L'invariant Acat des algèbres quasi-commutatives

Bitjong Ndombol

Résumé

Nous définissons la notion d' algèbre de cochaînes quasi-commutative et nous montrons que les invariants lMcat , rMcat et Acat introduits dans [7] vérifient l'égalité $Acat = \max(lMcat, rMcat)$ pour de telles algèbres. En particulier ils coïncident sur les espaces.

1 Introduction

Dans tout le texte qui suit, on se fixe un corps de base k , de caractéristique p quelconque.
L'expression quasi-isomorphisme désignera un morphisme qui induit un isomorphisme en cohomologie.
Parmi les invariants homotopiques qui approximent par défaut la catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace topologique, l'un des plus riches en applications connues jusqu'ici est certainement celui de Y. Félix et S. Halperin.
Soit X un espace topologique connexe et 1-connexe, ayant le type d'homotopie d'un c.w. complexe de type fini. Notons $(\Lambda(V), d)$ le modèle minimal de Sullivan de X et considérons le diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda(V), d) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "i"'] & (\Lambda(V)/\Lambda^{>n}(V), \bar{d}) \\
& (\Lambda(V \oplus W), D) \arrow[u, "\Psi"']
\end{tikzcd}$$

Received by the editors April 1995 - In revised form : February 1996.
Communicated by Y. Félix.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 55P62, 55S05.
Key words and phrases : Modèle libre (minimal), Catégorie de Lusternik-Schnirelmann, Algèbre de cochaînes quasi-commutatives.

dans lequel i est l'inclusion canonique et ψ un quasi-isomorphisme ; cat_0 est le plus petit entier naturel n tel que i admette une rétraction d'algèbres différentielles. Ces deux auteurs établissent le résultat suivant [5].

Théorème 1. *L'invariant $cat_0(X)$ est la catégorie de Lusternik-Schnirelmann du rationnalisé X_Q de X.*

Cette notion de catégorie rationnelle a permis à Y. Félix, S. Halperin et J.C. Thomas de dégager des propriétés remarquables de l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle $\pi_*(\Omega X) \otimes Q$ des espaces X pour lesquels $cat_0(X)$ est fini.
Plus tard, S. Halperin et J.M. Lemaire [7] ont étendu cette notion aux algèbres de cochaînes sur un corps k de caractéristique p quelconque dans le but d'étudier l'algèbre de Hopf $H_*(\Omega X; k)$ d'un c.w. complexe X de type et de catégorie finis.

Ils ont ainsi défini trois invariants homotopiques Acat, lMcat et rMcat suivant que i admet une rétraction d'algèbres différentielles, de T(V)-modules différentiels à gauche ou de T(V)-modules différentiels à droite dans le diagramme commutatif suivant où ψ est un quasi-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
(T(V), d) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "i"'] & (T(V)/T^{>n}(V), \bar{d}) \\
& (T(V \oplus W_n), D) \arrow[u, "\Psi"']
\end{tikzcd}$$

Ils ont de plus montré que s'il existe un isomorphisme d'algèbres différentielles entre $T(V)$ et $T(V)^{op}$, les deux derniers invariants coïncident.
Lorsque $k =$ Q, K. Hess [8] montre que lMcat est la catégorie rationnelle pour une algèbre commutative. On peut aussi exiger l'existence d'une rétraction de T(V)-bimodules dans le diagramme ci-dessus, ceci définit l'invariant biMcat. Dans [9] E. Idrissi construit des exemples qui montrent que pour une algèbre de cochaînes quelconque, on peut avoir biMcat strictement supérieur à max(lMcat, rMcat). Il est établi dans [3] que biMcat = Acat et que ces invariants ne dépendent que de la caractéristique du corps k .
Dans ce papier nous établissons :

Théorème 2. *Si (A, d) est "quasi-commutative" alors*

$$max(lMcat, rMcat) = biMcat = Acat.$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est que ces invariants sont identiques pour un c.w. complexe connexe, 1-connexe de type fini.
Comme le montrent les exemples de E. Idrissi, l'hypothèse de la cohomologie commutative qu'entraine d'ailleurs celle de la "quasi-commutativité " n'est pas suffisante pour avoir l'égalité biMcat = max(lMcat, rMcat).
Dans la deuxième partie de ce texte, nous rappelons certaines constructions qui interviennent dans la démonstration du théorème. Celle-ci se trouve dans la troisième partie du texte.
Toutes les algèbres de cochaînes considérées dans la suite ont pour corps de base k et sont supposées 1-connexes de type fini.

Dans une algèbre libre A la notation $[a, b]$ désignera le crochet $a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a$

Nous profitons de cet espace pour remercier J.C. Thomas et bien évidemment J.M. Lemaire dont les conseils ont permis de rendre à peu près lisibles les rappels qui suivent.

2 Modèles libres

A - Algèbres quasi-commutatives.

Pour pouvoir donner la définition d'une algèbre de cochaînes quasi-commutative, il nous faut détailler le modèle libre minimal d'un produit tensoriel d'algèbres différentielles.

