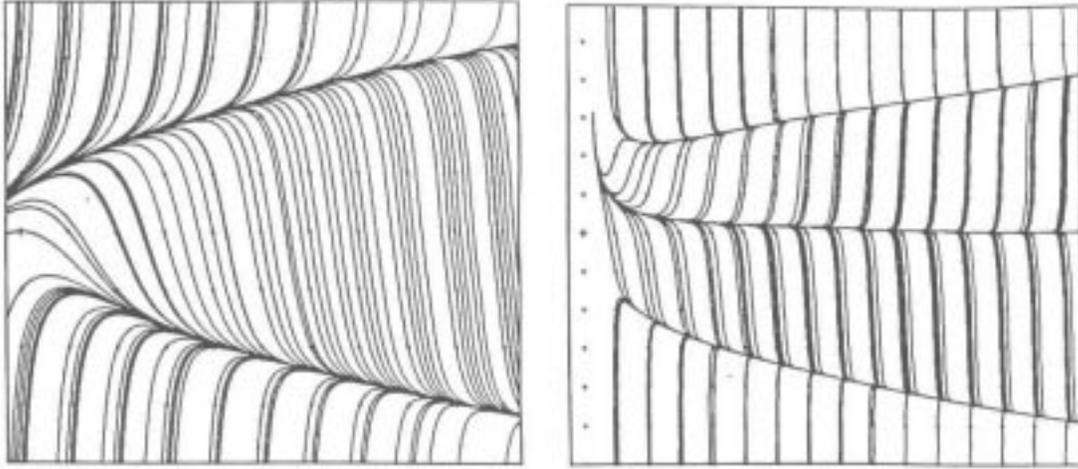


Figure 1: Fleuves “classiques” : $Y' = Y^2 - X$ et $Y' = -(Y - 1/X)(Y - \exp(1/X)X^{1/2})(Y + \cos(1/X)X^{1/2} + 1)$

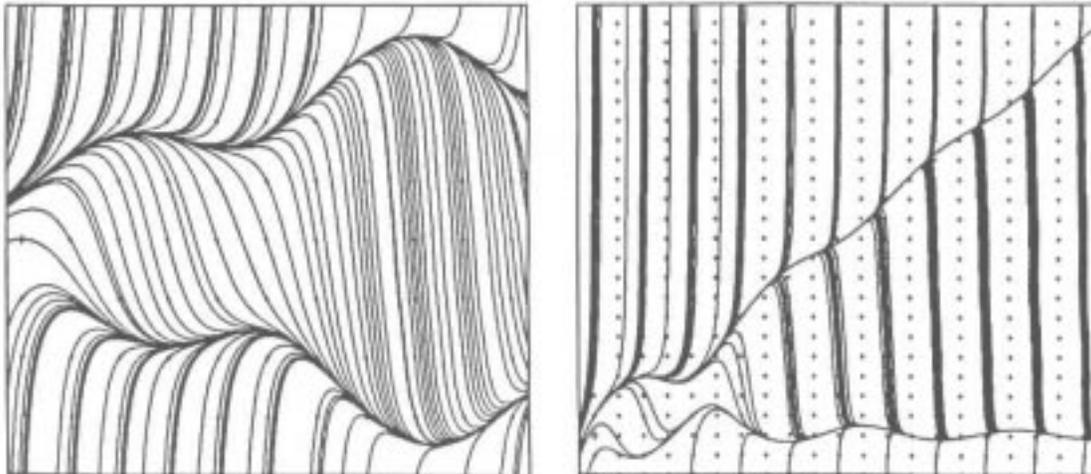


Figure 2: Fleuves oscillants : $Y' = Y^2 - (1 + \sin(X)/2)X$ et $Y' = Y^2 - XY + 1 - 4\sin X$

1.2 Le modèle étudié

Ces résultats, établis pour des $P_j(X)$ polynômiaux, sont en fait également valables pour les fonctions qui possèdent un pôle à l'infini. Par contre, ceux-ci ne conviennent plus si un des termes P_j y possède une singularité essentielle. Cette particularité n'est pourtant pas forcément un obstacle à la présence de structures analogues, comme en témoigne la figure 2. Cependant, c'est le caractère périodique du $\sin X$ qui permet ici ce phénomène, malgré l'irrégularité de sa singularité. Cela nous incite à remplacer les coefficients des $P_j(X)$ par des fonctions périodiques, et donc à étudier les équations de la forme :

$$(E) \quad \frac{dY}{dX} = \sum_{i \in I} a_i(X) X^{m_i} Y^{n_i}$$

$m_i \in \mathbb{Q}$, $n_i \in \mathbb{N}$, I ensemble fini, $a_i(X) \in \mathcal{C}$, \mathcal{C} étant l'algèbre des fonctions périodiques de classe \mathcal{C}^∞ , et de période τ fixée.

L'asymptotique de ces fleuves n'est pas un corollaire du cas polynômial ; nous verrons qu'il conviendra de distinguer 3 cas suivant la valeur d'un coefficient c (calculable à partir des m_i et n_i).

Les méthodes employées seront différentes ; il ne sera plus fait appel à des perturbations singulières et des techniques non standard, mais à une étude qualitative des trajectoires par des sous- et sur-solutions.

