

# Fonctions $\varepsilon$ -Régulières

Madeleine BAUER

## Introduction

La photographie, la télévision et les images de synthèse nous ont amenés à considérer comme naturelles et conformes au modèle les discrétisations d'objets continus pour peu que l'objet ne soit pas trop irrégulier et la discrétisation pas trop grossière (grain de photo assez fin, écran de haute résolution).

Ici l'objet sera une fonction et la discrétisation se fera à une échelle infinitésimale ; l'on montrera que le mot "pas trop irrégulier" peut être considéré la plupart du temps comme synonyme de "localement bilipschitzienne" et que l'usage des adjectifs "naturelles et conformes" n'est pas abusif pour les propriétés étudiées car il y a un aller retour "*discret*  $\longleftrightarrow$  *continu*" sans perte d'information.

Pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  la discrétisation via une tabulation est une pratique ancienne (tables de logarithmes de J. Neper en 1614) et moderne (qu'y-a-t-il d'autre dans une calculette que des tables de fonctions usuelles ou plutôt des algorithmes permettant de générer ces tables ? ). La discrétisation de fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 2$  est beaucoup moins pratiquée et normalisée, c'est pourquoi, après avoir précisé le sens du mot  $\varepsilon$ -régulière et mis en place quelques outils (lemmes) nous commencerons par montrer que l'aller retour "*discret*  $\longleftrightarrow$  *continu*" se fait bien pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  : par exemple, d'un théorème des fonctions implicites discret découle le théorème classique (continu) et vice-versa.

Déjà dans cette première partie l'Analyse Non Standard se révèle être un outil commode car, pour peu que le pas de la tabulation soit infiniment petit, le passage à l'ombre permet d'associer de façon canonique table (pointillé) et graphe (arc de courbe continu).

Dans la deuxième partie nous verrons que, pour les fonctions standard de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 2$ , les mots " $\varepsilon$ -régulière" et "localement bilipschitzienne" sont synonymes mais un contre-exemple montrera que, même pour la restriction d'une fonction  $C^\infty$  à un disque fermé, il n'est pas possible de remplacer localement par globalement contrairement au cas de la dimension 1.

---

1991 *Mathematics Subject Classification* : 26, 53, 54, 58, 65.

*Key words and phrases* : Analyse Non Standard, Approximation Numérique, Fonction de variables réelles, Géométrie différentielle.

Mais cette deuxième partie montrant qu'il suffit d'étudier le comportement d'une fonction à une échelle (pas de la tabulation) infinitésimale fixée ne correspond pas totalement à l'objectif de départ : étant donnée une fonction discrète c'est-à-dire une application qui, à un premier nuage de points de  $\mathbb{R}^n$  ou de  $\mathbb{Z}^n$ , associe un deuxième nuage de points de  $\mathbb{R}^n$  ou de  $\mathbb{Z}^n$ , trouver des conditions sur ces nuages qui soient équivalentes à des propriétés continues d'une fonction approchée par la fonction discrète donnée.

Quelques exemples de propriétés "*discret*  $\longleftrightarrow$  *continu*" figurent dans la troisième partie, le passage continu discret se faisant via une approximation PL (affine par morceaux) de la fonction continue, le passage discret continu se faisant en prenant l'ombre de la fonction PL associée à la fonction discrète. Le choix d'utiliser comme intermédiaire une fonction PL est essentiellement motivé par l'abondance de résultats connus sur ce type de fonctions. Plutôt que de passer à la limite (faire tendre le pas de la tabulation vers 0) pour (re)trouver une (la) fonction continue (de départ) nous utilisons le passage à l'ombre pour sa simplicité et sa robustesse (la fonction discrète n'a pas besoin d'avoir été créée par tabulation).

Au passage nous donnerons un critère d'homéomorphie locale pour les applications PL que nous comparerons à celui de figurant dans "On Quasi-Isometric Mapping" de F. John dont nous utilisons les résultats.

Pour finir, nous donnerons une démonstration du théorème de Liouville sur les applications conformes.

Notre hypothèse est "l'application  $f$  est, à une échelle infinitésimale, presque une similitude",

et notre conclusion :

— dans le cas de la norme euclidienne (cas de Liouville classique)

"l'application  $f$  est une application de Moebius si la dimension de l'espace ambiant est supérieure ou égale à 3;"

— dans le cas de la norme  $|x|_1 = \sum |x_i|$  ou  $|x|_\infty = \sup |x_i|$

(les normes du calcul numérique dont l'équivalent discret existe de façon naturelle)  
"l'application  $f$  est une application affine".

## 1 Préliminaires, Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ .

**Notations.** — Pour comparer des nombres d'ordres de grandeur différents, nous utiliserons les notations suivantes :

$\alpha = \emptyset\beta$  si le rapport  $\alpha/\beta$  est infiniment petit, c'est à dire inférieur en valeur absolue à tout standard positif,

$\alpha = \mathcal{L}\beta$  si le rapport  $\alpha/\beta$  est limité, c'est à dire inférieur en valeur absolue à un standard,

$\alpha = @\beta$  si le rapport  $\alpha/\beta$  est appréciable, c'est à dire limité et non infiniment petit.

**Convention.** Dans toute la suite  $\epsilon$  désigne un réel infiniment petit positif fixe.

La définition suivante se rapproche des diverses présentations de la notion de fonction quasi-conforme en évitant, grâce au choix d'un  $\epsilon$  infinitésimal fixé, l'utilisation de limites.

**Définition 1.** — Une fonction  $f$  d'un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est dite  $\epsilon$ -régulière si

$$\forall(x, y) \in D \times D \quad |x - y| = @\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| = @\epsilon.$$

Si  $f$  est une application bilipschitzienne de constantes de Lipschitz standard, elle est  $\epsilon$ -régulière, c'est par exemple le cas d'une fonction standard  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $[a, b]$  dont la dérivée ne s'annule pas.

Rappelons que  $f$  bilipschitzienne signifie qu'il existe deux constantes positives  $c$  et  $C$  telles que :

$$\forall(x, y) \in \bar{U} \times \bar{U} \quad c|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

**Lemme 1.** — Soit  $\bar{U}$  l'adhérence d'un ouvert  $U$  convexe borné de  $\mathbb{R}^p$  et  $f$  une fonction standard de  $\bar{U}$  dans  $\mathbb{R}^q$ . Si

$$\forall(x, y) \in \bar{U} \times \bar{U} \quad |x - y| = \mathcal{L}\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| = \mathcal{L}\epsilon,$$

alors  $f$  est lipschitzienne.

Démonstration

Montrons d'abord que  $f$  est  $\mathcal{S}$ -continue, c'est-à-dire que, si les points  $x, y$  de  $\bar{U}$  ont même ombre,  ${}^o x = {}^o y$ , alors leurs images par  $f$  ont aussi même ombre,  ${}^o f(x) = {}^o f(y)$ .

C'est vrai, par définition même, si  $|x - y| = \mathcal{L}\epsilon$ .

Montrons qu'on a encore ce résultat si  $\frac{|x-y|}{\epsilon}$  est infiniment grand.

Comme  $\bar{U}$  est convexe le segment  $[x, y]$  est contenu dans  $\bar{U}$ .

Désignons par  $x_1, \dots, x_\omega$  une subdivision uniforme du segment  $[x, y]$  de pas  $\Delta x = @\epsilon$ . Par hypothèse les pas  $\Delta f_i = |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$  sont de la forme  $\mathcal{L}\epsilon$ .

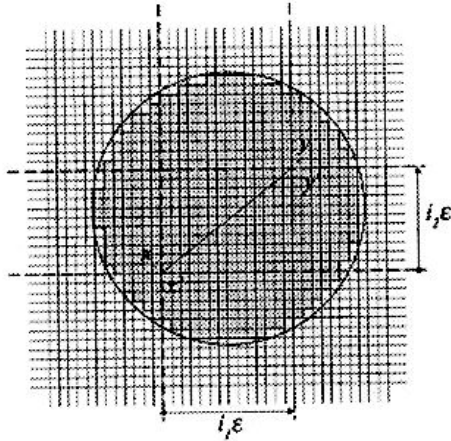
Le plus grand  $\Delta f$  des  $\Delta f_i$  étant de la forme  $\mathcal{L}\epsilon$  le rapport  $C = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\mathcal{L}\epsilon}{\epsilon} = \mathcal{L}$  est limité et l'on a :

$$| f(x) - f(y) | \leq (C + 1) | x - y |$$

ce qui, en prenant la partie standard, nous donne le résultat annoncé  ${}^o f(x) = {}^o f(y)$ .

La fonction  $f$  est donc bien  $\mathcal{S}$ -continue, ce qui entraîne qu'elle est continue car elle est standard.

Nous allons maintenant montrer que  $f$  est lipschitzienne en nous servant d'un pavage de  $\mathbb{R}^p$  par des cubes de côté  $\epsilon$ .



Le domaine  $\overline{U}$  étant borné, il n'existe qu'un nombre fini de tels pavés rencontrant  $\overline{U}$ .

A un pavé  $D_\alpha$  situé à l'intérieur de  $\overline{U}$ , on associe le diamètre  $\Delta f_\alpha$  de son image  $f(D_\alpha)$ , ce diamètre est de la forme  $\mathcal{L}\epsilon$  car la fonction  $f$  continue vérifie l'hypothèse du lemme. Le plus grand  $\Delta f$  de ces diamètres est aussi de la forme  $\mathcal{L}\epsilon$ .

Soient  $x, y$  deux points standard distincts de  $\overline{U}$ . On désigne par  $x'$  et  $y'$  les sommets des pavés intérieurs les plus proches de  $x$  et de  $y$  et par  $z_1, \dots, z_\omega$  les points d'intersection du segment  $[x', y']$  avec les hyperplans d'équation  $x_k = x'_k + l\epsilon$   $l \in \mathbb{Z}$ . Le nombre  $\omega$  est majoré par  $|i_1| + \dots + |i_p|$  en posant  $\vec{x'y'} = (\epsilon i_1, \dots, \epsilon i_p)$ .

Si l'on pose  $z_0 = x'$ , comme deux points consécutifs  $z_i$  et  $z_{i+1}$  appartiennent au même pavé, on a

$$\begin{aligned} | f(x') - f(y') | &\leq \sum | f(z_{i+1}) - f(z_i) | \leq (|i_1| + \dots + |i_p|) \Delta f \\ &\leq \sqrt{p(i_1^2 + \dots + i_p^2)} \Delta f = \sqrt{p} |y' - x'| \frac{\Delta f}{\epsilon} \end{aligned}$$

ce qui nous donne en passant à l'ombre

$$| f(y) - f(x) | \leq | y - x | \circ \left( \sqrt{p} \frac{\Delta f}{\epsilon} \right).$$

Comme  $\frac{\Delta f}{\epsilon} = \mathcal{L}$  la fonction  $f$  est lipschitzienne, de constante de Lipschitz standard  $C = \sqrt{p} \circ \left( \frac{\Delta f}{\epsilon} \right)$ .

**Lemme 2.** — Soit  $\overline{U}$  l'adhérence d'un ouvert  $U$  convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction standard de  $\overline{U}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f$  est à la fois un homéomorphisme local et  $\epsilon$ -régulière, alors elle est localement (au voisinage de tout point de  $U$ ) bilipschitzienne.

Démonstration

Comme  $f$  est standard, il suffit de le montrer au voisinage des points standard de  $U$ .

Soit donc  $a$  un point standard de  $U$ . Il existe une boule fermée standard  $\overline{B(a, r)}$  contenue dans  $U$  telle que la restriction de  $f$  à cette boule soit un homéomorphisme sur son image  $\overline{W}$ , soit  $g$  son inverse. Comme  $f(B(a, r))$  est un ouvert standard, il existe une boule  $B(f(a), \rho)$  standard dont l'adhérence est contenue dans  $f(B(a, r))$ , soit  $V = g(B(f(a), \rho))$ .

Le lemme 1 implique  $f$  est lipschitzienne de  $\overline{B(a, r)}$  sur  $\overline{W}$ , de constante de Lipschitz standard  $C$ .

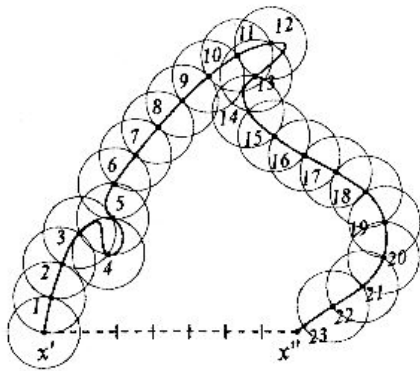
Nous allons montrer par l'absurde que  $g$  est une application  $\epsilon$ -régulière de  $B(f(a), \rho)$  sur  $V$ , ce qui avec le lemme 1 implique que  $g$  est lipschitzienne et donc que  $f$  est bilipschitzienne de  $V$  sur  $B(f(a), \rho)$ .

Soient deux points  $y', y''$  de  $\overline{B(f(a), \rho)}$  vérifiant  $|y' - y''| = @\epsilon$  et posons  $x' = g(y')$   $x'' = g(y'')$ . L'inégalité

$$|y' - y''| = |f(x') - f(x'')| \leq C |x' - x''| \quad \text{avec } C \text{ standard}$$

implique que le rapport  $\frac{|x' - x''|}{\epsilon}$  est, soit appréciable, soit infiniment grand.

Montrons que le deuxième cas ne peut se produire.



Posons  $y(t) = y' + t(y'' - y')$  et  $x(t) = g(y(t))$ . Soit  $\omega$  la partie entière de  $\frac{|x' - x''|}{\epsilon}$  et  $\delta = |y' - y''|$ . On définit par récurrence une suite de points de  $[0, 1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{\omega-1} < t_\omega \leq 1$$

en posant

$$t_{i+1} = \inf \{ t_i \leq t \leq 1 \mid |x(t) - x(t_i)| = \delta \}.$$

Cette suite est bien définie car la longueur de l'arc de courbe  $x(t)$  est supérieure ou égale à celle du segment  $[x', x'']$  joignant

ses extrémités. Comme  $f$  est  $\epsilon$ -régulière et que la distance entre deux points consécutifs  $x(t_i)$  et  $x(t_{i+1})$  est  $\delta = @\epsilon$ , la distance entre les points  $y(t_i)$  et  $y(t_{i+1})$  est  $\gamma_i \delta = @\epsilon$ . Les  $\gamma_i$  sont appréciables, le plus petit  $\gamma$  est appréciable ce qui nous donne

$$\omega \gamma \delta \leq |y(t_\omega) - y(0)| \leq |y(1) - y(0)| = \delta,$$

ce qui est contradictoire si le rapport  $\frac{|x' - x''|}{\epsilon}$  est infiniment grand car alors  $\omega$  est aussi infiniment grand.

L'application  $g$  est donc  $\epsilon$ -régulière.

**Proposition 1.** — Si la fonction standard  $f$  d'un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est  $\epsilon$ -régulière, alors elle est bilipschitzienne.

Démonstration

Comme un intervalle est convexe, il suffit de montrer que  $f$  est un homéomorphisme puisqu'avec les deux lemmes précédents cela implique que  $f$  et sa fonction réciproque sont lipschitziennes, ce qui entraîne que  $f$  est bilipschitzienne.

Montrons par l'absurde que  $f$  est monotone, c'est-à-dire que  $f$  n'admet pas d'extrema locaux autres que les extrémités de l'intervalle.

Supposons donc qu'il existe un maximum  $M$  local en un point  $z$  situé à l'intérieur de l'intervalle. Comme  $f$  est standard, on peut supposer  $z$  standard.

L'image par l'application continue  $f$  de l'intervalle  $[z - \epsilon, z]$  est un intervalle  $[m', M]$ .

L'image par l'application continue  $f$  de l'intervalle  $[z, z + \epsilon]$  est un intervalle  $[m'', M]$ .

Supposons par exemple  $m' \leq m''$ .

Le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe au moins un point  $z'$  de l'intervalle  $[z - \epsilon, z]$  tel que  $f(z') = f(z + \epsilon)$ , ce qui est contraire à l'hypothèse de régularité.

**Corollaire 1.** — *Théorème des fonctions implicites.*

Soient  $f(x, y)$  une fonction standard d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $(a, b)$  un point standard de  $U$ . Si la fonction  $f$  vérifie l'hypothèse du lemme 1 :

$$\forall (u, v) \in U \times U \quad |u - v| = \mathcal{L}\epsilon \implies |f(u) - f(v)| = \mathcal{L}\epsilon,$$

est  $\epsilon$ -régulière en la deuxième variable  $y$  et vérifie  $f(a, b) = 0$  alors il existe une fonction lipschitzienne  $\phi$  définie au voisinage de  $a$  telle que  $f(x, \phi(x)) = 0$ .