Soient $(T(V), d_V)$ et $(T(U), d_U)$ deux modèles libres minimaux. Notons $V\#U = s^{-1}(sV \otimes sU)$ et considérons l'algèbre tensorielle $T(V \oplus U \oplus (V\#U))$. Pour tout u dans U, on a une application linéaire de degré $\mid u \mid -1$, $\delta_u : V \longrightarrow T(V \oplus U \oplus V\#U)$ qui à v associe $v\#u = s^{-1}(sv \otimes su)$. On prolonge δ_u par dérivation en une application linéaire $\delta_u : T(V) \longrightarrow T(V \oplus U \oplus V\#U)$ telle que

$$\delta_u(v_1 \otimes ... \otimes v_p) = (v_1\#u) \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_p + (-1)^{\epsilon} v_1 \otimes \delta_u(v_2 \otimes ... \otimes v_p)$$

où $\epsilon = \mid v_1 \mid + (\mid v_2 \mid + ... + \mid v_p \mid)(\mid u \mid + 1)$

Nous avons ainsi une application linéaire

$\delta : U \longrightarrow Der(T(V), T(V \oplus U \oplus V\#U))$ qui à u associe δ_u où Der désigne l'espace vectoriel des dérivations. Comme $Der(T(V), T(V \oplus U \oplus V\#U))$ est un $T(U)$-bimodule, on prolonge δ en une dérivation de degré 0 sur $T(U)$ et $\delta \in Der(T(U), Der(T(V), T(V \oplus U \oplus V\#U)))$.

Fixons une fois pour toutes la notation suivante.

Pour $a \in T(V)$ et $b \in T(U)$, $a\#b = \delta_b(a)$.

Posons $D_1 v = d_V v$, $D_1 u = d_U u$ et $D_1 v\#u = [v, u] - (d_V v\#u + (-1)^{|v|} v\#d_U u)$.

Considérons le morphisme d'algèbres différentielles

$H : (T(V \oplus U \oplus V\#U), D_1) \longrightarrow (T(V), d_V) \otimes (T(U), d_U)$ défini par $H(v) = v \otimes 1, H(u) = 1 \otimes u$ et $H(v\#u) = 0$. On a le lemme suivant.

2-1 Lemme.

On a

(i) $(D_1)^2 = 0$.

(ii) H *est un quasi-isomorphisme surjectif.*

Démonstration.

(i) Il suffit de montrer que pour tout $a \in T(V)$ et pour tout $b \in T(U)$ on a $D_1 a\#b = [a, b] - (d_V a\#b + (-1)^{|a|} a\#d_U b)$.

On le fait par récurrence sur la longueur des mots. Si a est de filtration p dans $T(V)$ et b de filtration q dans $T(U)$, on dira que le mot $a\#b$ est de longueur $p + q$.

Si a et b sont des générateurs, c'est la définition de la différentielle.

Supposons l'égalité établie pour tous les a et b tels que $a\#b$ soit de longueur $\leq n$. Considérons $a = a_1 \otimes ... \otimes a_{p+1}$ et $b = b_1 \otimes ... \otimes b_q$ tels que $p + q + 1 = n + 1$. Par définition,

$$a\#b = (a_1\#b) \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_{p+1} + (-1)^{\epsilon} a_1 \otimes (a_2 \otimes ... \otimes a_{p+1})\#b$$

où $\epsilon =\mid a_1 \mid +(\mid a_2 \mid +...+ \mid a_{p+1} \mid)(\mid b \mid +1)$. On calcule alors $D_1(a\#b)$ en appliquant l'hypothѐse de récurrence et on a l'égalité cherchée. On refait ce calcul avec $a = a_1 \otimes ... \otimes a_p$ et $b = b_1 \otimes ... \otimes b_{q+1}; p+q+1 = n+1$.
(ii) Nous renvoyons à la démonstration du lemme 2-3 ci-dessous.

2-2 Définition.
Une algèbre de cochaînes 1-connexe (A, d) de modèle libre minimal (T(V), d) est dite quasi-commutative s'il existe un morphisme d'algèbres de cochaînes $\mu : M(T(V) \otimes T(V)) \longrightarrow T(V)$ qui prolonge la codiagonale
$\bigtriangledown : T(V \oplus V) :\longrightarrow T(V)$ et où $M(-)$ désigne le modèle libre minimal.
Le morphisme μ sera appelé quasi-multiplication.

Dans [6], les auteurs construisent un modèle de $(T(V)/T^{>n}(V), \bar{d})$ comme $T(V)$-module différentiel à gauche. Une construction similaire donne un modèle de $(T(V)/T^{>n}(V), \bar{d})$ comme T(V)-module différentiel à droite ; à savoir : le $T(V)$-module libre $([k \ \oplus sV^{\otimes n+1}] \otimes T(V), D)$ muni d'une différentielle D donnée par
$D(1 \otimes a) = 1 \otimes da, \forall a \in T(V); Ds\alpha \otimes 1 = 1 \otimes \alpha - (\omega_0)^{-1}(d\alpha) \ \ \forall \alpha \in V^{\otimes n+1}$ où ω_0 est l'isomorphisme d'espaces vectoriels gradués $\omega_0 : sV^{\otimes n+1} \longrightarrow T^{>n}(V)$ qui à $s\alpha \otimes \beta$ associe $\alpha \otimes \beta$. Le morphisme $F_d : [k \oplus sV^{\otimes n+1}] \otimes T(V) \longrightarrow T(V)/T^{>n}(V)$ de T(V)-modules différentiels à droite qui envoie $sV^{\otimes n+1}$ sur 0 est un quasi-isomorphisme surjectif.

C - Structure de T(V)-module à gauche sur $[k \oplus sV^{\otimes n+1}] \otimes T(V)$.