1.3 Plan

Le paragraphe 2 présente des notations et définitions qui seront employées par la suite.

Le paragraphe 3 contient le résultat principal de ce papier, c'est à dire les théorèmes correspondant aux 3 cas évoqués précédemment.

Ces théorèmes sont commentés et illustrés par des exemples.

Enfin, le paragraphe 4 contient les preuves des théorèmes énoncés au 3.

2 Préliminaires mathématiques

Notons : $Q(S, X, Y) = \sum_{i \in I} a_i(S) X^{m_i} Y^{n_i}$ Les fonctions $a_i(X)$ sont des éléments de \mathcal{C} , différents de la fonction identiquement nulle. I est un ensemble fini.

\bar{a}_i est la moyenne de $a_i(X)$ sur une période ; $\tilde{a}_i(X) = a_i(X) - \bar{a}_i$.

On généralise cette notation (pour la moyenne, $\tilde{\cdot}$ pour le translaté de moyenne nulle) à toute fonction de X .

On utilisera dans le paragraphe 4 des fonctions ϕ ; celles-ci désignent simplement des fonctions périodiques, dont on omet de préciser l'expression, sans intérêt pour les calculs.

Soit $r \in \mathbb{Q}$. On note :

$\mu_0 = \max(m_i + rn_i)$ et $c = 1 - r + \mu_0$.

q est le plus petit entier positif tel que $r - n/q$, $n \in \mathbb{N}$, prend toutes les valeurs

$m_i + rn_i$, $i \in I$, et la valeur $r - 1$.

Soient alors : $p = cq$; $\mu_n = \mu_0 - n/q$;

$$Q_r^n(S, X, Y) = \sum_{m_i + rn_i = \mu_n} a_i(S) X^{m_i} Y^{n_i}$$

$$\bar{Q}_r^n(X, Y) = \sum_{m_i + rn_i = \mu_n} \bar{a}_i(S) X^{m_i} Y^{n_i}$$

$$(Q_r^0)'(S, X, Y) = \partial Q_r^0(S, X, Y) / \partial Y.$$

$$(\bar{Q}_r^0)'(X, Y) = \partial \bar{Q}_r^0(X, Y) / \partial Y.$$

Soit l'équation différentielle : $(EP) \frac{dY}{dX} = Q_r^0(X, 1, Y)$.

Enfin, notons (*) un développement de la forme :

$$\sum_{i \geq 0} \alpha_i(X) X^{r-i/q}, \text{ avec } \alpha_i(X) \in \mathcal{C}.$$

Définition : soit $k(X) \in \mathcal{C}$, $k \neq 0$, $Y(X)$ une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$, $r \in \mathbb{Q}$. On dira que $Y(X)$ est asymptote à $k(X)X^r$ (et on notera $Y(X) \sim k(X)X^r$) si $\lim_{X \rightarrow \infty} Y(X)/X^r - k(X) = 0$.

Remarque : si une fonction est asymptote à $k(X)X^r$, le terme $k(X)$ est nécessairement unique ([9]), ce qui fait de \mathcal{C} un espace approprié à l'étude asymptotique de nos solutions.

Définition : soit \mathcal{D} l'enveloppe convexe, dans \mathbb{R}^2 , de l'ensemble formé des demi-droites (m, n) où $m \leq m_i$, et $n = n_i$. Soit \mathcal{P} la réunion de tous les segments non horizontaux de la frontière de \mathcal{D} . Le rationnel r sera appelé copente de \mathcal{P} si le vecteur $(1, r)$ est orthogonal à un des segments élément de \mathcal{P} .

3 Fleuves oscillants

3.1 Les théorèmes

Les hypothèses considérées dans les théorèmes ci-dessous seront soit (i),(ii),(iii) et (iv), et l'on parlera alors de cas attractif, soit (i),(ii),(iii) et (iv)' et l'on parlera de cas répulsif.

Théorème 1 Soient $r \in \mathbb{Q}$, $k(X) \in \mathcal{C}$, $k \neq 0$ tels que :

(i) r est une copente de \mathcal{P}

(ii) $c > 1$

(iii) $\forall X \quad Q_r^0(X, 1, k(X)) = 0$

(iv) $\forall X \quad (Q_r^0)'(X, 1, k(X)) < 0$

(iv)' $\forall X \quad (Q_r^0)'(X, 1, k(X)) > 0$

Il existe une série (*) solution formelle de (E), avec $\alpha_0(X) = k(X)$.

Il existe une infinité de solutions asymptotes à $k(X)X^r$ dans le cas attractif, et une unique dans le cas répulsif.

Ces solutions admettent la série (*) comme développement asymptotique.

Théorème 2 Soient $r \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ tels que :

- (i) r est une copente de \mathcal{P}
- (ii) $0 < c < 1$
- (iii) $(\bar{Q}_r^0)'(1, k) = 0$
- (iv) $(\bar{Q}_r^0)'(1, k) < 0$
- (iv)' $(\bar{Q}_r^0)'(1, k) > 0$

On a alors la même conclusion qu'au théorème 1, en remplaçant $k(X)$ par le réel k .