Démonstration.

Les ingrédients de la démonstration classique du théorème des fonctions implicites sont :

- la fonction  $f$  est continue,
- la fonction  $f_x : y \longrightarrow f(x, y)$  est un homéomorphisme pour  $x$  voisin de  $a$ .

Montrons que l'on a ces deux propriétés grâce aux hypothèses faites.

Comme le point  $(a, b)$  et l'ouvert  $U$  sont standard, il existe deux cubes fermés standard  $A \subset \mathbb{R}^p$  et  $B \subset \mathbb{R}$  centrés en  $a$  et  $b$  tels que  $A \times B$  soit contenu dans  $U$ . D'après le lemme 1 la fonction  $f$  est lipschitzienne dans  $A \times B$ , de constante de Lipschitz standard et d'après le lemme 2 la fonction  $f_x : y \longrightarrow f(x, y)$  bilipschitzienne pour tous les points standard  $x$  de  $A$ , donc pour tous les points  $x$  de  $A$  car  $f$ ,  $A$  et  $B$  sont standard.

On obtient l'existence, l'unicité et la continuité de  $\phi$  de façon habituelle, quitte à restreindre  $A$ .

L'application  $\phi$  est standard car unique.

Pour montrer qu'elle est lipschitzienne il suffit de montrer qu'elle vérifie l'hypothèse du lemme 1.

Soient  $x$  et  $x + \delta x$  deux points de  $A$  avec  $|\delta x| = \mathcal{L}\epsilon$ .

Posons  $\delta\phi = \phi(x + \delta x) - \phi(x)$ .

La fonction  $g(t) = f(x + \delta x, \phi(x + \delta x) - t)$  est monotone et  $\varepsilon$ -régulière.

La suite d'égalités :

$$\begin{aligned} g(\delta\phi) - g(0) &= f(x + \delta x, \phi(x)) \\ &= f(x + \delta x, \phi(x)) - f(x, \phi(x)) \\ &= c\varepsilon \text{ avec } c = \mathcal{L} \end{aligned}$$

implique  $\delta\phi = \mathcal{L}\varepsilon$  (c.f. démonstration du lemme 2). ■

Appliquons maintenant la notion d' $\varepsilon$ -régularité aux modélisations discrètes du continu obtenues en considérant  $\mathbb{R}$  comme " $\mathbb{Z}$  vu de loin" (J. Hartong); ce schéma étant rigoureusement justifié par l'Analyse Non Standard.

### **Théorème des fonctions implicites discret.**

Un énoncé classique correspondant au corollaire 1.1 dans le cas  $p = 1$  est :

Si  $f$  est une fonction de  $[-1, +1] \times [-1, +1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

(i)  $f(0, 0) = 0,$

(ii)  $f(x, y)$  est lipschitzienne en  $(x, y),$

(iii) pour tout  $x,$  la fonction  $y \mapsto f(x, y)$  est bilipschitzienne en  $y,$

alors il existe une fonction lipschitzienne  $\phi$  définie au voisinage de 0 telle que  $f(x, \phi(x)) = 0.$

Nous discrétisons (ou tabulons) une fonction  $f$  de  $[-1, +1] \times [-1, +1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par les fonctions  $F$  et  $FR$  définies de la façon suivante :

$$F(i, j) = \left[ \omega f\left(\frac{i}{\omega}, \frac{j}{\omega}\right) \right]$$

$$FR(i, j) = \left[ \omega^2 \left( f\left(\frac{i}{\omega}, \frac{j}{\omega}\right) \right) - \omega F(i, j) \right]$$

où  $\omega$  est un entier infiniment grand positif et  $[x]$  la partie entière de  $x.$

Nous appelons code de  $F$  et de  $FR$  les fonctions suivantes :

$$C_{ij}^1 = F(i + 1, j) - F(i, j), \quad C_{ij}^2 = F(i, j + 1) - F(i, j).$$

$$CR_{ij}^1 = FR(i + 1, j) - FR(i, j), \quad CR_{ij}^2 = FR(i, j + 1) - FR(i, j).$$

Si  $f(0, 0) = 0$  alors (i)'  $F(0, 0) = 0.$

Si  $f$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz standard, alors (ii)' les valeurs  $C_{ij}^1$  et  $C_{ij}^2$  sont limitées.

Si de plus la fonction  $f_x : y \mapsto f(x, y)$  est bilipschitzienne de constantes de Lipschitz  $c_x$  et  $C_x$  standard, les  $C_{ij}^2$  et  $CR_{ij}^2$  sont tous de même signe et, si  $C_{ij}^2 = 0,$   $\left[ \frac{\omega}{CR_{ij}^2} \right] = \mathcal{L}.$

La longueur des paliers (des intervalles de  $\mathbb{Z}$  où elle est constante) de l'application  $j \mapsto F(i, j)$  est majorée par  $(k + 1)$ , en désignant par  $k$  le plus grand des  $\lfloor \frac{\omega}{CR_{ij}^2} \rfloor$ , associés aux  $C_{ij}^2$  nuls,  $k$  est un entier standard indépendant de  $i$ .

La fonction  $F(i, j)$  vérifie donc en plus

(iii)' Les  $C_{ij}^2$  sont tous de même signe et la longueur des paliers de l'application  $j \mapsto F(i, j)$  est limitée.

Nous allons montrer le corollaire suivant (Théorème des fonctions implicites discret) :

**Corollaire 2.** — Les hypothèses discrètes (i)', (ii)' et (iii)' qui ne portent que sur la tabulation  $F$  suffisent pour que le théorème des fonctions implicites s'applique à la fonction  $f$ .

Démonstration.

Soit  $F$  une fonction définie sur  $[-\omega, +\omega] \times [-\omega, +\omega] \cap \mathbb{Z}^2$ , à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , vérifiant les trois conditions (i)' ci-dessus.

Comme les  $|C_{ij}^1|$  (resp.  $|C_{ij}^2|$ ) sont tous limités, le plus grand d'entre eux,  $C_{max}^1$  (resp.  $C_{max}^2$ ) l'est aussi, ainsi que  $C = (C_{max}^1 + C_{max}^2)$ .

Le plus petit des  $|C_{ij}^2|$  non nuls est un entier  $C_{min}^2$  supérieur ou égal à 1.

La longueur des paliers de l'application  $j \mapsto F(i, j)$  étant limitée, la plus grande de ces longueurs  $L$  l'est aussi.

L'entier  $K$  défini par la relation ci dessous est limité

$$K = (L + 1) \left( \left\lfloor \frac{C_{max}^1}{C_{min}^2} \right\rfloor + 1 \right).$$

Soit  $\hat{f}$  la fonction continue, affine sur chaque triangle de la triangulation du carré  $[-1, +1] \times [-1, +1]$  de sommets  $\frac{i}{\omega}, \frac{j}{\omega}$  et de côtés parallèles aux axes et à la deuxième bissectrice, vérifiant

$$\hat{f}\left(\frac{i}{\omega}, \frac{j}{\omega}\right) = \frac{F(i, j)}{\omega}.$$

La fonction  $\hat{f}$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz standard  $C$  et vérifie  $\hat{f}(0, 0) = 0$ ,

Il existe donc une fonction standard  $f$ , ombre de  $\hat{f}$ , définie par

$$f\left(o\left(\frac{i}{\omega}\right), o\left(\frac{j}{\omega}\right)\right) = o\left(\frac{F(i, j)}{\omega}\right).$$

lipschitzienne de constante de Lipschitz  $C$ .

En particulier, si  $F$  est la tabulation d'une fonction standard  $g$ , on a  $f = g$ .

Nous allons donner un algorithme (basé sur l'entier le plus proche) permettant de construire une double suite d'entiers  $j(i), j'(i)$  vérifiant :

$$j(0) = j'(0) = 0 \\ F(i, j(i)) \geq 0, \quad F(i, j'(i)) \leq 0$$



$(j(i) - j'(i))$   $(j(i+1) - j(i))$  et  $(j'(i+1) - j'(i))$  standard  
(les valeurs absolues de ces trois différences seront majorées par  $2K$ ).

Si cette double suite existe, la fonction  $\hat{\phi}$  continue, affine par morceaux, définie par  $\hat{\phi}(\frac{i}{\omega}) = \frac{j(i)}{\omega}$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz standard  $2K$ . Il existe alors une fonction standard  $\phi$  ombre de  $\hat{\phi}$  définie par

$$\phi\left(o\left(\frac{i}{\omega}\right)\right) = o\left(\frac{j(i)}{\omega}\right)$$

qui vérifie  $f(x, \phi(x)) = 0$  et est lipschitzienne, de constante de Lipschitz  $2K$ .

Explicitons maintenant **l'algorithme** dans le cas d'une fonction  $F$  pour laquelle les  $C_{i,j}^2$  sont positifs (à  $i$  fixé la fonction  $j \mapsto F(i, j)$  est croissante).

On a nécessairement  $j'(i) \leq j(i)$  et la double suite  $j'(i)$ ,  $j(i)$  est définie, pour  $i$  positif, ainsi :

1. Si  $F(i+1, j(i)) > 0$  et  $F(i+1, j'(i)) < 0$ ,  
on a donc  $j'(i) < j(i)$ , on pose alors  
 $j'(i+1) = j'(i) + l'$ ,  $l'$  étant le plus grand entier tel que  
 $j'(i) + l' < j(i)$  et  $F(i+1, j'(i) + l') \leq 0$   
 $j(i+1) = j(i) - l$ ,  $l$  étant le plus grand entier tel que  
 $j'(i) + l' \leq j(i) - l$  et  $F(i+1, j(i) - l) \geq 0$ .
2. Si  $F(i+1, j(i)) > 0$  et  $F(i+1, j'(i)) = 0$ ,  
on a encore  $j'(i) < j(i)$ , et on pose  
 $j'(i+1) = j'(i) + l'$ ,  $l'$  étant le plus grand entier tel que  
 $j'(i) + l' < j(i)$  et  $F(i+1, j'(i) + l') = 0$   $j(i+1) = j'(i+1)$
3. Si  $F(i+1, j(i)) = 0$  et  $F(i+1, j'(i)) < 0$ ,  
on a encore  $j'(i) < j(i)$ , et on pose  
 $j(i+1) = j(i) - l$ ,  $l$  étant le plus grand entier tel que  
 $j(i) - l > j'(i)$  et  $F(i+1, j(i) - l) = 0$   $j'(i+1) = j(i+1)$
4. Si  $F(i+1, j(i)) = 0$  et  $F(i+1, j'(i)) = 0$ ,  
si on a  $j'(i) < j(i)$ , on procède comme dans le cas 1, sinon on pose  
 $j'(i+1) = j'(i) = j(i+1)$
5. Si  $F(i+1, j(i)) < 0$  et  $F(i+1, j'(i)) < 0$ ,  
on pose  
 $j(i+1) = j(i) + l$ ,  $l$  étant le plus petit entier tel que l'on ait

$$F(i+1, j(i) + l) = F(i, j(i)) + C_{i,j(i)}^1 + C_{i+1,j(i)}^2 + \dots + C_{i+1,j(i)+l-1}^2 \geq 0.$$

$j'(i+1) = j(i) + l'$ ,  $l'$  étant le plus grand entier tel que  
 $j(i) + l' \leq j(i) + l$  et  $F(i+1, j(i) + l') \leq 0$ .

6. Si  $F(i+1, j(i)) > 0$  et  $F(i+1, j'(i)) > 0$ ,  
on pose  
 $j'(i+1) = j'(i) - l'$ ,  $l'$  étant le plus petit entier tel que l'on ait  
 $F(i+1, j'(i) - l') \leq 0$ .  $j(i+1) = j'(i) - l$ ,  
 $l$  étant le plus grand entier tel que  
 $j'(i) - l' \leq j'(i) - l$  et  $F(i+1, j'(i) - l) \geq 0$ .
7. On ne peut avoir  $F(i+1, j(i)) > 0$  et  $F(i+1, j'(i)) < 0$

Le passage de  $i$  à  $i - 1$  dans le cas des  $i$  négatifs se traite de façon analogue.

Les valeurs absolues des différences

$$(j(i) - j'(i)) \quad (j(i+1) - j(i)) \quad \text{et} \quad (j'(i+1) - j'(i))$$

sont majorées par  $2K$ .

On peut remarquer que l'algorithme du choix de  $j(i+1)$  en fonction de  $j(i)$  est celui utilisé classiquement pour tracer sur écran les lignes de niveau d'une fonction,  $f$ , (voir J.D Foley, chapitre 11, J.P. Reveilles).

Par exemple pour le tracé de Bresenham "naïf" de la droite de pente rationnelle  $\frac{a}{b}$  avec  $0 < a < b$  on prend

$$f(x, y) = by - ax, \text{ ce qui donne } F(i, j) = bj - ai,$$

et dans ce cas, l'algorithme du corollaire 2 devient l'algorithme dit de "parcours des droites naïves" (cf. Thèse de J.P. Reveilles page 47).

L'algorithme précédent (basé sur l'entier le plus proche) se généralise évidemment au cas d'une fonction  $F$  définie sur  $[-\omega, +\omega]^p \times [-\omega, +\omega] \cap \mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}$ , à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , permettant de déduire de la version discrète du théorème des fonctions implicites le résultat continu classique.

## 2 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ .

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 1.** — Soit  $f$  une application standard de l'adhérence  $\overline{U}$  d'un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon$ -régulière ( $\epsilon$  infinitésimal fixé comme en I).

1. Si  $n = 1$ ,  $f$  est un homéomorphisme bilipschitzien.
2. Pour tout  $n$ ,  $f$  est un homéomorphisme local bilipschitzien dans  $U$ .
3. Si de plus l'image  $f(U)$  est convexe et si le bord de l'image  $\partial f(U)$  est l'image du bord  $f(\partial U)$ , alors  $f$  est un homéomorphisme bilipschitzien de  $\overline{U}$  sur  $f(\overline{U})$ .

Le point 1 est la proposition 1 du paragraphe précédent, nous l'avons fait figurer ici pour mémoire et pour rappeler que la situation est très différente selon que la dimension est 1 ou  $\geq 2$ .

En effet, contrairement au cas  $n = 1$ , dans le cas  $n \geq 2$ , un homéomorphisme local  $f$ , même préservant l'orientation, n'est pas nécessairement un homéomorphisme global comme le montre l'exemple de  $z \mapsto z^2$  de  $\mathcal{C} - \{0\} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Même si les domaines source et but d'un homéomorphisme local  $f$  sont compacts et simplement connexes,  $f$  n'est pas un nécessairement un homéomorphisme global :

**Lemme 3.** — Il existe une application  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  du disque  $\overline{B(0,1)}$  de  $\mathbb{R}^2$  sur lui même, vérifiant  $\det(Df) > 0$  qui n'est pas un difféomorphisme global.

Nous allons d'abord donner un algorithme qui, par déformations successives, envoie le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  sur lui même tel que l'application résultante  $f$  soit un homéomorphisme local respectant l'orientation mais pas un homéomorphisme global, puis nous indiquerons comment lisser cette construction pour obtenir le résultat du lemme.

Les déformations sur lesquelles est basé l'algorithme  $\mathcal{C}^0$  sont des déformations de polygones convexes en polygones convexes selon la définition générale (dimension de l'espace ambiant quelconque) suivante :

**Définition 2.** — Soit  $\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)$  un premier polytope de sommets  $A_1, \dots, A_n$  et  $\mathcal{P}(A'_1, \dots, A'_n)$  un deuxième polytope de sommets  $A'_1, \dots, A'_n$ . Nous envoyons  $\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)$  sur  $\mathcal{P}(A'_1, \dots, A'_n)$  en envoyant un point du premier polytope sur le point du deuxième de même coordonnées barycentriques.

### Algorithme $\mathcal{C}^0$

1— On coupe le carré  $\overline{U} = [-1, 1] \times [-1, 1]$  en trois zones rectangulaires :

la zone supérieure  $\overline{U}_{sup} = \mathcal{P}(A_1, A_3, B_1, B_2)$

avec  $A_1 = (-1, 1)$   $A_3 = (1, 1)$   $B_1 = (-1, 0.5)$   $B_2 = (1, 0.5)$ ,

la zone médiane  $\overline{U}_{mid} = \mathcal{P}(B_1, B_2, C_1, C_2)$

avec  $C_1 = (-1, -0.5)$   $C_2 = (1, -0.5)$ ,

la zone inférieure  $\overline{U}_{inf} = \mathcal{P}(C_1, C_2, D_1, D_3)$

avec  $D_1 = (-1, -1)$   $D_2 = (1, -1)$ .