Lorsque $(T(V), d_V)$ est quasi-commutative, nous définissons sur $[k \oplus sV^{\otimes n+1}] \otimes T(V)$ une structure de $T(V)$-module à gauche. Nous désignerons la quasi-multiplication de $T(V)$ par μ_V.
Posons $X = sV^{\otimes n+1} = \bigcup_{i \geq 0} X_i$ avec $X_0 = \{0\}$ et $X_{p+1} = \{x \in X / Dx \in [k \oplus X_p] \otimes T(V)$.
Nous allons raisonner par récurrence sur p.
Notons S la suite des commutateurs de $T(V \oplus X_1)$ de la forme $[x_i, v_j]$ où $v_j \in V, x_i \in X_1$ et I l'idéal engendré par S. Considérons les éléments $[v_i, y_i] - \mu_V(Dx_i\#v_j)$ et désignons par T la suite formée de tels éléments et J l'idéal engendré par T. Ordonnons les éléments de S et T de la manière suivante : un monôme qui commence par un élément de X_1 est strictement supérieur à tout monôme qui commence par un élément de V. Si deux monômes commencent par un élément de X_1 (resp. V), le plus grand est celui dont la composante dans X_1 (resp. dans V) a le degré le pus élevé. Pour chaque terme de chacune des suites prenons le monôme le plus grand. Puisque le degré de la composante de $\mu_V(x_i\#v_j)$ qui est dans X_1 est strictement inférieur au degré de x_i on obtient deux nouvelles suites qui sont identiques. Notons R la nouvelle suite ainsi obtenue et K l'idéal qu'elle engendre. Selon [1] la suite R est fortement inerte (combinatorially free) et d'après le théorème 3-2 de [1], les suites S et T sont inertes ("strongly free") et de plus $T(V \oplus X_1)/K, T(V \oplus X_1)/I$ et $T(V \oplus X_1)/J$ ont même série de Hilbert. Et comme ce sont des espaces vectoriels de dimensions finies en chaque degré, ils sont isomorphes. Mais $T(V \oplus X_1)/I$ étant isomorphe à $T(X_1) \otimes T(V)$, on a $T(V \oplus X_1)/J \cong T(V) \otimes T(X_1)$.
On pose alors $T(X_1) \odot T(V) = T(V \oplus X_1)/J$ qui est une algèbre associative.

Plus précisément, si on note $\odot$ le produit de $T(X_1)\odot T(V)$, on a

$\forall v_1, v_2 \in V, \forall s\psi_1, s\psi_2 \in X_1$

$$\begin{array}{rcl}(s\psi_1\otimes 1)\odot(s\psi_2\otimes 1) & = & s\psi_1\cdot s\psi_2\otimes 1.\\ (1\otimes v_1)\odot(1\otimes v_2) & = & 1\otimes v_1\cdot v_2;\\ (s\psi_1\otimes 1)\odot(1\otimes v_1) & = & s\psi_1\otimes v_1\\ (1\otimes v_1)\odot(s\psi_1\otimes 1) & = & (-1)^{|\psi_1||v_1|+|v_1|}s\psi_1\otimes v_1+(-1)^{|\psi_1||v_1|+|v_1|}\mu_V(\psi_1\# v_1).\end{array}$$

La différentielle D sur $T(X_1)\odot T(V)$ est la différentielle quotient.

Modèle libre de $T(X_1)\odot T(V)$.

Considérons l'algèbre tensorielle $T(V\oplus X_1\oplus X_1\# V)$, où $V\# X_1 = s^{-1}(sX_1\otimes sV)$, on y définit une dérivation D_1 de degré 1 à savoir :
$D_1 v = d_V v \quad \forall v\in V.$
$D_1 x = Dx \quad \forall x\in X_1.$
$D_1 x\# v = [x,v]-\mu_V(Dx\# v)-(-1)^{|x|}(x\# d_V v) \quad \forall v\in V, \forall x\in X_1$. Un raisonnement identique à celui de la démonstration du lemme 2-2 montre que $D_1^2=0$.

Définissons le morphisme d'algèbres de cochaînes
$\Psi_1 : (T(V\oplus X_1\oplus X_1\# V), D_o)\to (T(X_1)\odot T(V), D)$ par
$\forall v\in V$, $\forall x\in X_1$.

$$\begin{array}{rcl}\Psi_1(v) & = & 1\otimes v\\ \Psi_1(x) & = & x\otimes 1\\ \Psi_1(x\# v) & = & 0.\end{array}$$

Pour montrer que Ψ_1 commute aux les différentielles, il suffit de vérifier que

$$\Psi_1(D_1 x\# v)=0.$$

En effet, si on pose $x=s\psi, \psi\in V^{\otimes n+1}$

$$\begin{array}{rcl}\Psi_1 D_1(x\# v) & = & \Psi_1(s\psi\otimes v-(-1)^{|\psi||v|+|v|}v\otimes s\psi-\mu_V(\psi\# v)+(-1)^{|\psi|}(s\psi\# d_V v))\\ & = & s\psi\otimes v-(-1)^{|\psi||v|+|v|}(v\otimes 1)\odot(s\psi\otimes 1)-\mu_V(\psi\# v)\\ & = & 0.\end{array}$$

2-3 Lemme .
Le morphisme Ψ_1 est un quasi-isomorphisme.

Démonstration.
Il est clair que Ψ_1 est surjectif. Montrons que $ker\Psi_1$ est acyclique. Remarquons que $ker\Psi_1$ est engendré par les éléments de la forme $[x,v]-\mu_V(Dx\# v), x\# v$ avec $v\in V, x\in X_1$.
On définit une nouvelle graduation sur $Ker\psi_o$ en posant

$$\begin{array}{rcl}\|v\| & = & |v|+1\\ \|x\| & = & |y|\\ \|x\# v\| & = & |v|+|x|+1.\end{array}$$

Posons $F_n ker\Psi_1$={t $\in ker\Psi_1$ / $\|$t$\|\geq$ n }, n$\geq$ 0, on a $D_1F_n\subset F_n$ et $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est une filtration décroissante qui donne une suite spectrale convergeant vers $H^*Ker\psi$.