Théorème 3 soit $r \in \mathbb{Q}$, $k(X) \in \mathcal{C}$, $k(X) \neq 0$ tels que :

- (i) r est une copente de \mathcal{P}
- (ii) $c = 1$
- (iii) $k(X)$ est une solution périodique de (EP)
- (iv) $\overline{(\bar{Q}_r^0)'(X, 1, k(X))} < 0$
- (iv)' $\overline{(\bar{Q}_r^0)'(X, 1, k(X))} > 0$

On a la même conclusion qu'au théorème 1.

Définition : on appelle fleuves oscillants (attractifs ou répulsifs) les solutions évoquées dans les 3 théorèmes ci-dessus.

3.2 Commentaires

Expliquons brièvement la signification de chaque hypothèse (les détails mathématiques seront donnés au 4) et commentons les résultats d'un point de vue géométrique. Considérons tout d'abord le théorème 1.

Les conditions (iii) et (iv) (ou (iv)') assurent que $k(X)X^r$ est l'asymptotique d'une branche d'isocline 0 de l'équation considérée. La condition (i) nous permet de ne considérer que les valeurs de r pour lesquelles Q_r^0 n'est pas réduit à un seul terme ; on évite ainsi les cas où seul un $k(X)$ identiquement nul serait capable de satisfaire la condition (iii). Les conditions de régularité (iv) ou (iv)' précisent comment varie le champ au voisinage de cette branche ; cela détermine si les solutions auront tendance à se rapprocher ou à s'écarter au voisinage de la branche en question. Notons qu'il existe aussi des phénomènes intéressants dans des cas dégénérés (voir commentaire en 3.4).

Enfin, le coefficient c mesure la force d'attraction (ou de répulsion) de la branche en question.

Si $c > 1$, le théorème 1 affirme que les fleuves sont asymptotes à $k(X)X^r$, c'est à dire géométriquement que les solutions suivent les oscillations de la branche d'isocline.

Si $0 < c < 1$ il convient de rechercher les isoclines 0 de l'équation moyennisée ; les fleuves n'oscillent plus en première approximation (des termes oscillants se retrouvent dans le développement, mais pas devant X^r).

Le cas intermédiaire $c = 1$ correspond à des oscillations $k(X)X^r$, mais ce $k(X)$ n'est pas celui d'une branche d'isocline 0. Lorsque celle-ci existe, on observe en général que nos fleuves sont déphasés par rapport à elle, ainsi que d'amplitude moindre.

3.3 Exemple

L'équation $Y' = (Y^2 - (2 + \sin(X)))X^\alpha$ est un exemple simple qui illustre le commentaire ci-dessus.

La condition (i) implique que nécessairement $r = 0$. On peut ensuite calculer que $c = 1 + \alpha$.

Les asymptotiques sont $\pm(2 + \sin(X))^{1/2}$ si $\alpha > 0$, et $\pm 2^{1/2}$ si $-1 < \alpha < 0$.

La bifurcation se fait pour $\alpha = 0$; le problème est celui de la recherche des solutions périodiques d'une équation périodique, et l'on pourra alors utiliser les travaux (nombreux) qui ont été réalisés sur ce thème, pour essayer de déduire le nombre et la nature de ces fleuves (voir notamment [12] et [11]).

3.4 Développabilité des fleuves

Les hypothèses des théorèmes peuvent être considérées comme une méthode pratique de calcul du premier terme du développement asymptotique. Le calcul des termes suivants se fait plus facilement, car les équations à résoudre sont linéaires ; il peut donc être automatisé à l'aide d'un programme de calcul formel.

Il diffère cependant d'un cas à l'autre.

Précisons que l'on obtient directement α_n dans le cadre du théorème 1, mais seulement α'_n dans le cadre du théorème 2 ; la constante d'intégration se déduit au niveau $n + q - p$, de façon à ce que α'_{n+q-p} soit de moyenne nulle. Pour le théorème 3, α_n est l'unique solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques. Des précisions peuvent être trouvées dans les preuves données au 4 ; un exemple simple qui illustre ces différences est l'équation :

$$Y' = (Y^2 - XY + (1 - \sin(X))/X)X^\alpha$$

On peut alors choisir pour α les valeurs 0, -1 et $-3/2$.

Indiquons également que la condition (iv) (ou (iv)') signifie que l'on s'intéresse à des cas réguliers de fleuves ; en fait, il existe des cas dégénérés, où le phénomène persiste malgré une dérivée première nulle. Il y a alors plusieurs trajectoires de type "fleuve", qui partagent un nombre fini des premiers termes de leur développement asymptotiques, et diffèrent à partir d'un certain niveau. Il convient donc de "désingulariser" l'équation en soustrayant successivement tous les termes qui apparaissent, tant que les conditions (ii) et (iii) sont satisfaites, jusqu'à ce que l'on obtienne (iv) ou (iv)'. Cette méthode a été décrite dans [2], pour les équations polynômiales (i.e de la forme évoquée en début d'article).

3.5 Extensions

Il est naturel de se demander si les résultats ci-dessus ne se généralisent pas à l'espace des fonctions presque-périodiques ; cependant, on se heurte au problème de la stabilité dans \mathcal{C} des primitives des fonctions de moyenne nulle, utilisée dans la preuve du théorème 3.