2— On déforme la zone supérieure  $\overline{U}_{sup}$  en  $\overline{U}'_{sup}$  de la façon suivante :

on envoie  $\mathcal{P}(A_1, A_2, B_1, B_2)$  sur  $\mathcal{P}(A'_1, A'_2, B'_1, B'_2)$

avec  $A'_1 = A_1$   $A_2 = (0.5, 1)$   $A'_2 = (2, 1)$   $B'_1 = B_1$   $B'_2 = B_2$ ,

et  $\mathcal{P}(A_2, A_3, B_2)$  sur  $\mathcal{P}(A'_2, A'_3, B'_2)$

avec  $A'_3 = (2, 0.5)$ .

On laisse la zone médiane inchangée :

$\overline{U}'_{mid} = \mathcal{P}(B'_1, B'_2, C'_1, C'_2) = \mathcal{P}(B_1, B_2, C_1, C_2) = \overline{U}_{mid}$ .

On déforme la zone inférieure

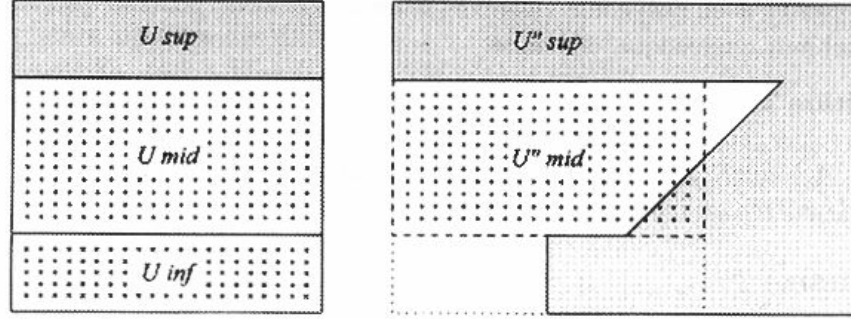
$\overline{U}_{inf} = \mathcal{P}(C_1, C_2, D_1, D_3)$  en  $\overline{U}'_{inf} = \mathcal{P}(C'_1, C'_2, D'_1, D'_3)$

en opérant de la même manière que pour la zone supérieure moyennant une symétrie par rapport à  $0x$ ,

avec  $C'_1 = C_1$   $C'_2 = C_2$   $D'_1 = D_1$   $D'_3 = (2, -1)$ .

La réunion  $\overline{U}'$  de ces trois zones  $\overline{U}'_{sup}$ ,  $\overline{U}'_{mid}$  et  $\overline{U}'_{inf}$  a la forme d'un fer à cheval.

3 — On courbe les branches  $\overline{U}'_{sup}$  (vers le bas) et  $\overline{U}'_{inf}$  (vers le haut) de façon à ce qu'elles se referment l'une sur l'autre.



Décrivons le processus pour  $\overline{U}'_{sup} = \mathcal{P}(A'_1, A'_2, A'_3, B'_1)$ .

On pose

$$a'_1 = (-1, 1) = A'_1 \quad a'_2 = (1, 1) \quad a'_3 = (1.2, 1) \quad a'_4 = (1.4, 1) \quad a'_5 = (1.6, 1) \quad a'_6 = (2, 1) = A'_2$$

$$b'_1 = (-1, 0.5) = B'_1 \quad b'_2 = (1, 0.5) \quad b'_3 = (1.5, 0.5) \quad b'_4 = (1.75, 0.5) \quad b'_5 = (2, 0.5) = A'_3.$$

On envoie

$$\overline{U}'_{11} = \mathcal{P}(a'_1, a'_2, b'_3, b'_1) \text{ sur } \overline{U}''_{11} = \mathcal{P}(a''_1, a''_2, b''_3, b''_1)$$

$$\text{avec } a''_1 = (-1, 1) = a'_1 \quad a''_2 = (2, 1) \quad b''_3 = (1.5, 0.5) = b'_3 \quad b''_1 = (-1, 0.5) = b'_1,$$

$$\overline{U}'_{12} = \mathcal{P}(a'_2, a'_3, b'_3) \text{ sur } \overline{U}''_{12} = \mathcal{P}(a''_2, a''_3, b''_3)$$

$$\text{avec } a''_3 = (2, 0.5),$$

$$\overline{U}'_{13} = \mathcal{P}(a'_3, a'_4, b'_4, b'_3) \text{ sur } \overline{U}''_{13} = \mathcal{P}(a''_3, a''_4, b''_4, b''_3)$$

$$\text{avec } a''_4 = (2, -0.5) \quad b''_4 = (0.5, -0.5),$$

$$\overline{U}'_{14} = \mathcal{P}(a'_4, a'_5, b'_4) \text{ sur } \overline{U}''_{14} = \mathcal{P}(a''_4, a''_5, b''_4)$$

$$\text{avec } a''_5 = (2, -1),$$

$$\overline{U}'_{15} = \mathcal{P}(a'_5, a'_6, b'_5, b'_4) \text{ sur } \overline{U}''_{15} = \mathcal{P}(a''_5, a''_6, b''_5, b''_4)$$

$$\text{avec } a''_6 = (0, -1) \quad b''_5 = (0, -0.5).$$

$$\text{L'image de } \overline{U}'_{sup} \text{ est } \overline{U}''_{sup} = \overline{U}''_{11} \cup \overline{U}''_{12} \cup \overline{U}''_{13} \cup \overline{U}''_{14} \cup \overline{U}''_{15}.$$

On laisse la zone médiane inchangée :  $\overline{U}''_{mid} = \overline{U}'_{mid}$ .

On déforme la zone  $\overline{U}'_{inf}$  en  $\overline{U}''_{inf}$  de la même manière que pour la zone supérieure moyennant une symétrie par rapport à l'axe des  $x$ .

L'image ainsi obtenue  $\overline{U}''$  est le rectangle  $[-1, 2] \times [-1, 1]$  que l'on envoie sur le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  par l'application

$$(x, y) \longmapsto \left( \frac{2x-1}{3}, y \right).$$

Alors que les applications de  $\overline{U}'_{sup}$  sur  $\overline{U}''_{sup}$ , de  $\overline{U}'_{mid}$  sur  $\overline{U}''_{mid}$  et de  $\overline{U}'_{inf}$  sur  $\overline{U}''_{inf}$  sont des homéomorphismes, l'application globale de  $\overline{U}'$  sur  $\overline{U}''$  n'est pas injective puisque  $\overline{U}''_{sup}$  et  $\overline{U}''_{inf}$  ont une intersection non vide entre elles et avec  $\overline{U}''_{mid}$ .

**Lissage de l'algorithme  $\mathcal{C}^0$ .**

1 — Application  $\varphi(x)$ .

Soit  $\varphi(x)$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$ , croissante, vérifiant  $\varphi(x) = 0$  pour  $x \leq 0$  et  $\varphi(x) = 1$  pour  $x \geq 1$ .

Si  $a > 0$  et  $c > 0$  la fonction

$$\varphi_{a,c}(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{2a}\right)(cx) + \left(1 - \varphi\left(\frac{x-a}{2a}\right)\right)(2ca)$$

est  $\mathcal{C}^\infty$ . Son graphe coïncide avec celui de l'horizontale  $y = 2ca$  pour  $x \leq a$  et avec la droite  $y = cx$  pour  $x \geq 3a$ .

En opérant de façon symétrique par rapport à  $0y$ , on obtient ainsi une courbe  $\mathcal{C}^\infty$  dont le graphe coïncide avec la droite  $y = -cx$  pour  $x \leq -3a$ , avec l'horizontale  $y = 2ca$  pour  $-a \leq x \leq a$  et avec la droite  $y = cx$  pour  $x \geq 3a$ .

Ce processus permet de lisser une ligne brisée faisant un angle  $\hat{A}$  en un point  $A$  en prenant comme système d'axes  $0x, 0y$  la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle  $\hat{A}$ .

2 — Lissage du carré  $\bar{U}$  et des étirements horizontaux des bandes  $\bar{U}_{sup}$  et  $\bar{U}_{inf}$ .

Le procédé précédent permet d'arrondir les angles du carré.

L'on désigne encore par  $\bar{U}$  ce "presque carré".

A l'aide de la fonction  $\varphi$  on construit une fonction  $g(y)$  positive  $\mathcal{C}^\infty$  vérifiant

$$\begin{aligned} g(y) &= 1 \text{ pour } y \in ]-\infty, -0.5001] \cup [+0.5001, +\infty[ \\ g(y) &= 0 \text{ pour } y \in [-0.4999, +0.4999] \end{aligned}$$

et l'on pose

$$G(x, y) = \left(x + \varphi(x)g(y), y\right).$$

L'application  $G$  est un difféomorphisme vérifiant  $\det(DG) > 0$ . L'image  $U' = G(U)$  est un "fer à cheval" identique à celui obtenu dans le cas  $\mathcal{C}^0$  aux angles près, on les a arrondis (lissés).

3 — Lissage de la déformation de  $\bar{U}'_{sup}$  en  $\bar{U}''_{sup}$ .

On désigne par  $\Gamma_{sup}$  et  $\Gamma_{inf}$  l'arc de courbe  $\mathcal{C}^\infty$  obtenu par lissage (suppression des points anguleux) de la ligne brisée  $a''_1 a''_2 a''_4 a''_6$  et  $b''_1 b''_2 b''_4 b''_6$ .

Soit  $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \end{pmatrix}$  une paramétrisation normale de  $\Gamma_{inf}$  et  $L$  la longueur de  $\Gamma_{inf}$ .

Si l'on pose  $\nu(s) = \begin{pmatrix} -\gamma'_2(s) \\ \gamma'_1(s) \end{pmatrix}$ ,  $(\gamma'(s), \nu(s))$  est le repère de Frenet de  $\Gamma_{inf}$  au point  $\gamma(s)$ .

La demi droite,  $\gamma(s) + t\nu(s)$   $t > 0$ , coupe l'arc de courbe  $\Gamma_{sup}$  en un point

$M(s) = \gamma(s) + l(s)\nu(s)$ , la fonction  $l(s)$  étant  $\mathcal{C}^\infty$ .

A l'aide de la fonction  $\varphi$  on construit une application  $h$  strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$\begin{aligned} h(x) &= x + 1 \text{ pour } x \leq 1.2, \\ h(x) &= \frac{x+1}{3}L \text{ pour } x \geq 1.8. \end{aligned}$$

Soit  $F_{sup}$  l'application du rectangle  $R_{sup} = [-1, 2] \times [0.5, 1]$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$F_{sup}(x, y) = \gamma(h(x)) + (y - 0.5)l(h(x))\nu(h(x)).$$

On a  $\det DF_{sup} =$

$$h'(x)l(h(x))\left(1 + (y - 0.5)l(h(x))(\gamma_1''(h(x))\gamma_2'(h(x)) - \gamma_2''(h(x))\gamma_1'(h(x)))\right) > 0$$

car la courbure algébrique

$$\gamma_2''\gamma_1' - \gamma_1''\gamma_2'$$

de  $\Gamma_{inf}$  est négative.

L'application  $F_{sup}$  coïncide avec l'identité pour  $x < 1.2$ , avec une application affine pour  $x \geq 1.8$ . Elle s'étend en une application  $C^\infty$  encore notée  $F_{sup}$  définie au voisinage de  $R_{sup}$  vérifiant  $\det DF_{sup} > 0$  et coïncidant avec l'identité pour  $x < 1.2$ .

On procède de façon symétrique avec la zone inférieure, ce qui donne le résultat du lemme 3 moyennant le lemme 4 suivant :

**Lemme 4.** — *Si  $U$  est un ouvert convexe, borné, standard, il existe un homéomorphisme standard de  $B(0, 1)$  sur  $\overline{U}$  de même classe de différentiabilité que le bord de  $U$ .*

Il y a une infinité de variantes possibles à cet algorithme, on joue sur le nombre de bras (de zones que l'on étire) de  $\overline{U'}$  et sur la façon de les rabattre pour former le nouveau convexe  $\overline{U''}$ .

Démonstration du lemme 4

Une homothétie et une translation standard appliquées à  $\overline{B(0, 1)}$  permettent de se ramener au cas  $\overline{B(0, 1)} \subset U$ .

Soit  $\varphi(x)$  une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$ , croissante, nulle pour  $x \leq 0$ , égale à 1 pour  $x \geq 1$ .

Si  $\overrightarrow{OM} = r(M) \vec{u}$ , avec  $|\vec{u}| = 1$  et si  $M'$ , l'intersection de la demi droite  $\lambda \vec{u}$ , ( $\lambda \geq 0$ ) avec le bord  $\partial U$ , vérifie  $\overrightarrow{OM'} = R(M) \vec{u}$ , on définit l'application  $f$  de  $B(0, 1)$  dans  $\overline{U}$  par

$$\overrightarrow{Of(M)} = \frac{r(M)}{\left(1 - \varphi(2r(M) - 1)\right) + \frac{\varphi(2r(M) - 1)}{R(M)}} \vec{u}$$

Cette application  $f$  est bijective car la fonction

$$r \longrightarrow \frac{r}{1 - \varphi(2r - 1) + \frac{\varphi(2r - 1)}{R}}$$

a une dérivée positive car  $R > 1$ .

De plus,  $f$ , coïncide avec l'identité pour  $r \leq 1/2$  et est de même classe de différentiabilité que  $R(M)$ , c'est à dire, que l'application qui à  $M$  fait correspondre  $M'$ , pour  $r \geq 1/2$ .

Quitte à faire une permutation des coordonnées, on peut supposer que, localement, l'équation du bord  $\partial U$  est

$$x_n - g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0.$$

Si  $M = (x_1, \dots, x_n)$  et  $M' = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ , la fonction  $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ , solution de l'équation implicite

$$\lambda x_n - g(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n-1}) = 0,$$

ainsi que la fonction  $R(M) = \frac{\lambda(M)}{r(M)}$  sont de même classe de différentiabilité que l'équation du bord  $\partial U$ . ■

Le lemme 3 est donc établi.

### Partie locale du théorème 1 (point 2)

Soit maintenant une application  $f$  standard  $\varepsilon$ -régulière de l'adhérence  $\bar{U}$  d'un ouvert  $U$  convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , nous allons voir que c'est localement un homéomorphisme bilipschitzien.

Pour ce faire, nous commencerons par montrer que

**Lemme 5.** — Si  $\overline{B(a, \varepsilon)} \subset \bar{U}$ , alors  $\text{degré}(f, B(a, \varepsilon), f(a)) = \pm 1$ .

On en déduira que  $f$  est ouverte et discrète dans  $U_\Sigma = \bar{U} - f^{-1}(f(\partial U))$ , ce qui impliquera que  $f$  est un revêtement de  $C'$ , composante connexe de  $U_\Sigma$ , sur  $C''$ , composante connexe de  $V_\Sigma = f(\bar{U}) - (f(\partial U)) = f(U_\Sigma)$ .

Il en résultera que  $f$  est localement un homéomorphisme bilipschitzien, globalement si  $f(U)$  est convexe et si  $f(\partial U) = \partial f(U)$ ,

Pour la théorie du degré la référence est K.G. Lloyd.

Démonstration du lemme 5.

Comme  $f$  est  $\varepsilon$ -régulière, l'intersection  $f^{-1}(a) \cap S(a, \varepsilon) = \emptyset$ ,  $S(a, \varepsilon)$  étant la sphère, bord de la boule  $B(a, \varepsilon)$ .

Désignons par  $F$  l'application de la boule fermée  $\overline{B(0, 1)}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$F(x) = \frac{f(a + \varepsilon x) - f(a)}{\varepsilon}.$$

D'après le lemme 1 la fonction  $f$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz standard  $C$ , la fonction  $F$  l'est aussi avec la même constante, ce qui implique qu'elle est S-continue de  $\overline{B(0, 1)}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe donc une unique fonction standard  $G$  de  $\overline{B(0, 1)}$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $G(\circ x) = \circ F(\circ x)$ .

Pour que l'application continue  $G$  du compact  $\overline{B(0, 1)}$  soit un homéomorphisme, il suffit qu'elle soit injective, comme  $G$  et  $\overline{B(0, 1)}$  sont standard, il suffit d'avoir

$$\forall^{st} x \in \overline{B(0, 1)} \quad \forall^{st} y \in \overline{B(0, 1)} \quad x \neq y \implies G(x) \neq G(y)$$

ce qui est vérifié car

$$|G(x) - G(y)| = |{}^{\circ}F(x) - {}^{\circ}F(y)| = {}^{\circ}|F(x) - F(y)| = {}^{\circ}\left|\frac{f(a + \epsilon x) - f(a + \epsilon y)}{\epsilon}\right|$$

est appréciable.

Comme  $G$  est un homéomorphisme on a  $\text{degré}(G, B(0, 1), 0) = \pm 1$ .