Le terme E^1 de cette suite spectrale est $H^*ker\Psi_1$ lorsque $d_V = 0$. Et dans ce dernier cas, $Ker\Psi_1$ est acyclique. En effet la suite des $[x,v] - \mu_V(x\#v)$ est inerte dans $T(V \oplus X_1)$ et par conséquent la projection $T(V \oplus X_1) \longrightarrow T(X_1) \odot T(V)$ induit un isomorphisme en cohomologie. Doù le lemme.

Nous construisons maintenant un modèle libre de $T(V \oplus X_1 \oplus X_1\#V) \otimes T(V), D_1 \otimes d_V)$.
Nous convenons, pour éviter toute confusion, de désigner par $\#'$ l'opération $\#$ issue du produit tensoriel.
Considérons l'algèbre tensorielle $M_1 = (T(V \oplus V' \oplus X_1 \oplus X_1\#V \oplus V\#'V \oplus X_1\#'V \oplus (X_1\#V)\#'V, \tilde{D}_1)$
où la différentielle $\tilde{D}_1$ est D_1 sur $T(V \oplus V' \oplus X_1 \oplus X_1\#V)$, et
$\tilde{D}_1(x\#'y) = [x,y] - (D_1 x\#'y + (-1)^{|x|} x\#' D_1 y)$.

Soit $\tilde{\Psi}_1 : M_1 \longrightarrow (T(V \oplus X_1 \oplus X_1\#V) \otimes T(V), D_1 \otimes d_V)$ le morphisme d'algèbres défini par $\tilde{\Psi}_1(v) = \tilde{\Psi}_1(v') = 1 \otimes v \ \forall v \in V$;
$\tilde{\Psi}_1(x) = x \otimes 1 \ \forall x \in X_1$;
$\tilde{\Psi}_1(x\#v) = (x\#v) \otimes 1$;
$\tilde{\Psi}_1(y\#'v) = 0 \ \forall v \in V, \forall y \in V \oplus X_1 \oplus X_1\#V$. Il est facile de voir que $\tilde{\Psi}_1$ commute aux différentielles. En reprenant exactement la démonstration du lemme 2-3, on montre que $\tilde{\Psi}_1$ est un quasi-isomorphisme et donc que M_1 est un modèle libre de $(T(V \oplus X_1 \oplus X_1\#V) \otimes T(V), D_1 \otimes d_V)$.

Soit $\tilde{M}_1$ la sous-algèbre différentielle de M_1 définie par

$$\tilde{M}_1 = (T(V \oplus V' \oplus X_1 \oplus X_1\#V \oplus V\#'V \oplus X_1\#'V), \tilde{D}_1).$$

2-4 Lemme .
Il existe $\mu_1 : \tilde{M}_1 \longrightarrow (T(V \oplus X_1 \oplus X_1\#V), D_1)$ qui est l'identité sur $X_1\#V$, μ_V sur $V\#'V$ et qui identifie les deux copies de V.

Démonstration. Il nous faut construire μ_1 sur $X_1\#'V$. Il suffit pour cela de poser $\mu_1(x\#'v) = x\#v, \forall v \in V, \forall x \in X_1$. Et μ_1 commute aux différentielles.

Supposons que pour tout $i \leq p$ on ait construit les objets suivants.
Une algèbre de cochaînes $(T(X_i) \odot T(V), D) = B_i$, un modèle libre T_i de B_i, un modèle libre M_i de $T_i \otimes (T(V), d_V)$ et un morphisme différentiel
$\mu_i : \tilde{M}_i \longrightarrow T_i$ qui prolonge μ_{i-1} où $\tilde{M}_i$ est une sous-algèbre différentielle de M_i.
Nous construisons ces objects pour $p+1$.

Comme dans le cas $i = 1$, on pose $T(X_{p+1}) \odot T(V) = T(V \oplus X_{p+1})/J$ où J est l'idéal engendré par la suite inerte formées des éléments $[x,v] - \mu_p(Dx\#'v)$ pour $x \in X_{p+1}$ et $v \in V$. Plus précisément, le produit$\odot$ de $T(X_{p+1}) \odot T(V)$ s'écrit :
$\forall v_1, v_2 \in V, \forall s\psi_1, s\psi_2 \in X_{p+1}$

$$\begin{aligned}
(s\psi_1 \otimes 1) \odot (s\psi_2 \otimes 1) &= s\psi_1 \cdot s\psi_2 \otimes 1. \\
(1 \otimes v_1) \odot (1 \otimes v_2) &= 1 \otimes v_1 \cdot v_2 \\
(s\psi_1 \otimes 1) \odot (1 \otimes v_1) &= s\psi_1 \otimes v_1 \\
(1 \otimes v_1) \odot (s\psi_1 \otimes 1) &= (-1)^{|\psi_1||v_1|+|v_1|} s\psi_1 \otimes v_1 + (-1)^{|\psi_1||v_1|+|v_1|} \Psi_p(\mu_p(\psi_1\#v_1)).
\end{aligned}$$

La différentielle D sur $T(X_{p+1}) \odot T(V)$ est la différentielle quotient.

Modèle libre de $T(X_{p+1}) \odot T(V)$.
Posons $T_{p+1} = T(V \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V)$, où $V\#X_{p+1} = s^{-1}(sX_{p+1} \otimes sV)$, on y définit une dérivation D_{p+1} de degré 1 à savoir :
$D_{p+1}v = d_V v \quad \forall v \in V.$
$D_{p+1}x = Dx \quad \forall x \in X_{p+1}.$
$D_{p+1}x\#v = [x,v] - \mu_{p+1}(Dx\#'v) - (-1)^{|x|}(x\#d_V v) \quad \forall v \in V, \forall x \in X_{p+1}$. En reprenant la démonstration du lemme 2-2, on montre que $D_{p+1}^2 = 0$.