Par contre, il est tout à fait possible de considérer l'ensemble $\mathcal{C}_d = \{\alpha(X^d), \alpha \in \mathcal{C}\}$ où d est un réel positif. Il convient alors de modifier la condition (ii), de façon à comparer c à d (et non plus à 1). On constate alors que les preuves énoncées au 4 s'adaptent facilement à ce nouveau cas. Notons que le cas $d = 0$ correspond aux équations polynômiales.

4 Preuves

La condition (i) des théorèmes est la traduction géométrique de l'existence de k et l dans I , $k \neq l$, tels que :

$$\forall i \in I \quad m_k + rn_k = m_l + rn_l \geq m_i + rn_i$$

(cf. développement de Puiseux).

Comme il a été dit précédemment, (i) élimine les cas où $Q_r^0(X, 1, Y)$ est réduit à un seul terme et n'admettrait que la racine triviale $Y = 0$. Nous allons voir en quoi les racines non nulles de $Q_r^0(X, 1, Y)$ sont importantes.

La preuve de chaque théorème comprend 3 parties :

- a) Le résultat d'existence de solutions asymptotes à $k(X)X^r$.
- b) Le résultat d'existence d'une série formelle.
- c) La série formelle est un développement asymptotique d'une solution du a).

La partie a) se montrera à l'aide d'outils classiques d'étude qualitative des portraits de phase ; b), preuve technique, ne sera pas détaillée ; enfin c), qui suit le même schéma pour chacun des 3 cas, ne sera détaillée que pour le théorème 1.

Réalisons le changement $Z = Y/X^r$; (E) devient :

$$(E') \quad \frac{dZ}{dX} = X^{c-1}Q_r^0(X, 1, Z) + X^{c-1-1/q}Q_r^1(X, 1, Z) \\ + \dots + X^{c-1-n/q}Q_r^n(X, 1, Z) - X^{-1}rZ$$

Nous avons décomposé le second membre en une succession de fonctions périodiques en X , et polynômiales en Z , chacune pondérée par une puissance de X . L'idée est de déduire le comportement asymptotique en $+\infty$ des solutions à partir du terme correspondant à la plus forte puissance de X , que l'on qualifiera de "terme dominant".

On utilisera dans nos preuves des "tunnels" ou "antitunnels" qui se définissent de la façon suivante :

Définition : soit $y' = f(x, y)$ une équation différentielle réelle, $(\nu_-, \nu_+) \in \mathbb{R}^2$, $\nu_- < \nu_+$, et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que (ν_-, ν_+) est un tunnel (resp antitunnel) à partir de x_0 si $\forall x \geq x_0$, $f(x, \nu_-) > 0$, $f(x, \nu_+) < 0$ (resp $f(x, \nu_-) < 0$, $f(x, \nu_+) > 0$).

Nous reprenons ainsi la terminologie utilisée dans [10].

4.1 Preuve du théorème 1

On se place maintenant dans le cadre des hypothèses du théorème 1.

4.1.1 Existence des solutions

On pose $U = Z - k(X)$; U vérifie :

$$(E'') \frac{dU}{dX} = X^{c-1} Q_r^0(X, 1, U + k(X)) - k'(X) + X^{c-1-1/q} Q_r^1(X, 1, U + k(X)) + \dots$$

Selon l'hypothèse (ii), $c - 1$ est strictement positif, le terme dominant du second membre est donc $Q_r^0(X, 1, k(X) + U)$.

Montrons que dans le cas attractif, il existe une infinité de trajectoires $U(X)$ tendant vers 0.

On déduit des hypothèses (iii) et (iv) que pour tout $\nu > 0$ suffisamment petit, $Q_r^0(X, 1, k(X) + \nu) < 0$ et $Q_r^0(X, 1, k(X) - \nu) > 0$. Cela implique qu'il existe X_0 suffisamment grand tel que $(-\nu, \nu)$ forme un tunnel à partir de X_0 (X_0 peut être d'autant plus grand que ν est choisi petit, ce qui nous donne alors un jeu de tunnels emboîtés, voir la partie gauche de la figure 3).

Soit $U(X)$ une solution de (E'') , issue d'un point (quelconque) de ces tunnels. Il est clair que $U(X)$ ne peut sortir d'une telle structure ; montrons qu'en fait $U(X)$ tend vers 0.

Raisonnons par l'absurde : si $U(X)$ ne tend pas vers 0, alors il existe nécessairement un voisinage de $+\infty$ sur lequel $\inf |U(X)| > 0$ (en termes plus géométriques, $U(X)$ ne peut approcher 0 pour des grandes valeurs de X sans se faire piéger dans un nouveau tunnel, plus resserré autour de l'origine). Supposons donc, par exemple, que $\forall X \geq X_1$, on ait : $-\nu < U(X) < -\alpha < 0$.

On peut alors choisir un réel $\beta > 0$ tel que : $Q_r^0(X, 1, U + k(X)) > \beta$, tandis que l'on utilise le caractère borné des autres $Q_r^i(X, 1, U + k(X))$. Il vient :

$$U(X) - U(X_1) > \int_{X_1}^X (\beta X^{c-1} + o(X^{c-1})) dX$$

Or, le caractère divergent de cette intégrale est incompatible avec le caractère borné de $U(X)$. On a la contradiction recherchée.