Mais si  $x$  est un point du bord de  $\overline{B(0, 1)}$ , le segment  $[F(x), G(x)]$  ne contient pas 0 car

$${}^{\circ}(tF(x) + (1-t)G(x)) = {}^{\circ}F({}^{\circ}x) \quad \text{avec} \quad |F({}^{\circ}x)| = \left|\frac{f(a + \epsilon {}^{\circ}x) - f(a)}{\epsilon}\right|.$$

D'après le théorème de Poincaré-Bohl, cela entraîne

$$\text{degré}(F, B(0, 1), 0) = \text{degré}(G, B(0, 1), 0) = \pm 1.$$

Les changements d'échelle et les translations étant des difféomorphismes conservant l'orientation, on a

$$\text{degré}(f, B(a, \epsilon), f(a)) = \text{degré}(F, B(0, 1), 0) = \pm 1. \quad \blacksquare$$

D'après le lemme 1 la fonction  $f$  standard  $\epsilon$ -régulière est lipschitzienne, donc dérivable presque partout (H. Federer). On désignera par  $U^d$  l'ensemble des points de  $U$  où  $f$  est dérivable.

**Remarque.** — La dérivée  $Df_x$  de  $f$  en un point  $x$  de  $U^d$  est inversible et il existe un nombre standard  $\sigma$  tel que  $|(Df_x)^{-1}| \leq \frac{1}{\sigma}$ .

On retrouve pour les points de  $U^d$  le résultat

$$\text{degré}(f, B(a, \epsilon), f(a)) = \text{signe } \det(Df_a) = \pm 1.$$

Démonstration de la remarque.

Si  $x$  est un point de  $\overline{U}$ , on pose  $\sigma'(x) = \inf_{|u|=1} \left| \left( \frac{f(x + \epsilon u) - f(x)}{\epsilon} \right) \right|$ .

Comme  $f$  est  $\epsilon$ -régulière  $\sigma'(x)$  est appréciable.

Soit  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ensemble fini contenant tous les points standard de  $\overline{U}$ . L'ensemble  $\{\sigma'(x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  est un ensemble fini de réels positifs appréciables, le plus petit d'entre eux,  $\sigma'$ , l'est aussi. Si l'on pose  ${}^{\circ}\sigma' = 2\sigma$ ,  $\sigma$  est un réel standard strictement positif.

Si  $x$  est un point de  $U^d$ , on désigne par  $Df_x$  la dérivée de  $f$  au point  $x$  et l'on pose  $\sigma''(x) = \inf_{|u|=1} |Df_x u|$ .

En un point  $a$  standard de  $U^d$  on a  $Df_a u = {}^{\circ}\left(\frac{f(a + \epsilon u) - f(a)}{\epsilon}\right)$ , ce qui nous donne  ${}^{\circ}\sigma'(a) = \sigma''(a)$ , la dérivée  $Df_a$  est donc inversible et vérifie  $(Df_a)^{-1} \leq \frac{1}{\sigma}$ .  $\blacksquare$

**Lemme 6.** — L'application  $f$  est un revêtement de  $C'$ , composante connexe de  $U_\Sigma = \overline{U} - f^{-1}(f(\partial U))$ , sur  $C''$ , composante connexe de  $V_\Sigma = f(\overline{U}) - f(\partial U)$ .



Démonstration.

1. –D'après la remarque, les points  $x$  de  $U^d$  sont isolés dans  $f^{-1}(f(x))$  et leur index  $i(f, x)$  est défini par

$$i(f, x) = \text{degré}\left(f, B(x, r), f(x)\right) = \text{signe det}(Df_x) = \pm 1$$

$$\forall r \ f^{-1}(f(x)) \cap (B(x, r) - \{x\}) = \emptyset.$$

On va montrer que cet index est le même pour tous les points standard de  $U^d$  et donc pour tous les points de  $U^d$  puisque  $U^d$  et  $f$  sont standard.

Soient  $x$  et  $y$  deux points standard distincts de  $U^d$ . Comme  $U$  est convexe, le segment  $[x, y]$  est contenu dans  $U$ . Il existe alors un ouvert standard convexe  $V$  vérifiant

$$[x, y] \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Quel que soit le point  $z$  de  $V$ , la boule  $B(z, \epsilon)$  est contenue dans  $U$ , on peut donc poser

$$V_+ = \{z \in V \text{ degré}\left(f, B(z, \epsilon), f(z)\right) = +1\},$$

$$V_- = \{z \in V \text{ degré}\left(f, B(z, \epsilon), f(z)\right) = -1\}.$$

En utilisant la "continuité" du degré on montre que  $V_+$  et  $V_-$  sont des ouverts, ce qui implique que l'un des deux est vide puisque  $V$  est connexe.

2. — Montrons maintenant que  $\text{degré}\left(f, B(x, \epsilon), f(x)\right) = \pm 1$  implique que  $f|_U$  est ouverte.

Pour ce faire, comme  $f$  et  $U$  sont standard, il suffit de montrer que, quel que soit l'ouvert standard  $V \subset U$ ,  $f(V)$  est ouvert; et cela est vrai si pour tout point standard  $b$  de  $f(V)$ , il existe un voisinage ouvert de  $b$  contenu dans  $f(V)$ .

Il existe un point standard  $a$  tel que  $f(a) = b$ . La boule  $\overline{B(a, \epsilon)}$  est contenue dans  $V$ . Comme  $f$  est  $\epsilon$ -régulière, le compact  $f(\partial B(a, \epsilon))$  ne contient pas  $f(a) = b$ . Désignons par  $W_b$  la composante connexe de  $\mathbb{R}^n - f(\partial B(a, \epsilon))$  contenant  $b$ . C'est un ouvert et le degré est constant dans  $W_b$ , égal à  $\text{degré}\left(f, B(a, \epsilon), b\right) = \pm 1 \neq 0$ , ce qui implique que, quel que soit  $y$  dans  $W_b$ , il existe  $x \in B(a, \epsilon)$  tel que  $f(x) = y$ .

3. — Si  $b$  est un point de  $\overline{f(U)}$  n'appartenant pas à l'image du bord  $f(\partial U)$ , alors l'image réciproque  $f^{-1}(b)$  est constituée d'un nombre fini de points.

Comme  $f$  et  $U$  sont standard, il suffit de le démontrer pour  $b$  standard.

Soit donc  $b$  un point standard de  $V_\Sigma = f(\overline{U}) - f(\partial U)$ . Posons  $K_b = f^{-1}(b)$ . Les deux compacts standard  $K_b$  et  $\Sigma = f^{-1}(f(\partial U))$  ont une intersection vide, la distance  $\delta = d(K_b, \Sigma)$  est un nombre standard strictement positif.

Si  $a$  est un point de  $K_b$ , on désigne par  $C_a$  la composante connexe de  $K_b$  contenant  $a$ . Comme  $\delta$  est supérieur à  $\epsilon$ , la boule  $B(a, \epsilon)$  est contenue dans  $U_\Sigma = U - \Sigma$  et son bord  $\partial(B(a, \epsilon))$  ne contient pas de points de  $K_b$  car  $f$  est  $\epsilon$ -régulière, ce qui implique que  $C_a$  est contenue dans  $B(a, \epsilon)$ .

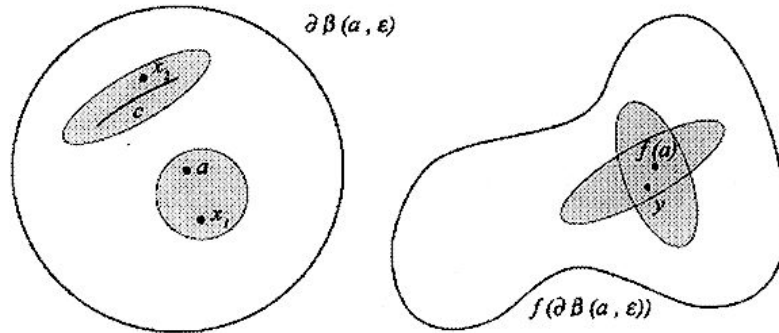
Montrons maintenant que les points standard de  $K_b$  sont isolés, ce qui implique, comme  $K_b$  est standard que c'est vrai pour tous les points de  $K_b$ , et alors  $K_b$  est constitué d'un nombre fini de points car compact.

Soit donc  $a$  un point standard de  $K_b$ , le diamètre de la composante connexe  $C_a$  est un nombre standard inférieur à  $\epsilon$ , par conséquent il est égal à 0, ce qui implique  $C_a = \{a\}$ .

Montrons par l'absurde que  $C_a = \{a\}$  est la seule composante connexe de  $K_b$  contenue dans  $B(a, \epsilon)$ .

Supposons donc qu'il existe plus d'une composante connexe de  $K_b$  contenue dans  $B(a, \epsilon)$

$$K_b \cap B(a, \epsilon) \supset C_a \cup C \quad \text{avec } C_a \text{ et } C \text{ compacts disjoints.}$$



Il existe alors deux ouverts disjoints  $V_a$  et  $V$  contenus dans  $B(a, \epsilon)$  et contenant respectivement  $C_a$  et  $C$ .

Comme  $f$  est ouverte l'intersection,  $W'_b = f(V_a) \cap f(V)$ , est un ouvert contenant  $b$ . D'autre part la composante connexe  $W''_b$  de  $\mathbb{R}^n - f(\partial B(a, \epsilon))$  contenant  $b$  est un ouvert, par conséquent la composante connexe  $W_b$  de  $W'_b \cap W''_b$  contenant  $b$  est un voisinage ouvert de  $b$ . Soit  $\rho$  assez petit pour que la boule  $B(b, \rho)$  soit contenue dans  $W_b$  et  $\rho/\epsilon$  infiniment petit.

Comme  $f$  est lipschitzienne, le complémentaire de l'ensemble des valeurs régulières de  $f$ , c'est à dire des points  $y$  dont l'image réciproque  $f^{-1}(y)$  ne contient que points  $x$  de  $U^d$  où  $f$  est dérivable est de mesure nulle (H. Federer), il existe donc une valeur régulière  $y$  contenue dans  $B(b, \rho)$ .

Si  $x$  appartient à  $\partial B(a, \epsilon)$  on ne peut avoir  $f(x) = y$  car on aurait à la fois

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{\epsilon} \leq \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \frac{|x - a|}{\epsilon} = @.$$

L'ensemble  $K_y^\epsilon = f^{-1}(y) \cap \overline{B(a, \epsilon)}$  est un compact constitué de points isolés car  $y$  est une valeur régulière.

Comme  $y$  appartient à la fois à  $f(V_a)$  et  $f(V)$  et que ces deux ouverts ne se coupent pas, on a

$$K_y^\varepsilon = \{x_1, \dots, x_k\} \quad \text{avec} \quad k \geq 2$$

et on aboutit à la suite d'égalités contradictoires

$$1 = |\text{degré}(f, B(a, \varepsilon), f(a))| = |\text{degré}(f, B(a, \varepsilon), y)| = k \geq 2$$

car l'index  $i(f, x_l)$  est le même et vaut  $\pm 1$  puisque les points  $x_1, \dots, x_k$  sont des points de  $U^d$ .

4. — Si  $C'$  est la composante connexe de  $U_\Sigma$  contenant  $a$  et  $C''$  celle de  $V_\Sigma$  contenant  $f(a)$  on a  $f(C') = C''$ .

Soit  $V$  un ouvert dont l'adhérence est contenue dans  $\bar{U}$ .

Comme  $f$  est continue et  $\bar{V}$  compact, on a  $f(\bar{V}) = \overline{f(V)}$ , et comme  $f$  est ouverte  $f(V)$  est contenu dans l'intérieur de  $f(\bar{V})$ , on en déduit que

$$\partial(f(\bar{V})) \subset f(\bar{V}) - f(V) \subset f(\partial V).$$

Mais  $C'$  est ouverte, le bord de son image  $\partial(f(C'))$  est contenu dans l'image de son bord  $f(\partial C')$ , elle-même contenue dans,  $f(\partial U)$ , l'image du bord de  $U$ , ce qui implique  $f(C') = C''$ .

5. — Conclusion de la démonstration du lemme 6.

Nous allons montrer que  $f|_{C'}$  est un revêtement de  $C''$  sur  $C''$  dans le cas où le point  $a$  déterminant  $C'$  et  $C''$  est standard, ce qui donne la conclusion en général puisque  $f$  et  $U$  sont standard.

Un point  $x$  de  $U_\Sigma$  est isolé, on peut donc définir son index  $i(f, x)$ . Comme  $C'$  est connexe par arc, un raisonnement analogue à celui fait pour les points de  $U^d$  montre que  $i(f, x)$  est le même pour tous les points  $x$  de  $C'$ .

Mais alors si  $y$  et  $z$  sont deux points distincts de  $C''$ , on a, en désignant par  $N(y)$  et  $N(z)$  le nombre de points de  $f^{-1}(y)$  et  $f^{-1}(z)$  contenus dans  $C'$

$$N(y) = |\text{degré}(f, C', y)| = |\text{degré}(f, C', z)| = N(z).$$

Désignons par  $k$  ce nombre, alors si  $x$  appartient à  $C'$  on a

$$f^{-1}(f(x)) \cap C' = \{x = x_1, \dots, x_k\}.$$

Soient  $U_1, \dots, U_k$  des voisinages ouverts disjoints de  $x_1, \dots, x_k$  contenus dans  $C'$ . L'application  $f$  est ouverte, l'intersection  $f(U_1) \cap \dots \cap f(U_k)$  est un ouvert ainsi que la composante connexe  $W_{f(x)}$  contenant  $f(x)$  de cette intersection. Désignons par  $W_1$  l'intersection de  $f^{-1}(W_{f(x)})$  avec  $U_1$ . L'application  $f$  est continue ouverte et surjective de  $W_1$  sur  $W_{f(x)}$ . Elle est aussi injective, car s'il existait deux points distincts  $x'$  et  $x''$  de  $W_1$  vérifiant  $f(x') = f(x'')$  on aurait  $N(f(x')) \geq k + 1$ , ce qui est contradictoire.

L'application  $f$  est donc un homéomorphisme de  $W_1$  sur  $W_{f(x)}$ . Mais une application qui est un homéomorphisme local et dont le nombre  $k$  de points de  $f^{-1}(y)$  est constant est un revêtement.

### Démonstration du théorème 1.

Si le groupe fondamental  $\pi_1(C'')$  est trivial, le revêtement  $f|_{C'}$  est trivial et  $f$  est un homéomorphisme de  $C'$  sur  $C''$ .

Dans le cas de la dimension 2, comme le complémentaire dans  $\mathbb{R}^2$  d'une courbe de Jordan a deux composantes connexes, l'une bornée homéomorphe à une boule, l'autre non bornée, on peut montrer que  $\pi_1(C'')$  est trivial si  $\overline{f(U)}$  est homéomorphe à une boule, ce qui est le cas de l'application  $f$  construite dans le lemme 3.

1. — Une application standard  $\epsilon$ -régulière d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est localement un homéomorphisme bilipschitzien.

Il suffit de montrer que  $f$  est un homéomorphisme bilipschitzien au voisinage des points standard de  $U$ .

Si  $a$  est un point standard de  $U$ , il existe (par transfert)  $r$  standard tel que

$$B(a, r) \subset U \quad \text{et} \quad \partial B(a, r) \cap f^{-1}(f(a)) = \emptyset.$$

Mais alors, la démonstration précédente implique qu'il existe un ouvert standard connexe  $C'$  de  $B(a, r)$  contenant  $a$  et un ouvert standard connexe  $C''$  contenant  $f(a)$  tels que  $f$  soit un revêtement de  $C'$  sur  $C''$ . Si l'on prend  $r'$  standard tel que  $\overline{B(a, r')}$  soit contenue dans  $C'$  et que  $f$  soit un homéomorphisme sur son image, puis  $r''$  standard tel que  $\overline{B(f(a), r'')}$  soit contenue dans  $f(B(a, r'))$ , l'application  $f$  est bilipschitzienne de  $V = B(a, r') \cap f^{-1}(B(f(a), r''))$  sur son image  $f(V)$  d'après les lemmes 1 et 2.

2. — Pour que l'application  $f$  standard  $\epsilon$ -régulière de  $\overline{U}$ , adhérence d'un ouvert  $U$  convexe borné soit un homéomorphisme global bilipschitzien il suffit que les deux conditions supplémentaires suivantes soient vérifiées

*l'image  $f(U)$  est convexe et le bord de l'image  $\partial f(U)$  est l'image du bord  $f(\partial U)$ .*

Les hypothèses faites impliquent que  $f(U) = V_\Sigma$  et que  $\pi_1(V_\Sigma)$  trivial, ce qui entraîne que  $f$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

Mais alors un raisonnement analogue à celui du lemme 2 implique que pour deux points  $x'$  et  $x''$  standard de  $\overline{U}$

$$f(x') = f(x'') \implies x' = x''.$$

L'application  $f$  continue injective du compact  $\overline{U}$  est un homéomorphisme, bilipschitzien à cause des lemmes 1 et 2.