Soit le morphisme d'algèbres de cochaînes
$\Psi_{p+1} : (T(V \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V), D_{p+1}) \to (T(X_{p+1}) \odot T(V), D)$ défini par $\forall v \in V, \forall x \in X_{p+1}$.

$$\begin{aligned} \Psi_{p+1}(v) &= 1 \otimes v \\ \Psi_{p+1}(x) &= x \otimes 1 \\ \Psi_{p+1}(x\#v) &= 0. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que Ψ_{p+1} commute aux différentielles. En reprenant la démonstration du lemme 2-3 on montre que Ψ_{p+1} est un quasi-isomorphisme.

Construction de M_{p+1}, $\tilde{M}_{p+1}$, et μ_{p+1}.

Avec les notations adoptées plus haut, posons $M_{p+1} = (T(V \oplus V' \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V \oplus V\#'V \oplus X_{p+1}\#'V \oplus (X_{p+1}\#V)\#'V, \tilde{D}_{p+1})$
où la différentielle $\tilde{D}_{p+1}$ est D_{p+1} sur $T(V \oplus V' \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V)$, et
$\tilde{D}_{p+1}(x\#'y) = [x,y] - (D_{p+1}x\#'y + (-1)^{|x|}x\#'D_{p+1}y)$.

Soit $\tilde{\Psi}_{p+1} : \tilde{M}_{p+1} \longrightarrow (T(V \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V) \otimes T(V), D_{p+1} \otimes d_V)$ le morphisme d'algèbres défini par $\tilde{\Psi}_{p+1}(v) = \tilde{\Psi}_{p+1}(v') = 1 \otimes v \ \forall v \in V$;
$\tilde{\Psi}_{p+1}(x) = x \otimes 1 \ \forall x \in X_{p+1}$;
$\tilde{\Psi}_1(x\#v) = (x\#v) \otimes 1$;
$\tilde{\Psi}_{p+1}(y\#'v) = 0 \ \forall v \in V, \ \forall y \in V \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V$. Il est facile de voir que $\tilde{\Psi}_{p+1}$ commute aux différentielles.
En reprenant exactement la démonstration du lemme 2-3, on montre que $\tilde{\Psi}_{p+1}$ est un quasi-isomorphisme et donc que $\tilde{M}_{p+1}$ est un modèle libre de $(T(V \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V) \otimes T(V), D_{p+1} \otimes d_V)$.

Soit $\tilde{M}_{p+1}$ la sous-algèbre différentielle de M_{p+1} définie par

$$\tilde{M}_{p+1} = (T(V \oplus V' \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V \oplus V\#'V \oplus X_{p+1}\#'V), \tilde{D}_1).$$

2-5 Lemme .
Il existe $\mu_{p+1} : \tilde{M}_{p+1} \longrightarrow (T(V \oplus X_{p+1} \oplus X_{p+1}\#V), D_{p+1})$ qui prolonge μ_p.

Démonstration. Il nous faut construire μ_{p+1} sur $X_{p+1}\#'V$. Il suffit pour cela de poser $\mu_{p+1}(x\#'v) = x\#v, \forall v \in V, \forall x \in X_{p+1}$. Et μ_{p+1} commute aux différentielles.

Nous venons ainsi de construire une algèbre de cochaînes $(T(X) \odot T(V), D)$ où $T(X) \odot T(V) \cong T(V) \otimes T(X)$ en tant qu'espaces vectoriels gradués et telle que l'inclusion $i : ([k \oplus X] \otimes T(V), D) \longrightarrow (T(V) \odot T(X), D)$ soit un morphisme de $T(V)$-modules différentiels à droite.

2-6 Lemme .
Le morphisme de $T(V)$-modules à droite $\Gamma : T(X) \otimes T(V) \longrightarrow T(X) \odot T(V)$ défini par $\Gamma(x \otimes 1) = x \otimes 1$ est un isomorphisme.

Il est évident que le morphisme de $T(V)$-modules à droite
$\Psi : (T(X) \odot T(V), D) \longrightarrow (T(V)/T^{>n}(V), \bar{d})$ défini par $\Psi(x \otimes 1) = 0$ commute aux différentielles.
Posons $A = ([k \oplus X] \otimes T(V), D)$ et considérons le diagramme commutatif suivant dans la catégorie des $T(V)$-modules différentiels à droite.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "F_d"] \\ (T(X) \odot T(V), D) \arrow[ur, "P"] \arrow[r, "\Psi"'] & (T(V)/T^{>n}(V), \bar{d}) \end{tikzcd}$$

Comme F_d est un quasi-isomorphisme surjectif, d'après le lemme de relèvement, il existe un momorphisme de T(V)-modules différentiels à droite
$P : (T(X) \odot T(V), D) \longrightarrow A$ faisant commuter le diagramme ci-dessus. On a alors $P(s\psi \otimes 1) = s\psi \otimes 1$, pour $\psi \in V^{\otimes n+1}$.

La structure de $T(V)$-module à gauche est alors définie par :
$v.(s\psi \otimes 1) = P(v \otimes 1 \odot s\psi \otimes 1)$.
Remarquons tout de suite que $v.(s\psi \otimes 1) = P(v \otimes 1 \odot s\psi \otimes 1) \in kerF_d$.

D - Résolution quasi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), \bar{d})$ comme $T(V)$-bimodule différentiel.