Montrons à présent que dans le cas répulsif, il existe une unique solution tendant vers 0.

Si l'on remplace l'hypothèse (iv) par l'hypothèse $(iv)'$, $(-v, v)$ forme un antitunnel de (E'') . Or un antitunnel contient toujours au moins une solution dans un voisinage de $+\infty$ (voir [10]).

Considérons un de ces antitunnels, contenant une solution $\bar{U}(X)$ au voisinage de $+\infty$. Montrons que $\bar{U}(X)$ est nécessairement unique.

Soit $\eta(X) = U(X) - \bar{U}(X)$ où $U(X)$ est supposée rester aussi dans l'antitunnel ; on dérive le second membre de (E'') par rapport à U et on obtient :

$$\eta'(X) = \int_{\bar{U}(X)}^{U(X)} (X^{c-1}(Q_r^0)'(X, 1, T) + o(X^{c-1}))dT$$

On peut bien sûr minorer $(Q_r^0)'(X, 1, T)$ par une constante $K > 0$ grâce à (iv) . Il vient $\eta'(X) > \eta(X)X^c(K + o(1))$ inégalité clairement incompatible avec le caractère borné de $\eta(X)$. $\bar{U}(X)$ est donc nécessairement unique.

Enfin, il est nécessaire que $\bar{U}(X)$ tende vers 0, sans quoi cette solution ne pourrait rester dans l'antitunnel. On en déduit que $\bar{U}(X)$ est bien la solution recherchée.

En revenant à la variable Y , on obtient des solutions (ou une solution) asymptotes à $k(X)X^r$, conformément aux conclusions du théorème 1.

4.1.2 Solution formelle

Montrons qu'il existe une solution formelle de (E) de la forme $(*)$.

Soit $\bar{Y}_p(X) = \sum_{n=0}^p \alpha_n(X)X^{r-n/q}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\bar{Y}_p'(X) - Q(X, X, \bar{Y}_p(X))$ ne doit pas avoir de terme en X de degré supérieur à $\mu_0 - (p+1)/q$.

On vérifie facilement que $\alpha_0(X) = k(X)$ (condition (iii)).

On calcule que le terme $\alpha_n(X)$ vérifie une équation de la forme :

$$(Q_r^0)'(X, 1, k(X))\alpha_n(X) = \phi(\alpha_0(X), \dots, \alpha_{n-1}(X), \alpha_0'(X), \dots, \alpha_{n-1}'(X))$$

et donc $\alpha_n(X)$ se déduit aisément, grâce à (iv) , comme solution d'une équation linéaire.

4.1.3 Développement asymptotique

On fait maintenant le lien entre les résultats précédents, en montrant que la série $(*)$ est le développement asymptotique d'une solution asymptote à $k(X)X^r$.

Par commodité, on raisonne avec la variable Z .

Soit $Z_n(X) = (Z(X) - (\alpha_0(X) + \dots + \alpha_{n-1}(X)X^{-(n-1)/q}))X^{n/q}$.

Soit (E'_n) l'équation vérifiée par Z_n lorsque Z est solution de (E') . On suppose $n \geq 1$.

On doit montrer que si $Z(X)$ est asymptote à $k(X)$, alors $Z_n(X) - \alpha_n(X)$ tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$.

La preuve est une conséquence des 2 lemmes suivants :

Lemme 1 dans le cas attractif (resp répulsif), l'équation (E'_n) possède une infinité de solutions (resp une unique solution) $Z_n(X)$ telles que $Z_n(X) - \alpha_n(X)$ tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. De plus, toute solution bornée de (E'_n) vérifie cette propriété.

Lemme 2 si $Z(X)$ est asymptote à $k(X)$, alors $Z_n(X)$ est une solution bornée de (E'_n) .

Preuve : (du lemme 1) On étudie en fait (E'_n) de la même façon que (E) . L'expression de (E'_n) est de la forme :

$$\frac{dZ_n}{dX} = X^{c-1}[(Q_r^0)'(X, 1, k(X))Z_n + \phi(X)] + \dots$$

Les points de suspension désignent des termes pondérés par des puissances plus petites de X . On retrouve dans le terme dominant du second membre (i.e le terme pondéré par X^{c-1}) l'équation que l'on doit résoudre pour trouver le coefficient $\alpha_n(X)$ de la série formelle.

On fait $U_n = Z_n - \alpha_n(X)$, et on obtient une équation (E''_n) qui possède des tunnels (resp antitunnels) $(-\nu, \nu)$. La suite, identique à celle en 4.1.1, permet de déduire la première partie du lemme.

Le deuxième partie est une conséquence de la linéarité en Z_n du terme dominant de (E'_n) : on peut choisir ν aussi grand que désiré. On a vu que dans le cas attractif, toute solution Z_n piégée par un tunnel devait être telle que $Z_n(X) - \alpha_n(X)$ tend vers 0, tandis que dans le cas répulsif, toute solution ne vérifiant pas cette propriété ne pouvait pas rester dans un antitunnel. Vu le caractère arbitraire que l'on peut faire de ν , ces résultats se transcrivent ici en terme de solutions bornées. \square

Preuve : (du lemme 2) Il s'agit de montrer que l'on ne peut pas avoir à la fois $Z(X)$ asymptote à $k(X)$ et $Z_1(X)$ non borné. On peut alors montrer de façon tout à fait similaire que l'on ne peut pas avoir $Z_1(X) - \alpha_1(X)$ tend vers 0 et $Z_2(X)$ non bornée, et ainsi de suite jusqu'à n'importe quel niveau n .