**Remarque.** — On déduit du théorème 1 la version suivante du théorème des fonctions implicites :

Soit  $f(x, y)$  une fonction standard d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$  et  $(a, b)$  un point standard de  $U$ . Si la fonction  $f$  est  $\epsilon$ -régulière en la deuxième variable  $y$  et vérifie

$$\forall (M, N) \in \overline{U} \times \overline{U} \quad |M - N| = \mathcal{L}\epsilon \implies |f(M) - f(N)| = \mathcal{L}\epsilon,$$

et  $f(a, b) = 0$ ,

alors il existe une et une seule fonction lipschitzienne  $\phi$  définie au voisinage de  $a$  telle que  $\phi(a) = b$  et  $f(x, \phi(x)) = 0$ .

### 3 Approximations PL (affines par morceaux).

Nous allons généraliser la démarche faite pour la démonstration du théorème des fonctions implicites discret : chercher des hypothèses qui, quoique portant uniquement sur la tabulation de la fonction, permettent de démontrer des propriétés de la fonction si elle est standard ou de son ombre dans le cas général.

Pour ce faire nous commencerons par définir la notion d'approximation  $\varepsilon$ -PL qui généralise à une fonction de plusieurs variables la notion de tabulation à  $\varepsilon$ -près et nous en déduisons une caractérisation des approximations  $\varepsilon$ -PL de difféomorphismes.

Puis nous nous intéresserons aux applications localement bilipschitziennes. Nous commencerons par donner une condition géométrique suffisante pour qu'une application PL soit localement bilipschitzienne que nous comparerons à celle, analytique, figurant dans l'article de F. John "On Quasi-Isometric Mapping I" et nous en déduisons une condition suffisante pour que l'ombre d'une application  $\varepsilon$ -PL soit localement bilipschitzienne.

Pour finir nous adapterons la démonstration de l'article de A. Mas Colell "Homeomorphism of compact convex sets and the jacobian matrix" pour montrer que des hypothèses discrètes suffisent pour que l'ombre d'une application  $\varepsilon$ -PL soit un homéomorphisme global.

#### 1. — Approximations $\varepsilon$ -PL

**Définition 3.** — Soit  $\mathcal{K}$  un polytope de  $R^n$ . Une collection finie  $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$  de sous ensembles de  $\mathcal{K}$  sera dite triangulation de  $\mathcal{K}$  de sommets  $\mathcal{K}_0$  si

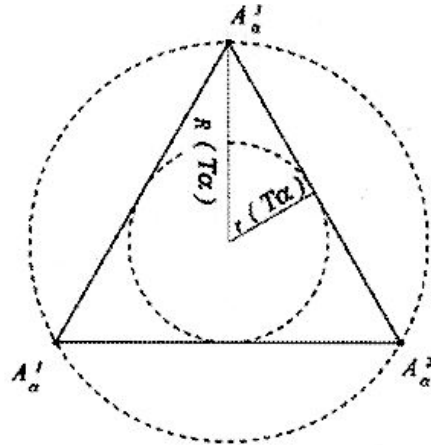
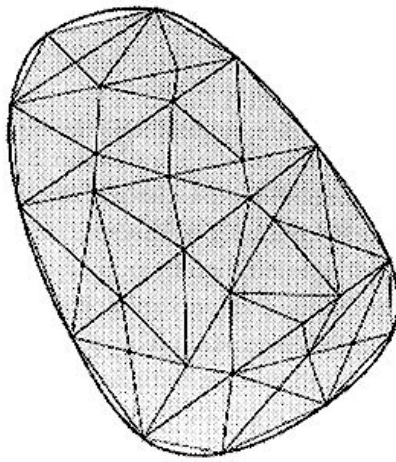
1. Les éléments  $T_\alpha$  sont des  $n$ -simplexes.

On désignera par  $\mathcal{K}_0$  l'ensemble de leurs sommets.

2. Chaque  $x$  de  $\mathcal{K}$  appartient à au moins un simplexe  $T_\alpha$ .

3. Si deux simplexes  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  se coupent, c'est selon une  $(n - 1)$ -face. On désigne par  $R(T_\alpha)$  le rayon de la sphère circonscrite à  $T_\alpha$  et par  $r(T_\alpha)$  le rayon de la sphère inscrite dans  $T_\alpha$ .

On dira que la triangulation est  $\epsilon$ -régulière si  
 $R(T_\alpha) = @ \epsilon \quad r(T_\alpha) = @ \epsilon.$



*cas d'un triangle équilatéral  
 (optimal, c'est le plus "rond")  
 (le rapport  $R/r$  est le plus petit)*

**Définition 4.** — On dira qu'une triangulation  $\epsilon$ -régulière d'un polytope  $\mathcal{K}$  est une triangulation  $\epsilon$ -régulière d'un ouvert  $U$  convexe borné si  $\mathcal{K}$  est contenu dans  $\bar{U}$  et si  $d(\partial U, \partial \mathcal{K}) = \epsilon \emptyset$ .

**Définition 5.** — Soient  $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$  une triangulation  $\epsilon$ -régulière d'un ouvert  $U$  convexe borné de  $R^n$ ,  $f$  une application de  $\bar{U}$  dans  $R^n$ .  
 L'application PL (affine par morceaux, c'est à dire affine sur chaque simplexe  $T_\alpha$ )  $\hat{f}$  sera dite approximation  $\epsilon$ -PL de  $f$ , si quel que soit le sommet  $A$  de  $\mathcal{K}_0$  on a  
 $|f(A) - \hat{f}(A)| = \epsilon \emptyset$ .

L'objet de ce paragraphe est d'établir :

**Proposition 2.** — Si  $U$  est un ouvert convexe borné standard de bord  $\partial U$  de classe  $C^1$ , alors il existe une triangulation  $\epsilon$ -régulière de  $U$ .

Cette proposition résulte des deux lemmes qui vont suivre.

**Lemme 7.** — Si  $L$  est une application linéaire standard inversible et si  $L'$  est une application linéaire vérifiant  $|L'| = \emptyset$ , alors l'image par  $L + L'$  d'un simplexe  $\epsilon$ -régulier est un simplexe  $\epsilon$ -régulier et, réciproquement, si l'image par une application linéaire  $\mathcal{L}$  d'un simplexe  $\epsilon$ -régulier est un simplexe  $\epsilon$ -régulier alors  $\mathcal{L} = L + L'$  avec  $L$  linéaire standard inversible et  $L'$  linéaire vérifiant  $|L'| = \emptyset$ .

Démonstration.

Comme  $|L^{-1}L'| < 1$ , l'application linéaire  $L + L' = L(I + L^{-1}L')$  est inversible. Désignons par  $T$  le simplexe de départ, par  $\mathcal{T}$  son image par  $L + L'$ , par  $d(\mathcal{T})$  et  $\delta(\mathcal{T})$  la largeur minimum et le diamètre de  $\mathcal{T}$ .

On a

$$d(\mathcal{T}) \geq r(T) \inf_{|\vec{u}|=1} |(L + L')\vec{u}| = \frac{r(T)}{|(L + L')^{-1}|} \geq \frac{r(T)}{2|L^{-1}|}.$$

$$\delta(\mathcal{T}) = |z' - z''| = |(L + L')((L + L')^{-1}z' - (L + L')^{-1}z'')| \leq |L + L'| 2R(\mathcal{T}).$$

Les inégalités (M. Berger, géométrie T.3)

$$R(\mathcal{T}) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} \delta(\mathcal{T})$$

$$\text{et } r(\mathcal{T}) \geq c(n) d(\mathcal{T}) \quad \text{avec } c(n) = \begin{cases} \frac{n}{2\sqrt{n}} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{\sqrt{n+2}}{2(n+1)} & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

impliquent

$$\frac{c(n) r(\mathcal{T})}{2 |L^{-1}|} \leq d(\mathcal{T}) c(n) \leq r(\mathcal{T}) \leq R(\mathcal{T}) \leq \delta(\mathcal{T}) \leq 2 |L| 2R(\mathcal{T}).$$

On a donc bien

$$r(\mathcal{T}) = @\epsilon = R(\mathcal{T}) \implies r(\mathcal{T}) = @\epsilon = R(\mathcal{T}).$$

Réciproquement, comme l'image  $\mathcal{T}$  par  $\mathcal{L}$  du simplexe  $T$  est un simplexe, l'application  $\mathcal{L}$  est inversible.

D'autre part, on a, pour  $|u| = 1$ , les inégalités

$$|2r(\mathcal{T})\mathcal{L}u| \leq 2R(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad |2r(\mathcal{T})\mathcal{L}^{-1}u| \leq 2R(\mathcal{T})$$

qui impliquent

$$|\mathcal{L}| \leq \frac{R(\mathcal{T})}{r(\mathcal{T})} = @ \quad \text{et} \quad |\mathcal{L}^{-1}| \leq \frac{R(\mathcal{T})}{r(\mathcal{T})} = @,$$

ce qui entraîne que l'ombre  $L$  de  $\mathcal{L}$  existe et est inversible.

**Lemme 8.** — Soient  $T_\alpha$  un simplexe  $\varepsilon$ -régulier presque standard (i.e. pour un point donc pour tout point  $x \in T_\alpha$ , l'ombre  ${}^o x$  existe) et  $\hat{f}$  une approximation  $\varepsilon$ -PL dans  $T_\alpha$  d'une application  $f$  de classe  $\mathcal{S}^1$ , alors on a

$$D\hat{f} = L + L' \quad \text{avec } L = Df_{{}^o x} \quad \text{et } L' = \emptyset.$$

Démonstration.

Soient  $A_1, \dots, A_{n+1}$  les sommets de  $T_\alpha$  et  $\lambda_i(x)$  les coordonnées barycentriques ( $x = \sum_i \lambda_i(x) A_i$ ).

Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{S}^1$ , quels que soient les points  $x, y$  vérifiant  ${}^o x = {}^o y$  on a

$$f(x) - f(y) = L(x - y) + e(x, y) \quad \text{avec} \quad \frac{|e(x, y)|}{|x - y|} = \emptyset.$$

D'autre part, si  $z'$  et  $z''$  sont deux points diamétralement opposés sur la sphère inscrite dans  $T_\alpha$ , on a

$$1 \geq |\lambda_i(z') - \lambda_i(z'')| = 2r(T_\alpha) |D\lambda_i \vec{u}| \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{z' - z''}{|z' - z''|}$$

ce qui implique  $|D\lambda_i| \leq \frac{1}{2r(T)}$ .

Si  $\hat{f}(A_i) = B_i$ , on obtient,  $\forall x, y \in T_\alpha$ , en désignant par  $G$  le barycentre de  $T_\alpha$ ,

$$\hat{f}(x) - \hat{f}(y) = L(x - y) + \sum_i \left( (D\lambda_i)(x - y) \right) (B_i - f(A_i) + e(G, A_i))$$

ce qui nous donne le résultat annoncé

$$D\hat{f} = L + L' \quad \text{avec} \quad |L'| \leq \frac{n+1}{2r(T)} (\epsilon \emptyset + 2R(T)\emptyset).$$

## Démonstration de la proposition 2

Une homothétie et une translation standard permettent de se ramener au cas où le cube standard  $C = [-1, +1]^n$  est contenu dans  $U$ .

Soit  $\omega$  l'entier infiniment grand égal à la partie entière de  $\frac{1}{\epsilon}$ . On lui associe "la triangulation canonique" de  $C$  dont les sommets sont les points  $(\frac{i_1}{\omega} \dots \frac{i_n}{\omega})$  les entiers  $i_k$  vérifiant  $0 \leq |i_k| \leq \omega$ .

Comme dans le lemme 4, on construit un homéomorphisme  $f$  du cube  $C$  sur  $\bar{U}$  en posant

$$\overrightarrow{Of(M)} = \frac{r(M)}{(1 - \varphi(2 | M |_\infty - 1)) + \frac{\varphi(2 | M |_\infty - 1)}{R(M)}} \vec{u},$$

la norme  $|| \cdot ||_\infty$  étant celle du sup.

Soit  $\hat{f}$  l'approximation  $\epsilon$ -PL de  $f$  vérifiant  $\hat{f}(A) = f(A)$  aux sommets de la triangulation canonique de  $C$  et  $\mathcal{K} = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha$ , la triangulation image par  $\hat{f}$  de "la triangulation canonique" de  $C$ . L'application standard  $f$  étant  $C^\infty$  par morceaux, c'est une triangulation  $\epsilon$ -régulière de  $\mathcal{K}$ .

Soit  $x$  un point du bord  $\partial U$  de  $U$ . Désignons par  $\overrightarrow{n(x)}$  la normale unitaire au plan tangent à  $\partial U$  en  $x$ . On a  $\frac{\overrightarrow{0x}}{|\overrightarrow{0x}|} \cdot \overrightarrow{n(x)} = @ > 0$ .

Soient  $T_\alpha = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$  le simplexe dont la face  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , située sur le bord de  $\mathcal{K}$  est coupée en  $x'$  par  $\overrightarrow{0x}$ ,  $H$  l'hyperplan passant par  $\{A_1, \dots, A_n\}$  et  $\vec{\nu}$  la normale à  $H$  orientée dans le même sens que  $\overrightarrow{n(x)}$ . On a  ${}^o\vec{\nu} = \overrightarrow{n({}^o x)}$ , désignons par  $\vec{\mathbf{n}}$  ce vecteur.

Soient  $x''$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $H$  et  $\theta$  l'angle que fait  $\overrightarrow{x'x}$  avec  $\vec{\nu}$  dans le 2-plan passant par  $x, x', x''$ . On a  $\cos(\theta) = @$ .

Si l'équation du bord  $\partial U$  au voisinage de  $x$  est  $u(x) = 0$ , on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned} 0 &= u(x) \\ &= u(A_1) + \overrightarrow{gradu_{A_1}} \cdot \overrightarrow{A_1 x'} + |\overrightarrow{A_1 x'}| \emptyset + \overrightarrow{gradu_{x'}} \cdot \overrightarrow{x'x} + |\overrightarrow{x'x}| \emptyset \\ &= (k + \emptyset)(\vec{\mathbf{n}} + \vec{\emptyset}) \cdot \overrightarrow{A_1 x'} + |\overrightarrow{A_1 x'}| \emptyset + (k + \emptyset)(\vec{\mathbf{n}} + \vec{\emptyset}) \cdot \overrightarrow{x'x} + |\overrightarrow{x'x}| \emptyset \\ &\quad \text{avec } k = |\overrightarrow{gradu_{o_x}}| = @. \end{aligned}$$



Ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= |\overrightarrow{A_1 x'}| \emptyset + \overrightarrow{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{x'x} + |\overrightarrow{x'x}| \emptyset \\ &= \mathcal{L} \varepsilon \emptyset + |\overrightarrow{x'x}| (\cos \theta + \emptyset), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(x, \mathcal{K}) \leq |\overrightarrow{x'x}| = \varepsilon \emptyset,$$

soit, puisque  $x$  est un point quelconque du bord,

$$d(\partial \mathcal{K}, \partial U) = \varepsilon \emptyset.$$

**Proposition 3.** — Soient  $f$  une application standard de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un ouvert contenant  $\overline{U}$ , l'adhérence d'un ouvert standard convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\hat{f}$  une approximation  $\varepsilon$ -PL de  $f$  relativement à une triangulation  $\varepsilon$ -régulière de  $U$ .

Alors  $f$  est un difféomorphisme dans  $U$  si et seulement si  $\hat{f}$  est un homéomorphisme transformant chaque simplexe  $\varepsilon$ -régulier  $T_\alpha$  en un simplexe  $\varepsilon$ -régulier  $\hat{f}(T_\alpha)$ .

Démonstration

**0.-** Il est naturel qu'aussi bien dans le sens de  $f$  vers  $\hat{f}$  que dans le sens de  $\hat{f}$  vers  $f$  il faille une condition supplémentaire disant qu'à une échelle infinitésimale la linéarisée de  $f$  est bijective.

En effet, si l'on prend pour  $f$  l'application de  $[-1, 1]$  dans  $[-1, 1]$  qui à  $x$  fait correspondre  $x^3$ , on peut trouver des approximations  $\varepsilon$ -PL de  $f$  avec  $\varepsilon = \emptyset$  qui ne sont pas des homéomorphismes mais justement  $f$  n'est pas un difféomorphisme.