L'essentiel de la construction qui suit se trouve dans [3](section 1 p. 947). Considérons le T(V)-bimodule libre $(T(V) \otimes [k \oplus sV] \otimes T(V)$ sur lequel on définit une dérivation de degré 1 d_1 de la manière suivante : $\forall v \in V \;\; d_1(v \otimes 1 \otimes 1) = dv \otimes 1 \otimes 1; d_1(1 \otimes 1 \otimes v) = 1 \otimes 1 \otimes dv$ et $d_1(1 \otimes sv \otimes 1) = v \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v - S(dv)$ où

$$S : T^+(V) \longrightarrow T(V' \oplus V" \oplus sV)$$

est la (j'-j")-dérivation de degré 1 qui prolonge l'isomorphisme de $V \longrightarrow sV$ qui envoie v sur sv où V' et $V"$ sont deux copies de V et où j'et j" sont les inclusions de $T(V)$ dans $T(V' \oplus V" \oplus sV)$ définies par $j'(v) = v'$ et $j"(v) = v"$.
Le morphisme de T(V)-bimodules différentiels

$$H_1 : (T(V) \otimes [k \oplus sV] \otimes T(V), d_1) \longrightarrow (T(V), d)$$

défini par $H_1(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$ est un quasi-isomorphisme surjectif ([3], lemme 1-1).
Le produit tensoriel $(T(V) \otimes [k \oplus sV] \otimes T(V) \otimes_{T(V)} [k \oplus X] \otimes T(V), d_1 \otimes_{T(V)} D)$ donne une résolution quasi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V))$ comme $T(V)$-bimodule différentiel. Pour le voir il suffit de se rappeler qu'on a un quasi-isomorphisme $F_d : [k \oplus X] \otimes T(V) \longrightarrow T(V)/T^{>n}(V)$ qui est en fait un morphisme de $T(V)$-bimodules différentiels et que H_1 est un quasi-isomorphisme. Comme $(T(V) \otimes [k \oplus sV] \otimes T(V)$ est $T(V)$- libre à droite,

$H_1 \otimes_{T(V)} F_d : (T(V) \otimes [k \oplus sV] \otimes T(V) \otimes_{T(V)} [k \oplus X] \otimes T(V) \longrightarrow T(V) \otimes_{T(V)} (T(V)/T^{>n}(V)$ est encore un quasi-isomorphisme et de plus $T(V) \otimes_{T(V)} (T(V)/T^{>n}(V)) = T(V)/T^{>n}(V)$.
Explicitement, on a le $T(V)$-bimodule $(T(V) \otimes [k \oplus sV \oplus sV^{\otimes n+1} \oplus sV \otimes sV^{\otimes n+1}] \otimes T(V)$ et un morphisme de T(V)-bimodules différentiels

$$F : (T(V) \otimes [k \oplus sV \oplus sV^{\otimes n+1} \oplus sV \otimes sV^{\otimes n+1}] \otimes T(V), d_n) \longrightarrow (T(V)/T^{>n}(V), \bar{d})$$

qui est un quasi-isomorphisme surjectif ; on a en fait $F(1\otimes sv\otimes 1) = F(1\otimes sU\otimes 1) = F(1\otimes sv\otimes sU\otimes 1) = 0$ pour tout $v\in V$ et pour tout $U\in V^{\otimes n+1}$.

La différentielle d_n s'écrit de la manière suivante : pour $v\in V$ et $\psi\in V^{\otimes n+1}$
(1) : $d_n(1\otimes sv\otimes 1) = v\otimes 1\otimes 1 - 1\otimes 1\otimes v - S(d_V v)$
(2) : $d_n(1\otimes s\psi\otimes 1) = 1\otimes 1\otimes\psi - 1\otimes\omega_0^{-1}(d_V\psi)$.
Posons $d_V v = \sum_I v_{i_1}\otimes ....\otimes v_{i_k}$. On a
(3) : $d_n(1\otimes sv\otimes s\psi\otimes 1) = v\otimes s\psi\otimes 1 - (-1)^{|v||\psi|+|v|}1\otimes s\psi\otimes v + (v\otimes 1)\cdot(\psi\otimes 1)$
$- (-1)^{|v|}1\otimes sv\otimes Ds\psi + \sum_I 1\otimes sv_{i_1}\otimes[(v_{i_2}\otimes ....\otimes v_{i_k}\otimes 1)\cdot(s\psi\otimes 1)]$
$+ \sum_I\sum_{j=2}^{k-1}\epsilon_j v_{i_1}\otimes ....\otimes v_{i_{j-1}}\otimes sv_{i_j}\otimes[(v_{i_{j+1}}\otimes ....\otimes v_{i_k}\otimes 1)\cdot(s\psi\otimes 1)]$
$+\sum_I\epsilon_k(v_{i_1}\otimes ....\otimes v_{i_{k-1}})\otimes sv_{i_k}\otimes s\psi\otimes 1$
où $\epsilon_j = (-1)^{|v_{i_1}|+....+|v_{i_{j-1}}|}$