Il suffit alors de partir d'une fonction $Z(X)$ asymptote à $k(X)$: le $Z_1(X)$ correspondant sera borné, et d'après le lemme 1, vérifiera $Z_1(X) - \alpha_1(X)$ tend vers 0. On continue ensuite avec $Z_2(X), \dots$, jusqu'à Z_n , et le lemme est démontré.

Revenons à l'expression de (E''_n) donnée précédemment ; comme $Z_1 = UX^{1/q}$, on peut réécrire son second membre sous la forme :

$$X^{c-1-1/q}[(Q_r^0)'(X, 1, k(X)) + (Q_r^0)''(X, 1, k(X))(Z_1/X^{1/q})/2 + \dots]Z_1 + \dots$$

Comme $Z_1/X^{1/q}$ tend vers 0, le terme dominant est donc $(Q_r^0)'(X, 1, k(X))$. Il vient que Z_1 est nécessairement borné, sans quoi une intégration donnerait un résultat aussi grand que désiré (car $c-1-1/q \geq 0$), ce qui est incompatible avec le caractère borné de U . Notons qu'il suffit, pour que l'intégrale diverge, que $c-1-1/q \geq -1$, ce qui sera le cas pour les 2 théorèmes suivants. \square

4.2 Preuve du théorème 2

On se place dans le cadre des hypothèses du théorème 2, et l'on établit à nouveau la preuve en 3 étapes.

4.2.1 Existence des solutions

De même qu'en 4.1.1, nous allons transformer l'équation (E') en une équation (E'') dont il sera aisé de faire une étude qualitative. Cependant, le changement de variable précédemment utilisé ne nous apporterait rien ici, car $k'(X)$ serait le terme dominant du second membre. On va par contre s'inspirer d'une méthode de moyennisation ([1]).

Soient $\tilde{A}_i(X)$ des primitives (quelconques) des fonctions $\tilde{a}_i(X)$ de Q_r^0 ; on a $\tilde{A}_i(X) \in \mathcal{C}$, car les $\tilde{a}_i(X)$ sont de moyenne nulle.

On réalise le changement de fonction :

$$U = Z - \left(\sum A_i(X) Z^i \right) X^{c-1}$$

(difféomorphisme dès lors que l'on choisit X suffisamment grand, U et Z dans des domaines bornés).

$U(X)$ vérifie alors une équation de la forme :

$$(E'') \quad \frac{dU}{dX} = X^{c-1} \bar{Q}_r^0(1, U) + X^{c-1-1/q}(\dots) + \dots$$

toutes les puissances de $X^{c-1-j/q}$, $j \geq 1$, étant pondérées par des polynômes en U à coefficients périodiques, donc bornés.

Les hypothèses (*iii*) et (*iv*) (resp (*iv*)') nous permettent de conclure à des tunnels (resp antitunnels) de la forme $(k - \nu, k + \nu)$. La stabilité asymptotique dans ces structures se montre alors comme précédemment.

4.2.2 Solution formelle

On calcule que les termes de la solution formelle vérifient les égalités suivantes :

$$\alpha'_0(X) = \alpha'_1(X) = \dots = \alpha'_{q-p-1}(X) = 0$$

$$\alpha'_{q-p}(X) = Q_r^0(X, 1, \alpha_0)$$

Pour $n > q - p$:

$$\alpha'_n(X) = (Q_r^0)'(X, 1, \alpha_0(X)) \alpha_{n+p-q}(X) + \phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+p-q-1})$$

Notons (L_n) le deuxième terme de cette égalité. Si l'on veut $\alpha_n \in \mathcal{C}$, il faut que (L_n) soit de moyenne nulle. L'intégration de (L_n) nous donne alors $\tilde{\alpha}_n$. Le calcul de la solution formelle se fait donc de la façon suivante : chaque $\tilde{\alpha}_n$ se déduit par intégration à partir de (L_n) (qui est nul, donc à fortiori de moyenne nulle, pour les premiers termes) et $\bar{\alpha}_n$ se déduit à partir de (L_{n+q-p}) , comme unique constante rendant ce terme de moyenne nulle.

$\bar{\alpha}_0$ est une racine du polynôme $\bar{Q}_r^0(1, \lambda)$; les $\bar{\alpha}_n$ suivants (i.e pour $n \geq 1$) sont racines de polynômes de degré 1 de la forme : $(\bar{Q}_r^0)'(1, \alpha_0) \bar{\alpha}_n + \bar{\phi} = 0$.