Si l'on désigne par  $\hat{f}_\alpha$  la restriction de  $\hat{f}$  à  $T_\alpha$  on a, en désignant par  $a$  l'ombre des points de  $T_\alpha$

d'après le lemme 8

$$D\hat{f}_\alpha = Df_a + L' \text{ avec } |L'| = \emptyset$$

et d'après le lemme 7

$$D\hat{f}_\alpha = L_\alpha + L'_\alpha \text{ avec } |L'_\alpha| = \emptyset$$

et  $L_\alpha$  standard inversible équivaut à ce que l'image  $\hat{f}_\alpha(T_\alpha)$  soit un simplexe  $\varepsilon$ -régulier.

La condition sur l'image des simplexes par  $\hat{f}$  équivaut donc à la condition "  $f$  est une immersion".

**1.-** Si  $f$  est un difféomorphisme alors  $\hat{f}$  est un homéomorphisme.

Supposons qu'il existe deux points  $x \neq y$  tels que  $x = y$ .

Premier cas :  $|x - y| = \emptyset$

Comme  $\mathcal{K}$  est convexe, le segment  $[x, y]$  est entièrement situé dans  $\mathcal{K}$ .

Soient  $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ , des points de  $[x, y]$  le vecteur  $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$  étant orienté dans le même sens que  $\overrightarrow{xy}$  et entièrement situé dans un simplexe  $T_{\alpha_i}$  et  $L = Df_a$

avec  ${}^o x = a = {}^o y$ . On a alors

$$\begin{aligned}
 0 &= \hat{f}(x) - \hat{f}(y) = \sum_{i=0}^{i=k-1} (\hat{f}(x_{i+1}) - \hat{f}(x_i)) \\
 &= \sum_{i=0}^{i=k-1} ((L + L'_{\alpha_i})(x_{i+1} - x_i)) \\
 &= L(x - y) + \sum_{i=0}^{i=k-1} (L'_{\alpha_i}(x_{i+1} - x_i)) \\
 &\text{avec } |L'_{\alpha_i}| = \emptyset,
 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$|y - x| \leq |L^{-1}| \sup_i |L'_{\alpha_i}| |y - x| = \textcircled{\emptyset} |y - x|,$$

ce qui est impossible.

Deuxième cas :  $|y - x| = \textcircled{\emptyset}$ .

On aurait

$$f({}^o x) = {}^o f(x) = {}^o \hat{f}(x) = {}^o \hat{f}(y) = {}^o f(y) = f({}^o y) \text{ avec } {}^o x \neq {}^o y,$$

ce qui est impossible si  $f$  est un homéomorphisme.

**2.-** Si  $\hat{f}$  est un homéomorphisme alors  $f$  est un difféomorphisme.

Comme  $f$  est une immersion, c'est un homéomorphisme local, pour montrer que c'est un homéomorphisme il suffit de montrer qu'elle est injective c'est-à-dire

$$\forall^s (x', x'') \quad f(x') = f(x'') \implies x' = x''.$$

Supposons donc qu'il existe deux points standard  $x'$  et  $x''$  vérifiant  $f(x') = f(x'')$ .

Comme  $f$  est un homéomorphisme local standard, il existe une boule ouverte  $B(x', 4r)$  telle que la restriction de  $f$  à cette boule soit un homéomorphisme.

Si  $z \in T_\alpha$  est un point de  $\mathcal{K}$  on a, en désignant par  $A_\alpha$  un sommet de  $T_\alpha$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(z) &= \hat{f}(A_\alpha) + Df_{o_z}(z - A_\alpha) + |z - A_\alpha| \emptyset \\
 {}^o \hat{f}(A_\alpha) &= {}^o f(A_\alpha) = f({}^o A_\alpha) = f({}^o z)
 \end{aligned}$$

ce qui implique  ${}^o \hat{f}(z) = f({}^o z)$ .

L'image  $f(S(x', 3r))$  de la sphère  $S(x', 3r)$  est une sphère topologique séparant  $\mathbb{R}^n$  en deux composantes connexes et ne coupe pas l'image  $\hat{f}(S(x', 2r))$  car dans le cas contraire on aurait

$$f({}^o z') = {}^o \hat{f}(z') = {}^o f(z'') = f({}^o z'') \text{ avec } z' \in \overline{B(x', 2r)} \text{ et } z'' \in S(x', 3r)$$

ce qui est impossible car la restriction de  $f$  à  $B(x', 4r)$  est un homéomorphisme.

On a donc

$$\hat{f}(\overline{B(x', 2r)}) \subset f(B(x', 3r)).$$

En échangeant les rôles de  $f$  et  $\hat{f}$ , on montre

$$f(\overline{B(x', r)}) \subset \hat{f}(B(x', 2r)).$$

En prenant  $\rho$  standard tel  $B(f(x'), \rho)$  soit contenue dans  $f(B(x', r))$ , on obtient la suite d'inclusions

$$B(f(x'), \rho) \subset \hat{f}(\overline{B(x', 2r)}) \subset f(B(x', 3r)).$$

Comme  ${}^{\circ}\hat{f}(x') = f(x') = f(x'') = {}^{\circ}\hat{f}(x'')$ , les points  $y' = \hat{f}(x')$  et  $y'' = \hat{f}(x'')$  sont situés dans la boule  $B(f(x'), \rho)$ , le segment  $[y', y'']$  est lui aussi entièrement situé dans cette boule.

L'intersection du segment  $[y', y'']$  avec  $\hat{f}(T_{\alpha})$  est soit vide soit un segment  $[y'_{\alpha}, y''_{\alpha}]$ . Si l'on oriente le segment  $[y', y'']$  de  $y'$  vers  $y''$ , il existe une suite croissante  $y_0 = y' \leq y_1 \leq \dots \leq y_N = y''$  de points de ce segment telle que le segment  $[y_i, y_{i+1}]$  soit l'intersection de  $[y', y'']$  avec le simplexe  $\hat{f}(T_{\alpha_i})$ .

On a alors, en posant  $\hat{f}_{\alpha_i} = \hat{f}|_{T_{\alpha_i}}$ ,  $L_i = Df_{\circ A_i}$  avec  $A_i$  sommet de  $T_{\alpha_i}$  et  $x_i = \hat{f}^{-1}(y_i)$

$$\begin{aligned} y_{i+1} - y_i &= \hat{f}(x_{i+1}) - \hat{f}(x_i) = D\hat{f}_{\alpha_i}(x_{i+1} - x_i) \\ &= (L_i + L'_{\alpha_i})(x_{i+1} - x_i) \quad \text{avec } |L'_{\alpha_i}| = \emptyset \end{aligned}$$

ce qui donne

$$x_{i+1} - x_i = L_i^{-1}(I + L'_{\alpha_i}L_i^{-1})^{-1}(y_{i+1} - y_i)$$

et donc

$$|x_{i+1} - x_i| \leq |L_i^{-1}| \frac{1}{1 - |L_i^{-1}| |L'_{\alpha_i}|} |y_{i+1} - y_i| \leq 2 |L_i^{-1}| |y_{i+1} - y_i|.$$

Si l'on désigne par  $k$  la plus grande des normes  $|L_1^{-1}|, \dots, |L_N^{-1}|$ , on obtient la suite d'inégalités

$$|x'' - x'| \leq \sum |x_{i+1} - x_i| \leq 2k \sum |y_{i+1} - y_i| = 2k |y'' - y'| = \mathcal{L}\emptyset$$

ce qui implique  $x'' = x'$  puisque  $x''$  et  $x'$  sont standard. ■

## 2. — Sur les applications "quasi isométriques" selon F. John.

Dans cette partie la norme utilisée est la norme euclidienne.

**Définition 6.** — Soit  $f$  une application d'un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$D_x^+ f = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \quad D_x^- f = \liminf_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

Si  $f$  est une application affine,  $f(x) = Lx + b$ , on a

$$D_x^+ f = |L| \quad D_x^- f = \begin{cases} 0 & \text{si } L \text{ n'est pas inversible} \\ \frac{1}{|L^{-1}|} & \text{si } L \text{ est inversible.} \end{cases}$$

Par conséquent, si  $f$  est une application  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 1$  d'un voisinage de l'adhérence  $\bar{U}$  d'un ouvert  $U$  borné de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $\det Df_x \neq 0$  de sorte que  $f$  est un homéomorphisme local, on a, en posant

$$m = \inf_{x \in \bar{U}} \frac{1}{|(Df_x)^{-1}|} \quad M = \sup_{x \in \bar{U}} |Df_x|,$$

$$0 < m \leq D_x^- f \leq D_x^+ f \leq M < +\infty.$$

La proposition suivante de F. John précise les propriétés d'un tel homéomorphisme local, et nous établirons -théorème 2- une extension de cette propriété avec des hypothèses discrètes.

**Proposition 4 (Theorem III de F John).** — Soit  $f$  un homéomorphisme local d'une boule  $B(a, r)$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . S'il existe deux constantes  $m$  et  $M$  telles que l'on ait

$$0 < m \leq D_x^- f \leq D_x^+ f \leq M < +\infty,$$

alors  $f$  est un homéomorphisme bilipschitzien de la boule  $B(a, \frac{m}{M}r)$  sur son image vérifiant

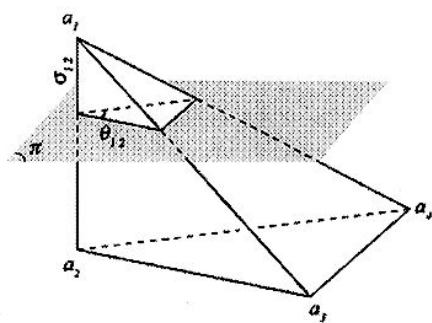
$$m |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|.$$

Le rapport  $\frac{m}{M}$  peut être très petit, prendre  $f(z) = e^z$  et la boule  $B(0, 2\pi)$ , mais la proposition 4 affirme seulement qu'il existe une boule centrée en  $a$  de rayon au moins  $\frac{m}{M}r$  où  $f$  est injective et ne donne pas le plus grand domaine où  $f$  est injective.

Dans le cas  $\mathcal{C}^1$ , A. Ostrowski avait démontré le résultat une vingtaine d'années auparavant.

**Proposition 5.** — Une application PL  $f$  d'un polytope triangulé  $\mathcal{K} = \cup_{\alpha \in A} T_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  qui vérifie les deux conditions suivantes

1. l'image d'un simplexe est un simplexe et les images de deux simplexes adjacents sont deux simplexes adjacents,
  2.  $f$  ne double pas les angles,
- est un homéomorphisme local dans l'ouvert  $U$ , intérieur de  $\mathcal{K}$ .



Précisons ce que l'on entend par angles et doubler les angles d'un simplexe  $T_\alpha$ .

Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux  $(n-1)$ -faces de  $T_\alpha$  se coupant selon la  $(n-2)$ -face  $\sigma_{12}$ , l'angle  $\theta_{12}$  de  $T_\alpha$  est l'angle que font les demi-droites traces de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  dans le 2- plan orthogonal à  $\sigma_{12}$ .

Si  $\mathcal{T}_\alpha$  est l'image par  $f$  de  $T_\alpha$ , on désigne par  $\theta'_{12}$  l'angle que font les demi-droites traces de  $f(\sigma_1)$  et  $f(\sigma_2)$  dans le 2- plan orthogonal à  $f(\sigma_{12})$ , on dit que  $f$  double l'angle  $\theta_{12}$  de  $T_\alpha$  si l'on a  $\theta'_{12} \geq 2\theta_{12}$ .

Cette proposition 5 a comme corollaire :

**Theorem V de F John.** — Soient  $U$  un ouvert, intérieur d'un polytope triangulé  $\mathcal{K} = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha$  et  $f$  une application PL c'est-à-dire affine par morceaux, la restriction  $f_\alpha$  de  $f$  à  $T_\alpha$  vérifie  $f_\alpha(\sum \lambda_i A_i^\alpha) = \sum \lambda_i f(A_i^\alpha)$ . Pour que  $f$  soit un homéomorphisme local dans  $U$ , il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées

$$(i) \det Df_\alpha > 0 \quad (ii) D_x^+ f_\alpha < 2D_x^- f_\alpha.$$

L'interprétation géométrique de la condition (i) est simple :

l'image d'un simplexe (de dimension  $n$ ) est un simplexe (de dimension  $n$ ) et les images de deux simplexes adjacents (ayant une face de dimension  $n - 1$  commune) sont deux simplexes adjacents.

La condition (ii) s'écrit

$$\text{cond} Df_\alpha = | Df_\alpha | | (Df_\alpha)^{-1} | < 2$$

et l'on va montrer que cela implique que "  $f$  ne double pas les angles".

### Démonstration de la proposition 5.

Comme par hypothèse  $f_\alpha = f|_{T_\alpha}$  est affine inversible, l'application  $f$  est discrète (deux points ne peuvent avoir même image que s'ils appartiennent à deux simplexes distincts) et le nombre de points de  $f^{-1}(f(x))$  est fini, inférieur ou égal au nombre  $A$  de simplexes.

De plus,  $f$  étant continue et  $\mathcal{K}$  compact,  $f$  est fermée.

Si  $n \geq 3$  on désigne par  $\mathcal{K}_{n-3}$  la réunion des faces de la triangulation de dimension inférieure ou égale à  $n - 3$  et l'on a :

$$\dim f^{-1}(f(\mathcal{K}_{n-3})) = \dim f(\mathcal{K}_{n-3}) = \dim \mathcal{K}_{n-3} = n - 3.$$

Nous allons d'abord montrer que  $f$  est un homéomorphisme au voisinage de tout point  $a$  de  $U - \mathcal{K}_{n-3}$ , puis nous en déduisons que  $f$  est aussi un homéomorphisme au voisinage des points de  $U \cap \mathcal{K}_{n-3}$ .

Soit donc  $a$  un point de  $U$ .

Si  $a$  est situé à l'intérieur d'un simplexe  $T_\alpha$ , la restriction de  $f$  à l'intérieur de  $T_\alpha$  est un homéomorphisme bilipschitzien.

Si  $a$  est situé à l'intérieur d'une  $(n-1)$ -face  $\sigma$  commune à deux simplexes  $T_\alpha$  et  $T_\beta$ , comme  $f(T_\alpha)$  et  $f(T_\beta)$  sont deux simplexes adjacents le long de la face  $f(\sigma)$ , la restriction de  $f$  à l'intérieur de la réunion  $T_\alpha \cup T_\beta$  est un homéomorphisme.

Si  $a$  est situé à l'intérieur d'une  $(n-2)$ -face  $\sigma$  commune à  $T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_k}$ , la numérotation étant choisie de façon à ce que  $T_{\alpha_{i+1}}$  ait une  $(n-1)$ -face commune avec  $T_{\alpha_i}$  et  $T_{\alpha_k}$  avec  $T_{\alpha_1}$ , on désigne par  $\theta_i$  l'angle que font les deux demi-droites, traces dans le 2-plan  $\pi$  orthogonal à  $\sigma$  en  $a$  des deux  $(n-1)$ -faces de  $T_{\alpha_i}$  ayant la  $(n-2)$ -face  $\sigma$  commune.

On a alors  $\sum \theta_i = 2\pi$ .

Si l'on désigne par  $T'_{\alpha_i}$  les simplexes images des  $T_{\alpha_i}$  et par  $\theta'_i$  l'angle que font les deux demi-droites, traces dans le 2-plan  $\pi'$  orthogonal à  $f(\sigma)$  en  $f(a)$  des

deux  $(n-1)$ -faces de  $T'_{\alpha_i}$  ayant la  $(n-2)$ -face  $f(\sigma)$  commune, l'hypothèse "les images de deux simplexes adjacents sont deux simplexes adjacents" implique

$$\sum \theta'_i = 2k\pi \quad \text{avec } k \text{ entier.}$$

Mais l'hypothèse " $f$  ne double pas les angles" implique

$$\sum \theta'_i < 2 \sum \theta_i = 4\pi,$$

on a donc

$$\sum \theta'_i = 2\pi = \sum \theta_i.$$

La restriction de  $f$  à l'intérieur de la réunion  $T_{\alpha_1} \cup \dots \cup T_{\alpha_k}$  est un homéomorphisme.

Si  $n = 2$  on a fini, sinon il faut encore examiner le cas des points de  $U \cap \mathcal{K}_{n-3}$ .

Comme  $\tilde{U} = U - \mathcal{K}_{n-3}$  est connexe, l'index  $i(f, x)$  est le même (+1 ou -1) pour tous les points  $x \in \tilde{U}$ , mettons +1.

Soit maintenant un point  $a \in U \cap \mathcal{K}_{n-3}$ ,  $\sigma$  la face contenant  $a$  dans son intérieur et  $T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_k}$  les simplexes ayant  $\sigma$  comme face.

On commence par choisir  $r$  assez petit pour que l'adhérence de la boule  $B(a, r)$  soit contenue dans la réunion  $T_{\alpha_1} \cup \dots \cup T_{\alpha_k}$ , puis  $\rho$  assez petit pour que l'adhérence de la boule  $B(f(a), \rho)$  soit contenue dans la composante connexe  $W_{f(a)}$  de  $\mathbb{R}^n - f(\partial B(a, r))$  contenant  $f(a)$ .