3 Démonstration du théorème

Posons $n = max(lMcat_p(A), rMcat_p(A))$. Il existe alors un morphisme de $T(V)$-modules différentiels à droite
$r_d : [k\oplus X]\otimes T(V)\longrightarrow T(V)$, tel que $r_d(1\otimes 1) = 1$
et un morphisme de $T(V)$-modules différentiels à gauche
$r_g : T(V)\otimes[k\oplus X]\longrightarrow T(V)$ tel que $r_g(1) = 1$. Ceci donne un morphisme de $T(V)$-bimodules différentiels
$r_g\otimes r_d : T(V)\otimes[k\oplus X]\otimes[k\oplus X]\otimes T(V)\longrightarrow T(V)\otimes T(V)$ qui vérifie $r_g\otimes r_d(1) = 1$ et qui se relève en un morphisme de T(V)-bimodules différentiels
$R : T(V)\otimes[k\oplus X]\otimes[k\oplus X]\otimes T(V)\longrightarrow M(T(V)\otimes T(V))$. En composant avec μ, on a un morphisme de T(V)-bimodules différentiels :
$\mu\circ R : T(V)\otimes[k\oplus X]\otimes[k\oplus X]\otimes T(V)\longrightarrow T(V)$ qui vérifie $\mu\circ R(1) = 1$.
Observons qu'il n'y a pas de morphisme de $T(V)$-bimodules différentiels de source $T(V)\otimes[k\oplus sV\oplus X\oplus sV\otimes X]\otimes T(V)$ et de but $T(V)\otimes[k\oplus X]\otimes[k\oplus X]\otimes T(V)$. En effet s'il en existait un et si v est un cycle dans $T(V)$, $v\otimes 1\otimes 1 - 1\otimes 1\otimes v$ qui serait alors l'image de $d_n sv$ n'est pas un bord dans $T(V)\otimes[k\oplus X]\otimes[k\oplus X]\otimes T(V)$. Si on a une application linéaire
$G : T(V)\otimes[k\oplus sV\oplus X\oplus sV\otimes X]\otimes T(V)\longrightarrow T(V)\otimes[k\oplus X]\otimes[k\oplus X]\otimes T(V)$ commutant aux différentielles, T(V)-bilinéaire sur $T(V)\otimes[X\oplus sV\otimes X]\otimes T(V)$ et s'annulant sur $T(V)\otimes sV\otimes T(V)$, en prenant $r = \mu\circ R\circ G$, on aurait la rétraction cherchée.

Construction de G.

Ecrivons $T(V)\otimes[k\oplus X]\otimes[k\oplus X]\otimes T(V) = T(V)\otimes[k\oplus X'\oplus X"\oplus X'\otimes X"]\otimes T(V)$ où X' et $X"$ sont deux copies de X. Rappelons qu'on a un quasi-isomorphisme surjectif
$F_g\otimes F_d : T(V)\otimes[k\oplus X'\oplus X"\oplus X'\otimes X"]\otimes T(V)\longrightarrow T(V)/T^{>n}(V)\otimes T(V)/T^{>n}(V)$ avec F_g obtenu de manière analogue à F_d en construisant une résolution de $T(V)/T^{>n}(V)$ comme $T(V)$-bimodule différentiel à gauche.

On pose pour tout $x, y\in T(V); G(x\otimes 1\otimes y) = 1\otimes 1\otimes xy$; et pour tout v $\in V$, $G(1\otimes sv\otimes 1) = 0$.
On prolonge G de la manière suivante : $\forall x, y\in T(V), G(x\otimes sv\otimes y) = 0$. Ensuite, pour tout $\psi\in V^{\otimes n+1}$ on pose $G(1\otimes s\psi\otimes 1) = 1\otimes s\psi"\otimes 1$.

On prolonge G sur $T(V) \otimes X \otimes T(V)$ par $T(V)$-bilinéarité.
Soient $v \in V$ et $\psi \in V^{\otimes n+1}$ de degrés minimaux ;
on a $d_n(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1) = v \otimes s\psi \otimes 1 - (v \otimes 1) \cdot (s\psi \otimes 1) - (-1)^{|v|} 1 \otimes sv \otimes \psi$ de sorte que

$$G(d_n(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1)) = v \otimes s\psi" \otimes 1 - G((v \otimes 1) \cdot (s\psi \otimes 1))$$

est un cycle dans $KerF_g \otimes F_d$ qui est acyclique. Il existe $\beta \in KerF_g \otimes F_d$ tel que $G(d_n(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1)) = D\beta$; on pose alors $G(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1) = \beta$ et on prolonge G sur $T(V) \otimes [sV \otimes X] \otimes T(V)$ par $T(V)$-bilinéarité ; et G commute aux différentielles.
Supposons qu'on ait construit G sur $1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1$ pour $\mid v \mid + \mid s\psi \mid < m$ tel que G commute aux différentielles et $G(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1) \in KerF_g \otimes F_d$.
Considérons $1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1$ tel que $\mid v \mid + \mid s\psi \mid = m$. On a
$G(d_n(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1)) = v \otimes s\psi" \otimes 1 - G((v \otimes 1) \cdot (s\psi \otimes 1)) - (-1)^{|v|} 1 \otimes sv \otimes D_n s\psi \otimes 1))$
$+ \sum_I G(1 \otimes sv_{i_1} \otimes [(v_{i_2} \otimes .... \otimes v_{i_k} \otimes 1) \cdot (s\psi \otimes 1)])$
$+ \sum_I \sum_{j=2}^{k-1} \epsilon_j G(v_{i_1} \otimes .... \otimes v_{i_{j-1}} \otimes sv_{i_j} \otimes [(v_{i_{j+1}} \otimes .... \otimes v_{i_k} \otimes 1) \cdot (s\psi \otimes 1)])$
$+ \sum_I \epsilon_k G((v_{i_1} \otimes .... \otimes v_{i_{k-1}}) \otimes sv_{i_k} \otimes s\psi \otimes 1)$.
Comme G commute aux différentielles, ce terme est un cycle. Par l'hypothèse de récurrence, $G(d_n(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1)) \in KerF_g \otimes F_d$. Il existe alors $\beta \in Ker\psi$ tel que $G(d_n(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1)) = D\beta$.
On pose $G(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1) = \beta$; et G commute donc aux différentielles. On prolonge G sur $T(V) \otimes [sV \otimes X] \otimes T(V)$ par T(V)-bilinéarité.
Considérons enfin le morphisme de $T(V)$-bimodules différentiels
$r : T(V) \otimes [k \oplus sV \oplus X \oplus sV \otimes X] \otimes T(V) \longrightarrow T(V)$ défini par :
$r(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1; \forall v \in V$ et
$\forall \psi \in V^{\otimes n+1}, r(1 \otimes sv \otimes 1) = 0;$
$r(1 \otimes s\psi \otimes 1) = \mu \circ R \circ G(1 \otimes s\psi \otimes 1);$
$r(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1) = \mu \circ \; R \circ G(1 \otimes sv \otimes s\psi \otimes 1)$.
Il est facile de se convaincre que r commute aux différentielles.
On vient ainsi de montrer que
$biMcat_p(A) \leq \max(lMcat_p(A), rMcat_p(A))$. Puisqu'on a toujours

$$Acat_p(A) = biMcat_p(A) \geq \max(lMcat_p(A), rMcat_p(A)),$$

l'égalité en découle.