4.2.3 Développement asymptotique

La deuxième partie de cette preuve (le lemme 2) est tout à fait similaire à celle établie dans le sous-paragraphe 4.1.3 ; on ne va donc redémontrer que le lemme 1. On a (avec Z_n à la place de α_n dans (L_{n+q-p})) :

$$Z' = (L_n)X^0 + (L_{n+1})X^{-1/q} + \dots + (L_{n+q-p+1})X^{(p-q+1)/q} + (L_{n+q-p})X^{(p-q)/q} + \dots$$

Pour pouvoir faire une étude qualitative de cette équation, il faut éliminer les $(p-q)$ premiers termes de ce second membre et moyenniser le terme suivant. On calcule donc des $\tilde{\alpha}_i$ (de la façon décrite dans la proposition précédente) et on fait le changement de variable :

$$U_n = Z_n - \tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n+1}X^{-1/q} - \dots - \tilde{\alpha}_{n+q-p-1}X^{(p-q+1)+q}$$

Alors U'_n vérifie une équation de la forme :

$$U'_n = X^{c-1}((\bar{Q}_r^0)'(1, U)U_n + \bar{\phi}) + \dots$$

pour laquelle on montre facilement que $(\bar{\alpha}_n - \nu, \bar{\alpha}_n + \nu)$ est un tunnel (resp un antitunnel) à partir d'un X_0 suffisamment grand, et ce $\forall \nu > 0$, en raison du caractère linéaire du terme dominant du second membre.

4.3 Preuve du théorème 3

On continue, cette fois dans le cadre des hypothèses du théorème 3.

4.3.1 Existence des solutions

Nous reprenons le changement de variable simple utilisé en 4.1.1 : $Z(X) = Y(X) - k(X)$; (E') devient :

$$(E'') \frac{dU}{dX} = ((Q_r^0(X, 1, U + k(X)) - k'(X)) + X^{-1/q}Q_r^1(X, 1, U + k(X)) + \dots$$

D'après l'hypothèse (iii), on peut réécrire $(Q_r^0(X, 1, U + k(X)) - k'(X)$ de la forme $(Q_r^0)'(X, 1, k(X))U + P_1(X, U)U^2$ où $P_1(X, U)$ est polynômial en U , et périodique en X . Pour alléger les notations, on va désigner par $f(X)$ la fonction $(Q_r^0)'(X, 1, k(X))$, et réécrire (E'') .

$$(E'') \frac{dU}{dX} = (f(X)U + P_1(X, U)U^2) + P_2(X, U)/X$$

On a également simplifié l'équation (en ne considérant qu'un seul terme "perturbateur" $P_2(X, U)/X$, où P_2 est polynômial en U et périodique en X) mais cette simplification n'élimine en rien le caractère général de la preuve qui va suivre.

Il n'est plus possible de faire une étude qualitative de (E'') à partir de simples sous-solutions et sur-solutions horizontales, car la condition (iv) porte sur le signe de \bar{f} ,

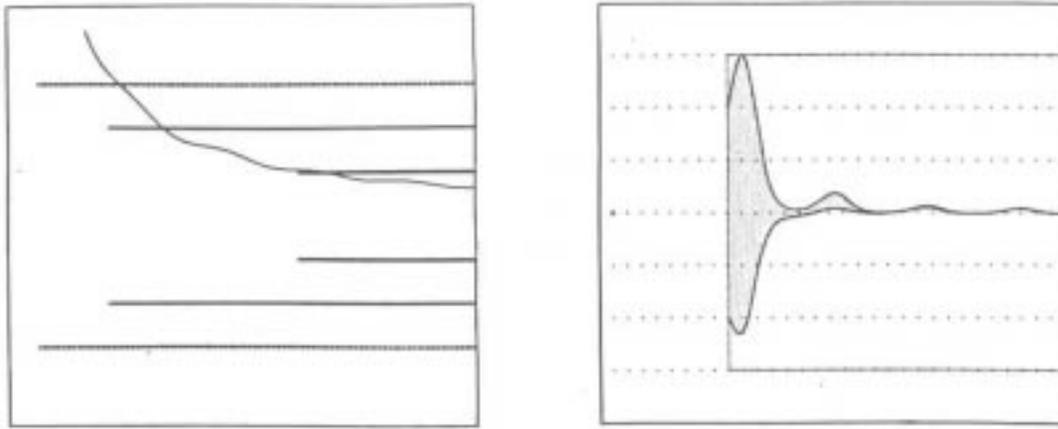


Figure 3: Partie gauche : la solution se fait piéger dans une succession de tunnels emboîtés. Partie droite : dans la région délimitée par le trait épais, le champ de notre équation est encadré par les champs de 2 équations linéaires. La région pointillée correspond à une zone piège, comprise entre 2 solutions d'équation linéaire.

et non sur celui de $f(x)$. On va donc montrer qu'au voisinage de $U = 0$, et pour des X suffisamment grands, le champ de (E'') (à priori non linéaire) peut être encadré par les champs de deux équations linéaires. Les solutions de ces dernières se comporteront donc comme des sous- ou des sur-solutions de (E'') , et nous permettront par encadrement de déduire le résultat désiré.

Formulons cette preuve de façon mathématique.

Fixons un réel ε tel que : $0 < \varepsilon < |\bar{f}|$. Soient les équations linéaires :

$$(L_1) \quad U' = (f(x) + \varepsilon)U + P_2(X, 0)/X$$

$$(L_2) \quad U' = (f(x) - \varepsilon)U + P_2(X, 0)/X$$

Cas attractif :

La preuve découle du lemme suivant :

Lemme 3 *pour tout $k > 0$ suffisamment petit, toute solution $U(X)$ de (E'') de condition initiale $|U(X_0)| < k$, où X_0 est suffisamment grand, tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$.*

Si $P_1(X, 0) = 0$, alors k peut être choisi aussi grand que désiré.