Comme il existe un point  $y$  qui appartient à  $(f(T_{\alpha_1}) - f(\mathcal{K}_{n-3})) \cap B(f(a), \rho)$ , on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \text{degré}(f, B(a, r), f(a)) &= \text{degré}(f, B(a, r), z) \quad \forall z \in W_{f(a)} \\ &= \text{degré}(f, B(a, r), y) = N(y) > 0, \end{aligned}$$

en désignant par  $N(y)$  le nombre de points de  $f^{-1}(y)$  contenus dans  $B(a, r)$ .

Il en résulte que l'application  $f|_{B(a, r)}$  est surjective sur  $W_{f(a)}$ , l'application  $f$  est aussi ouverte au voisinage d'un point de  $a \in U \cap \mathcal{K}_{n-3}$ .

Soit  $C'$  la composante connexe contenant  $a$  de  $f^{-1}(B(f(a), \rho)) \cap B(a, r)$ .

Comme  $f$  est continue et ouverte et que l'adhérence  $\overline{B(f(a), \rho)}$  ne coupe pas l'image du bord  $f(\partial B(a, r))$  on a

$$f\left(f^{-1}(B(f(a), \rho)) \cap \overline{B(a, r)}\right) = \overline{B(f(a), \rho)} \quad \text{et} \quad f(C') = B(f(a), \rho).$$

Posons  $W'' = B(f(a), \rho) - f(\mathcal{K}_{n-3})$  et  $W' = C' - f^{-1}(f(\mathcal{K}_{n-3}))$ .

L'ouvert  $W''$  étant connexe, l'application  $f$  est un revêtement de  $W'$  sur  $W''$  (cf. *Conclusion de la démonstration du lemme 6*) -en fait, un homéomorphisme car le groupe fondamental  $\pi_1(W'')$  est trivial.

Mais si pour un point  $z$  de  $B(f(a), \rho) \cap f(\mathcal{K}_{n-3})$  l'image réciproque  $f^{-1}(z)$  comprenait au moins deux points dans  $C'$ , comme  $f$  est continue et ouverte il

existerait un point  $y$  de  $W''$  tel que  $f^{-1}(y)$  comprenne au moins deux points dans  $W'$  ce qui est impossible.

L'application  $f$  est donc une bijection de  $C'$  sur  $B(f(a), \rho)$ , continue et ouverte, par conséquent c'est un homéomorphisme de  $C'$  sur  $B(f(a), \rho)$ .

*Montrons maintenant que, s'il existe un indice  $\alpha$  pour lequel  $f$  "double l'angle  $\theta$  de  $T_\alpha$ ", alors  $\text{cond} Df_\alpha \geq 2$ .*

Soient  $a_0, \dots, a_n$  les sommets de  $T_\alpha$  et  $\mathcal{T}_\alpha$  son image, les sommets de  $\mathcal{T}_\alpha$  étant les points  $b_0 = f(a_0), \dots, b_n = f(a_n)$ . On désigne par  $\theta$  l'angle défini par la  $(n-1)$ -face  $\sigma_{12}$  de sommets  $a_0, \dots, a_{n-2}$ , c'est-à-dire l'angle que font les faces  $\sigma_1$  de sommets  $a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$  et  $\sigma_2$  de sommets  $a_0, \dots, a_{n-2}, a_n$ .

On pose  $f_\alpha = f|_{T_\alpha}$ .

Par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt on construit une première base orthonormée  $(u_1, \dots, u_n)$  telle que les sous espaces vectoriels engendrés par  $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_i})$  et par  $(u_1, \dots, u_i)$  soient les mêmes, puis une deuxième base orthonormée  $(v_1, \dots, v_n)$  telle que les sous espaces vectoriels engendrés par  $(\overrightarrow{b_0 b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0 b_i})$  et par  $(v_1, \dots, v_i)$  soient les mêmes.

Pour simplifier, on va supposer  $a_0 = 0 = b_0$ .

On désigne par  $\pi$  le 2-plan engendré par  $u_{n-1}$  et  $u_n$  orthogonal à  $\sigma_{12}$  et par  $\pi'$  le 2-plan engendré par  $v_{n-1}$  et  $v_n$  orthogonal à  $f(\sigma_{12})$ .

L'angle  $\theta$  est l'angle que font dans  $\pi$  les deux demi-droites  $d_1$  et  $d_2$  traces de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . On désigne par  $\theta'$  l'angle que font dans  $\pi'$  les deux demi-droites  $d'_1$  et  $d'_2$  traces de  $f(\sigma_1)$  et  $f(\sigma_2)$ .

Soit  $B = (b_{ij})$  la matrice associée à  $f_\alpha$ . Comme  $B$  est inversible il existe une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice triangulaire supérieure inversible  $A = (a_{ij})$  telles que l'on ait  $B = QA$ .

Désignons par  $g$  et  $h$  les endomorphismes associés aux matrices  $Q$  et  $A$ . On a donc  $f_\alpha = g \circ h$ .

Cela implique  $\text{cond} f_\alpha = \text{cond} h$ .

D'autre part comme  $g$  est une transformation orthogonale, le plan  $g^{-1}(\pi')$  est orthogonal à  $g^{-1}(f_\alpha(\sigma))$  et l'angle que font les demi-droites  $g^{-1}(d'_1)$  et  $g^{-1}(d'_2)$  dans  $g^{-1}(\pi')$  est le même que celui de  $d'_1$  et  $d'_2$  dans  $\pi'$ .

Par conséquent, il suffit de se restreindre au cas des matrices triangulaires supérieures pour étudier la relation entre conditionnement et doublement de l'angle.

On va donc supposer que  $Q$  est l'identité.

On pose

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ 0 & a_{n, n} \end{pmatrix}$$

c'est la matrice de la composition de la restriction de  $f_\alpha$  à  $\pi$  suivie de la projection sur  $\pi'$ .

Soit  $X$  un vecteur unitaire de  $\pi$ , comme on a

$$AX = A_2X + X' \quad \text{avec } X' \text{ orthogonal à } \pi',$$

on en déduit  $|AX| \geq |A_2X|$ , ce qui implique  $|A| \geq |A_2|$ .

Soit  $Y$  un vecteur unitaire de  $\pi'$ , comme on a

$$A^{-1}Y = A_2^{-1}Y + Y' \quad \text{avec } Y' \text{ orthogonal à } \pi,$$

on en déduit  $|A^{-1}Y| \geq |A_2^{-1}Y|$ , ce qui implique  $|A^{-1}| \geq |A_2^{-1}|$ .

Il en résulte que l'on a  $\text{cond}A \geq \text{cond}A_2$ .

Comme  $\text{cond}kA_2 = \text{cond}A_2 \quad \forall k \neq 0$ , on peut supposer que l'on a

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

On a  $\text{cond}A_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ ,  $\lambda_1$  étant la plus grande et  $\lambda_2$  étant la plus petite des valeurs propres de  ${}^tA_2A_2$ . Si l'on pose  $t = 1 + a^2 + b^2$  et  $\Delta = t^2 - 4b^2$ , on a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{t + \sqrt{\Delta}}{t - \sqrt{\Delta}} \text{ et } \text{cond}A_2 < 2 \text{ équivaut à } t < \frac{5}{2} |b|, \text{ c'est-à-dire}$$

$$1 + a^2 + b^2 - \frac{5}{2} |b| < 0$$

(nous ferons la démonstration dans le cas  $b > 0$ ).

Par hypothèse  $u_{n-1}$  est le vecteur directeur de la demi-droite  $d_1$  trace dans  $\pi$  de la face  $\sigma_1 = (a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$  et  $u = \cos \theta u_{n-1} + \sin \theta u_n$  est le vecteur directeur de la demi-droite  $d_2$  trace dans  $\pi$  de la face  $\sigma_2 = (a_0, \dots, a_{n-2}, a_n)$ .

De même,  $v_{n-1}$  est le vecteur directeur de la demi-droite  $d'_1$  trace dans  $\pi'$  de la face  $f(\sigma_1) = (b_0, \dots, b_{n-2}, b_{n-1})$  et  $v = \cos \varphi v_{n-1} + \sin \varphi v_n$  est le vecteur directeur de la demi-droite  $d'_2$  trace dans  $\pi'$  de la face  $f(\sigma_2) = (b_0, \dots, b_{n-2}, b_n)$ .

Si  $f$  double l'angle c'est-à-dire si  $\varphi \geq 2\theta$ , on a

$$\varphi = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{d\theta} \geq 2\theta \quad \text{avec} \quad \frac{d\varphi}{d\theta} \geq 0,$$

ce qui implique  $\max \frac{d\varphi}{d\theta} \geq 2$ .

Mais d'après le lemme 9 qui suit ceci équivaut à  $\text{cond}A_2 \geq 2$ .

**Lemme 9.** — Soit  $b > 0$  et  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ . On pose

$$\begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Les trois conditions suivantes sont équivalentes

1.  $M = \max \frac{d\varphi}{d\theta} < 2$
2.  $\text{cond}f < 2$
3. les points  $(a, b)$  sont situés à l'intérieur du disque  $a^2 + (b - \frac{5}{4})^2 < \frac{9}{16}$  avec  $\text{cond}f = M = 2$  sur le bord du disque.

Mais le fait que  $\max \frac{d\varphi}{d\theta} = \text{cond}A > 2$  n'implique pas que  $A$  double toujours les angles, cela dépend du simplexe.



Prenons, par exemple, pour  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  dont le conditionnement est 3, si  $T$  est le simplexe de sommets  $a_0 = (0, 0)$   $a_1 = (1, 0)$   $a_2 = (0, 1)$ ,  $A$  ne double pas les angles de  $T$ ,

par contre si  $T$  est le simplexe de sommets  $a_0 = (0, 0)$   $a_1 = (1, 0.1)$   $a_2 = (1, -0.1)$ ,  $A$  double l'angle  $\widehat{a_1 a_0 a_2}$  de  $T$ .

Démonstration du lemme 9

On a

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = b \frac{1+t^2}{(1+at)^2 + b^2 t^2} = g(t) \text{ avec } t = \tan\theta.$$

Les extrema de  $g(t)$  sont atteints aux points où la dérivée

$$g'(t) = 2b \frac{at^2 - (a^2 + b^2 - 1)t - a}{((1+at)^2 + b^2 t^2)^2}$$

est nulle.

Si  $a = 0$  on a

$$M = \begin{cases} 1/b & \text{si } b \leq 1 \\ b & \text{si } b \geq 1 \end{cases}.$$

Si  $a \neq 0$  on pose  $\Delta = (a^2 + b^2 - 1)^2 + 4a^2$

$$t_1 = \frac{(a^2 + b^2 - 1) - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad t_2 = \frac{(a^2 + b^2 - 1) + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

le maximum de  $g(t)$  est atteint pour  $t = t_1$  et il est supérieur à la limite  $\frac{b}{a^2 + b^2}$  la limite de  $g(t)$  pour  $t$  tendant vers  $\pm\infty$ .

De l'égalité

$$at_1^2 - (a^2 + b^2)t_1 + t_1 - a = 0$$

on déduit

$$at_1^3 + t_1^2 = (a^2 + b^2)t_1^2 + at_1$$

puis

$$at_1^3 + t_1^2 + 1 + at_1 = (a^2 + b^2)t_1^2 + at_1 + 1 + at_1$$

et donc

$$M = g(t_1) = b \frac{t_1^2 + 1}{(at_1 + 1)^2 + b^2 t_1^2} = \frac{b}{at_1 + 1}.$$

D'autre part, comme

$$\Delta = (a^2 + b^2 - 1)^2 + 4a^2 = (a^2 + b^2 + 1)^2 + 4b^2$$

on a

$$\text{cond}A = \sqrt{\frac{(1 + a^2 + b^2) + \sqrt{\Delta}}{(1 + a^2 + b^2) - \sqrt{\Delta}}} = \frac{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)^2 - \Delta}}{(1 + a^2 + b^2) - \Delta} = \frac{2b}{(1 + a^2 + b^2) - \Delta}$$

ce qui donne puisque  $t_1 = \frac{(a^2+b^2-1)-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ,

$$\text{cond}A = \frac{2b}{2at_1 + 2} = M.$$

Mais on a vu précédemment que  $\text{cond}A$  était strictement inférieur à 2 si et seulement si le point  $(a, b)$  est à l'intérieur du disque

$$\left(1 + a^2 + b^2 - \frac{5}{2}b < 0\right) = \left(a^2 + \left(b - \frac{5}{4}\right)^2 < \frac{9}{16}\right)$$

et égal à 2 au bord de ce même disque, ce qui établit le lemme.

En passant on peut remarquer la dérivée de  $\text{cond}A$  par rapport à  $a$  est du signe de  $a$  et que le minimum 1 de  $\text{cond}A$  est atteint au point  $(0, 1)$ .

Du lemme 7 et des propositions 4 et 5 on déduit le théorème suivant :

**Théorème 2.** — Soient  $U$  un ouvert borné standard muni d'une triangulation  $\epsilon$ -régulière  $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ ,  $f_0$  une application de  $\mathcal{K}_0$  (les sommets de la triangulation) à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  prenant une valeur presque standard en un sommet et  $\hat{f}$  l'application PL définie par  $\hat{f}(a) = f_0(a)$  quel que soit le sommet  $a$  de la triangulation. Si  $\hat{f}$  vérifie les conditions suivantes

(i) l'image par  $\hat{f}$  d'un simplexe  $\epsilon$ -régulier est un simplexe  $\epsilon$ -régulier et les images de deux simplexes adjacents sont deux simplexes adjacents,

(ii)  $\hat{f}$  ne double pas les angles (hypothèse vérifiée si  $\text{cond}\hat{f} < 2$ ),

alors il existe deux constantes standard  $0 < m \leq M < \infty$  telles que, quel que soit le point  $a$  de  $U$  la fonction  $f$  ombre de  $\hat{f}$  soit un homéomorphisme de la boule  $B(a, \frac{m}{M}r)$  sur son image vérifiant

$$m |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|,$$

en désignant par  $B(a, r)$  la plus grande boule de centre  $a$  contenue dans  $U$ .

Si  $\hat{f}$  est une approximation  $\epsilon$ -PL d'une fonction standard  $g$ , on a  $f = g$ , des propriétés de la tabulation  $f_0$  de  $g$  suffisent donc pour affirmer que  $g$  est localement bilipschitzienne.

Dans le cas particulier de  $\mathbb{R}^2$  le théorème 2 s'énonce plus simplement. En effet on peut paver  $\mathbb{R}^2$  par des triangles équilatéraux de côté  $\epsilon$ . Si l'on désigne par  $\mathcal{K}_0$  l'ensemble fini des sommets de ces triangles contenus dans l'ouvert  $U$  et par  $f_0$  une application de  $\mathcal{K}_0$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  prenant une valeur presque standard en un point de  $\mathcal{K}_0$ , alors, d'après le paragraphe 7 "Remarks on Discrete Quasi-Isometric Mappings" de l'article de F. John, on a la conclusion du théorème 2 dès que  $f_0$  vérifie

$$m'\epsilon \leq |f_0(a) - f_0(b)| \leq M'\epsilon \quad \text{avec } m' = @ = M' \quad \text{et } o\left(\frac{M'}{m'}\right) < \frac{4}{\sqrt{7}},$$

quels que soient les sommets  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{K}_0$  voisins (c'est-à-dire appartenant au même triangle, un sommet a six voisins.)

Il n'y a pas de résultat analogue pour  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 3$  car il n'est pas possible de paver  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 3$  par des simplexe réguliers.

### 3. — Une version discrète des conditions d'homéomorphie globale de A.Mas-Colell

Enonçons les résultats de A.Mas-Colell.

**1.** — Soit  $\mathcal{K}$  un polytope de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction  $\mathcal{C}^1$ . Si pour tout  $x \in \mathcal{K}$  et tout sous espace  $L \subset \mathbb{R}^n$  engendré par une face de  $\mathcal{K}$  qui contient  $x$ , l'application  $\pi_L \circ Df_x : L \rightarrow L$  a un déterminant positif, alors  $f$  est un homéomorphisme.

**2.** — Soient  $\bar{U}$  l'adhérence d'un ouvert  $U$  convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  de bord  $\mathcal{C}^1$  et  $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction  $\mathcal{C}^1$ . Si pour tout  $x \in \bar{U}$  le déterminant de la dérivée est positif,  $\det Df_x > 0$ , et si pour tout  $x \in \partial U$  la restriction à  $T_x$ , l'espace tangent en  $x$  au bord  $\partial U$ , de l'application linéaire  $Df_x$  est définie positive, ( $\langle u, Df_x u \rangle > 0 \ \forall u \in T_x, u \neq 0$ ), alors  $f$  est un homéomorphisme.