3-1 Remarque.
Si de plus il existe un isomorphisme d'algèbres différentielles :$f : A \longrightarrow A^{op}$, on a alors $lMcat_p = rMcat_p$. Dans ce cas on a la suite d'égalités
$Acat_p(A) = biMcat_p(A) = lMcat_p(A) = rMcat_p(A)$.

3-2 Corollaire.
Soit X un espace topologique simplement connexe ayant le type d'homotopie d'un c.w. complexe de type fini. Alors
$Acat_p(X) = lMcat_p(X) = rMcat_p(X)$

Démonstration.
Il nous suffit de montrer que l'algèbre $C^*(X:k)$ des cochaînes normalisées de X est quasi-commutative et qu'elle est isomorphe à son opposée. En effet, notons

$$\triangle : X \longrightarrow X \times X$$

la diagonale usuelle et

$$EZ : C^*(X \times X) \longrightarrow C^*(X) \otimes C^*(X)$$

le quasi-isomorphisme d'Eilenberg-Zilber. Notons $(T(V), d)$ le modèle libre minimal de $C^*(X)$ et $M(T(V) \otimes T(V))$ celui de $T(V) \otimes T(V)$; on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C^*(X) \otimes C^*(X) & C^*(X \times X) \arrow[l, "EZ"'] \arrow[r, "C^*(\triangle)"] & C^*(X) \\
M(T(V) \otimes T(V)) \arrow[u, "\Psi"] \arrow[rr, "\mu"'] & & T(V) \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel ψ, EZ et ϕ sont des quasi-isomorphismes.

En appliquant deux fois le lemme de relèvement, on a un morphisme d'algèbres de cochaînes $\mu : M(T(V) \otimes T(V)) \longrightarrow T(V)$ qui rend le diagramme ci-dessus commutatif à homotopie près et qui prolonge la codiagonale $\bigtriangledown : T(V \oplus V) \longrightarrow T(V)$. Ce qui montre que $C^*(X)$ est quasi-commutative.
La suite de la preuve donne les détails d'une idée de [7](p 141).Notons $\bar{C}^*(X)$ l'algèbre des cochaînes de X construite à partir des simplexes standards $\triangle_n$ où $\triangle_n$ est l'enveloppe convexe des n+1 sommets ordonnés $e_0, e_1, ..., e_n$. Considérons en outre l'algèbre $\bar{C'}^*(X)$ des cochaînes de X construite à partir des simplexes standards $\triangle'_n$ où $\triangle'_n$ est l'enveloppe convexe des $n+1$ sommets ordonnés $e'_0, e'_1, ..., e'_n$ et $e'_i = e_{n-i}$. Comme $\triangle_n$ et $\triangle'_n$ sont homéomorphes, les algèbres $\bar{C}^*(X)$ et $\bar{C'}^*(X)$ sont isomorphes ; cet isomorphisme envoie bijectivement les cochaînes dégénérées sur les cochaînes dégénérées. Par conséquent $C^*(X)$ est isomorphe à $C'^*(X)$ où $C'^*(X)$ est l'algèbre des cochaînes normalisées de X construite à partir des $\triangle'_n$. En revenant à la définition du cup produit, on réalise que $C'^*(X)$ est exactement $(C^*(X))^{op}$. On applique alors le théorème ci-dessus et la remarque 3-1.

Références

[1] D. J. Anick, *Non commutative graded algebras and their Hilbert series,* Journal of Algebra 78, (1982) pp. 120-140.

[2] H. Baues and J. M Lemaire,*Minimal models in homotopy theory,* Math. Ann. 225 (1977) pp 211-242.

[3] Bitjong Ndombol,*Sur la catégorie de Lusternik-Schnirelmann des algèbres de cochaînes,* Ann. de l'Institut Fourier 41, 4(1991) pp 937-987.

[4] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas,*Gorenstein spaces,* Adv. in Math. 71(1988) pp 92-112.

[5] Y. Félix and S. Halperin,*Rational L-S category and its applications,* Trans. Amer. Math. Soc. 273(1982) pp 1-37.

[6] Y. Félix, S. Halperin, J. M. Lemaire and J. C. Thomas, *Mod p loop space homology,* Invent. Math. 95(1989) pp 247-262.

[7] S. Halperin and J. M. Lemaire,*Notions of category in differential algebras,* L.N.M., 1318(1988) pp 138-154.

[8] K. Hess,*A proof of Ganea's conjecture for rational spaces,* Topology 30(1991) pp 205-214.

[9] E. Idrissi, *Quelques contre-exemples pour la L-S catégorie d'une algèbre de cochaînes,* Ann. de l'Institut Fourier 41, 4(1991) pp 989-1003.

Bitjong Ndombol
Chercheur associé au C.N.R.S
Laboratoire de Mathématiques U.R.A 168
Université de Nice Sophia Antipolis
Faculté des Sciences B.P. 71
06108 Nice Cedex 2
France.