Preuve : le principe de la preuve est illustré sur la partie droite de la figure 3. Soit $U_1(X)$ la solution de (L_1) de condition initiale $U_1(X_0) = k$, et $U_2(X)$ la solution de (L_2) de condition initiale $U_2(X_0) = -k$. Le comportement asymptotique de ces 2 solutions est facile à déduire, vu la simplicité des équations (L_1) et (L_2) ; on a : $\lim_{X \rightarrow \infty} U_1(X) = \lim_{X \rightarrow \infty} U_2(X) = 0$.

Il s'agit maintenant de choisir X_0 et k de façon à ce que $U_1(X)$ soit une sur-solution

de $U(X)$, et $U_2(X)$ une sous-solution ; le lemme sera ainsi prouvé.
Il est tout à fait possible de prendre X_0 et k_1 tels que :

$$-\varepsilon U + P_2(X, 0)/X < U^2 P_1(X, U) + P_2(X, U)/X < \varepsilon U + P_2(X, 0)/X$$

pour tout $X \geq X_0$ et U tel que $|U| \leq k_1$.

Il suffit donc de choisir un tel X_0 , et un réel k tel que k_1 majore $|U_1(X)|$ et $|U_2(X)|$ sur $[X_0, +\infty[$.

En l'absence de terme $P_1(X, U)$, k_1 et donc k peuvent être choisis aussi grands que désiré, ce qui montre la deuxième partie du lemme (et anticipe sur la preuve que l'on donnera en 4.3.3). \square

Cas répulsif :

On choisit le couple $(U_1(X), U_2(X))$ où $U_1(X)$ est l'unique solution de (L_1) qui tend vers 0 en $+\infty$ (de même pour (L_2)).

De façon similaire, on peut montrer que ce couple forme un antitunnel au delà d'un certain X_0 . On conclut alors de la même façon qu'en 4.1.1.

4.3.2 Solution formelle

Pour obtenir une solution formelle, les coefficients α_n de (*) doivent vérifier les équations :

$$\begin{aligned} \alpha'_0(X) &= Q_r^0(X, 1, \alpha_0) \\ \alpha'_n(X) &= (Q_r^0)'(X, 1, \alpha_0)\alpha_n + \phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

Si l'on a choisi pour α_0 une fonction $k(X)$ qui satisfait aux hypothèses (iii) et (iv), alors les coefficients $\alpha_n(X)$ se déduisent comme unique solution périodique d'une équation périodique linéaire.

4.3.3 Développement asymptotique

A nouveau, on ne doit redémontrer que le lemme 1.

$$Z'_n = ((Q_r^0)'(X, 1, \alpha_0)Z_n + \phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})) + X^{-1/q}(\dots) + \dots$$

En posant $U_n = Z_n - \alpha_n(X)$, (E') devient (E'') de la forme :

$$(E'') U'_n = f(X)U_n + \dots$$

On est ainsi ramené au cas traité en 4.3.1, où $P_1(X, U) = 0$.

References

- [1] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Mir, 1980.
- [2] F. Blais. *Fleuves généralisés*. PhD thesis, Université Paris 7, 1989.

- [3] J. Callot. Champs lents-rapides complexes à une dimension lente. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, t.26(Série 4):149–173, 1993.
- [4] B. Candelpergher, J. Nosmas, and F. Pham. *Approche de la résurgence*. Hermann, 1993.
- [5] F. Diener. Fleuves et variétés centrales. In *Singularités des équations différentielles, Dijon 1985*, pages 59–66, Astérisque 150-151, Société Mathématique de France, 1987.
- [6] F. Diener. Propriétés asymptotiques des fleuves. *C.R.Acad.Sci. Paris*, 302(Série 1):55–58, 1986.
- [7] F. Diener and M. Diener. Fleuves 1-2-3 : mode d’emploi. In M. Diener and G. Wallet, editors, *Mathématiques Finitaires et Analyse Non Standard*, pages 209–216, Publications Mathématiques de l’Université de Paris VII, 31 :2, 1989.
- [8] M. Diener and G. Reeb. Champs polynômiaux : nouvelles trajectoires remarquables. *Bull. Soc. Math. Belgique*, 38:131–150, 1987.
- [9] J. Dieudonné. *Calcul Infinitésimal*. Hermann, 1980.
- [10] J. Hubbard and B. West. *Differential Equations, A Dynamical System Approach*. Volume I, Springer, 1991.
- [11] J. Mawhin. First order ordinary differential equations with several periodic solutions. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 38:257–265, 1987.
- [12] A. Neto. On the number of solutions of $dx/dt = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$. *Invent. Math.*, 59:69–76, 1980.
- [13] I. P. Van den Berg. Macroscopic rivers. In E. Benoit, editor, *Dynamic Bifurcations*, pages 190–209, Springer Lecture Notes in Maths, 1493, 1991.

F. Michel
Université de Nice - Sophia-Antipolis
Laboratoire CNRS Jean Alexandre Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 02