Nous allons reprendre sa démarche en l'adaptant à nos hypothèses "discrètes", le passage à l'ombre remplaçant le passage au cas  $\mathcal{C}^1$  de l'énoncé 2.

**Proposition 6.** — Soient  $\mathcal{K} = \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha$  un polytope de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$  soit

une triangulation  $\varepsilon$ -régulière d'un ouvert  $U$  convexe borné standard de bord  $\mathcal{C}^1$  et  $\hat{f}$  une application PL relativement à la triangulation  $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ .

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées

- (i) l'image  $f(T_\alpha)$  d'un simplexe  $\varepsilon$ -régulier est encore un simplexe  $\varepsilon$ -régulier, les images de deux simplexe adjacents sont deux simplexe adjacents, il existe un simplexe  $T_{\alpha_0}$  tel que  $\hat{f}_{\alpha_0} = \hat{f}|_{T_{\alpha_0}}$  respecte l'orientation et, parmi tous les sommets, il en existe un dont l'image par  $f_0$  est presque standard,
- (ii) quel que soit le simplexe  $T_\alpha$  ayant une  $(n-1)$ -face  $\sigma$  située sur le bord  $\partial \mathcal{K}$  de  $\mathcal{K}$  et quel que soit le vecteur unitaire  $u$  tangent à  $\sigma$  on a  $\langle u, Df_\alpha u \rangle = @ > 0$ , alors l'ombre  $f$  de  $\hat{f}$  est un homéomorphisme de  $\bar{U}$  sur  $f(\bar{U})$ .

**Remarque.** — Si l'on part d'une application  $f$  standard et si une approximation  $\varepsilon$ -PL  $\hat{f}$  de  $f$  vérifie les hypothèses du théorème 3, alors  $f$  est un homéomorphisme. En particulier, si  $f$  est une application standard vérifiant les hypothèses de l'énoncé 2 de A. Mas-Colell, le théorème 3 constitue une démonstration de cet énoncé 2.

Démonstration.

Les hypothèses (i) entraînent que la dérivée de  $\hat{f}_\alpha = \hat{f}|_{T_\alpha}$  a pour ombre une application linéaire inversible, que  $\hat{f}$  respecte l'orientation et que l'ombre  $f$  de  $\hat{f}$  existe.

Comme A.Mas-Colell, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , désignons par  $z(x)$  le pied de  $x$ , l'unique élément de  $\mathcal{K}$  minimisant  $|z - x|$  pour  $z \in \mathcal{K}$ , et étendons  $\hat{f}$  en une application  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  en posant

$$F(x) = \hat{f}(z(x)) + x - z(x)$$

et pour  $y \in \hat{f}(\mathcal{K})$  définissons l'application  $G$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  par  $G(x) = F(x) - y$ .

Soit  $\omega$  infiniment grand, alors, pour  $x$  appartenant au bord de la boule  $B(0, \omega)$ ,

on a :

$$\begin{aligned} \langle x, G(x) \rangle &= \omega^2 - \langle x, z(x) + y - \hat{f}(z(x)) \rangle \\ &\geq \omega^2 - \omega |z(x) + y - \hat{f}(z(x))| = \omega^2 - \omega \mathcal{L} > 0 \end{aligned}$$

et alors  $G|_{\partial B(0, \omega)}$  est de degré 1.

L'image  $F(\mathcal{S})$  de l'ensemble  $\mathcal{S}$  des points où  $F$  n'est pas dérivable ne contient pas d'ouvert.

En admettant la version suivante du lemme 1 de A.Mas-Colell

"en un point  $x \notin \mathcal{S}$  on a  $\det DF_x = @ > 0$ "

on obtient, si l'ensemble  $G^{-1}(0) \cap \mathcal{S}$  est vide,

$$\sum_{x \in G^{-1}(0)} \text{signe } \det DG_x = 1$$

ce qui implique que  $G^{-1}(0) \cap B(0, \omega)$  est réduit à un point et donc que la restriction de  $F$  à l'intérieur de  $\mathcal{K}$  est bijective.

Montrons maintenant qu'en un point  $x \notin \mathcal{S}$  on a  $\det DF_x = @ > 0$

Si  $x$  est situé à l'intérieur d'un simplexe  $T_\alpha$  on a le résultat car  $\det DF_x = \det D\hat{f}_\alpha > 0$  et l'ombre de  $D\hat{f}_\alpha$  est une application linéaire inversible.

Si  $x$  n'appartient pas à  $\mathcal{S}$  et n'est pas situé à l'intérieur de  $\mathcal{K}$  le vecteur  $x - z(x)$  est perpendiculaire à une seule face  $\sigma$  de  $\mathcal{K}$ , celle qui contient  $z(x)$ . Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $(u_1, \dots, u_p)$  soit une base de  $\sigma$ .

Si  $T_\alpha$  est un simplexe ayant  $\sigma$  comme p-face et si la matrice de  $D\hat{f}_\alpha$  par rapport à cette base est  $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$  celle de  $DF_x$  est  $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ A'' & I \end{pmatrix}$  en posant

$$A' = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots p}} \text{ et } A'' = (a_{ij})_{\substack{i=p+1\dots n \\ j=1\dots p}}$$

Soit  $S^p$  la sphère de rayon 1 dans le sous espace vectoriel engendré par  $(u_1, \dots, u_p)$ , on a

$$k_\alpha = \inf_{u \in S^p} \langle u, D\hat{f}_\alpha u \rangle = @ > 0,$$

la matrice  $A'$  est définie positive, son déterminant est positif et l'on a  $\frac{1}{k_\alpha} \geq |(A')^{-1}|$ .

Mais alors on a

$$|DF_x| \leq |D\hat{f}_\alpha| + 1 \quad \text{et} \quad |(DF_x)^{-1}| \leq \frac{|D\hat{f}_\alpha| + 1}{k_\alpha},$$

l'ombre de  $DF_x$  est donc une application linéaire inversible de déterminant positif.

Mais  $\mathbb{R}^n$  est partitionné en un nombre fini de cellules à l'intérieur desquelles  $F$  est dérivable de dérivée constante : les simplexes  $T_\alpha$  et les cônes  $\mathcal{C}_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{K} \mid z(x) \in \sigma\}$  relatifs aux faces  $\sigma$  du bord de  $\mathcal{K}$ .

Il existe alors deux constantes  $m'$  appréciable positive et  $M'$  limitée telles que pour tout point  $x \notin \mathcal{S}$  on ait

$$|DF_x| \leq M' \quad \text{et} \quad |(DF_x)^{-1}| \leq \frac{1}{m'}.$$

Soit  $V$  un ouvert standard convexe borné contenant  $\bar{U}$ . L'argument de A.Mas-Colell utilisant le degré permet de montrer que  $F$  est un homéomorphisme de  $V$  sur

son image et le theorem III de F. John nous dit que, si la boule  $B(a, r)$  est contenue dans  $V$  on a, pour  $x, y$  dans  $B(a, r)$ ,

$$m' |x - y| \leq |F(x) - F(y)| \leq M' |x - y|.$$

Comme  $V$  est convexe et que  $F$  prend une valeur presque standard en un point de  $\bar{U} \subset V$ , l'ombre  ${}^oF$  de  $F$  existe, est une application lipschitzienne de constante de Lipschitz standard  $M = 2{}^oM'$ , localement un homéomorphisme bilipschitzien de constantes de Lipschitz  $m = \frac{1}{2}{}^om'$  et  $M$ . Mais alors le même argument appliqué cette fois à  ${}^oF$ , permet de montrer que  ${}^oF$  est un homéomorphisme de  $\bar{U}$  sur son image.

Dans  $\bar{U}$  l'ombre  $f$  de  $\hat{f}$  et l'ombre  ${}^oF$  de  $F$  coïncident, on a donc le résultat annoncé.

Ce résultat est à rapprocher de celui de W.S.Massey qui donne des conditions suffisantes ("regular boundary", homologie et degré  $f|_{\partial U} = \pm 1$ ) pour qu'un homéomorphisme local  $f$  d'un ouvert quelconque  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  soit un homéomorphisme global de  $U$  sur son image.

## 4 Théorème de Liouville

Un cas particulier de fonction  $\varepsilon$ -régulière est celui où l'ombre du rapport des normes  $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ , qui est appréciable dès que  $|x - y| = @\varepsilon$ , ne dépend que de l'ombre  $a$  des points  $x$  et  $y$ , hypothèse plus proche de l'hypothèse originelle de Liouville,  $|f(x) - f(y)|^2 = \frac{|x - y|^2}{p(x)^2 p(y)^2}$ , que celle que l'on fait actuellement,  $|Df_x u| = \lambda(x) |u|$ .

Dans le cas de la norme euclidienne, notre conclusion sera celle de Liouville : si la dimension est supérieure ou égale à 3, l'application  $f$  est une application de Moëbius. Dans le cas, non traité par Liouville et ses successeurs, des normes de Manhattan ( $|x|_1 = \sum |x_i|$ ) et du sup ( $|x|_\infty = \sup |x_i|$ ), on montrera que l'application  $f$  est affine.

**Lemme 10.** — Soient  $U$  un ouvert convexe borné standard de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une application standard de son adhérence  $\bar{U}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes

$$(i) \quad {}^ox' = {}^oy' = {}^ox'' = {}^oy'' \implies o\left(\frac{|f(x') - f(y')|}{|x' - y'|}\right) = o\left(\frac{|f(x'') - f(y'')|}{|x'' - y''|}\right) = @$$

(ii) il existe une fonction continue  $\lambda$  de  $\bar{U}$  dans  $\mathbb{R}$  à valeurs strictement positives telle que l'on ait  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \lambda(a)$ .

Démonstration.

Tous les points considérés sont dans  $\bar{U}$ , on omettra systématiquement l'indication :  $\in \bar{U}$ .

(i)  $\implies$  (ii)

Soit  $a$  un point standard et  $z$  un point vérifiant  ${}^o z = a$ .

Si l'on pose  $\lambda = {}^o \left( \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} \right)$ ,

la formule

$$\forall^{st} \epsilon \exists \eta \quad |x - a| < \eta |y - a| < \eta \implies \left| \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} - \lambda \right| < \epsilon$$

est vérifiée.

Par transfert, elle est vérifiée  $\forall \epsilon$ , ce qui équivaut à  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \lambda$ .

On a ainsi montré que cette limite existe pour tous les points standard de  $\bar{U}$ , elle existe donc pour tous les points de  $\bar{U}$ , et l'on peut définir une fonction standard  $\lambda$  de  $\bar{U}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\lambda(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

On déduit aussi de l'hypothèse (i) que la fonction  $\lambda$  est S continue (ou uniformément continue) et ne prend que des valeurs strictement positives.

On peut remarquer au passage que l'hypothèse (i) implique que  $f$  est  $\epsilon$ -régulière pour n'importe quel  $\epsilon = \emptyset$  et donc localement bilipschitzienne.

(ii)  $\implies$  (i)

Comme  $\bar{U}$  est un compact standard, l'égalité  ${}^o x' = {}^o y' = {}^o x'' = {}^o y''$  implique que ces quatre points ont pour ombre le même point standard  $a$  de  $\bar{U}$  et alors, par définition même de la limite en un point standard, on a :

$${}^o \left( \frac{|f(x') - f(y')|}{|x' - y'|} \right) = \lambda(a) = {}^o \left( \frac{|f(x'') - f(y'')|}{|x'' - y''|} \right)$$

La fonction standard  $\lambda$  continue sur le compact  $\bar{U}$ , admet un maximum  $M$  et un minimum  $m$  strictement positif, les constantes  $M$  et  $m$  étant standard, la limite  $\lambda(a)$  comprise entre  $m$  et  $M$  est appréciable.

Il est alors facile de montrer (par l'absurde) que  $f$  est localement bilipschitzienne.

**Théorème 3.**— Soient  $U$  un ouvert convexe borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction de l'adhérence  $\bar{U}$  de  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . S'il existe une fonction continue  $\lambda$  de  $\bar{U}$  dans  $\mathbb{R}$  à valeurs strictement positives telle que, quel que soit le point  $a$  de  $\bar{U}$ , on ait

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \lambda(a)$$

alors

— Si la norme  $|\cdot|$  est la norme euclidienne, l'application  $f$  est une application de Moëbius si  $n \geq 3$ , une application holomorphe ou antiholomorphe si  $n = 2$ .

— Si la norme est la norme de Manhattan,  $|x|_1 = \sum |x_i|$ , ou celle du sup,  $|x|_\infty = \sup |x_i|$ , l'application  $f$  est une application affine.

Démonstration.

Il suffit de la faire dans le cas où  $f$  et  $U$  sont standard, ce que nous allons supposer dans toute la suite.

Dans une première partie, valable pour n'importe quelle norme, nous allons montrer que la fonction  $f$  est dérivable en nous servant du théorème de Mazur Ulam d'après lequel une isométrie est une application affine.

Ce résultat de dérivabilité nous permettra de conclure dans une deuxième partie où nous distinguerons deux cas

— celui de la norme euclidienne où nous nous servirons de la version de P. Hartman du théorème de J. Liouville,

— celui de la norme de Manhattan ou du sup où nous nous servirons de la structure du groupe des applications linéaires respectant l'une de ces normes (c'est d'ailleurs le même pour les deux).

1<sup>e</sup> partie : l'application  $f$  est dérivable.

a) Existence d'une application linéaire proche de  $f$ .

Choisissons un  $\epsilon$  infiniment petit et procédons de façon analogue à celle du lemme 5.

Pour tout  $x$  dont l'ombre  ${}^o x$  appartient à  $U$ , la boule  $B(x, 2\epsilon)$  est contenue dans  $U$ , on peut donc lui associer une application  $F_x$  de la boule  $B(0, 2)$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$F_x(X) = \frac{f(x + \epsilon X) - f(x)}{\epsilon \lambda({}^o x)}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons dans ce paragraphe a)  $\lambda = \lambda({}^o x)$ , constante standard.

Comme l'application standard  $f$  est localement bilipschitzienne de constantes de Lipschitz standard, l'application  $F_x$  l'est aussi, il existe alors une et une seule application standard  $G_x$ , ombre de  $F_x$ , de la boule  $B(0, 2)$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  définie, pour  $X$  standard, par

$$G_x(X) = {}^o \left( \frac{f(x + \epsilon X) - f(x)}{\epsilon \lambda} \right),$$

bilipschitzienne de même constantes que  $F_x$ .

Si  $X$  est un point quelconque de  $B(0, 2)$  on a

$$F_x(X) = G_x(X) + e_x(X) \quad \text{avec} \quad |e_x(X)| = \emptyset.$$

Par conséquent, si  $X$  et  $Y$  sont deux point standard distincts de  $B(0, 2)$  on a

$$\begin{aligned} |G_x(X) - G_x(Y)| &= {}^o |G_x(X) - G_x(Y)| \\ &= {}^o |F_x(X) - e_x(X) - F_x(Y) + e_x(Y)| \\ &= {}^o \left| \frac{f(x + \epsilon X) - f(x + \epsilon Y)}{\epsilon \lambda} - e_x(X) + e_x(Y) \right| \\ &= {}^o |X - Y| = |X - Y|. \end{aligned}$$

L'application  $G_x$  est donc une isométrie vérifiant  $G_x(0) = 0$ , d'après le théorème de Mazur Ulam, c'est la restriction à la boule  $B(0, 2)$  d'une application linéaire. On a

ainsi montré qu'il existe une application linéaire standard  $G_x$  telle que l'on ait dans la boule  $B(x, 2\epsilon)$

$$f(x + \epsilon X) - f(x) = \lambda({}^o x) G_x(\epsilon X) + \lambda({}^o x) \epsilon e_x(X) \quad \text{avec} \quad |e_x(X)| = \emptyset.$$

b) L'application  $G_x$  est la même pour tous les points ayant même ombre

Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $U$  ayant pour ombre le même point standard  $a$  de  $U$ .

Posons  $\lambda = \lambda(a)$ .

Montrons que, si  $|x - y| = \emptyset \epsilon$ , alors  $G_x = G_y$ .

Si  $X$  est un point standard de  $B(0, 2)$  on a, en désignant par  $C$  la constante de Lipschitz de  $f$  au voisinage de  $a$ ,

$$\begin{aligned} f(x + \epsilon X) &= f(y + \epsilon X) + \delta f(x, y, X) & \text{avec} & \quad |\delta f(x, y, X)| \leq C |x - y| \\ f(x) &= f(y) + \delta f(x, y, 0) & \text{avec} & \quad |\delta f(x, y, 0)| \leq C |x - y| \end{aligned}$$

ce qui donne

$$G_x(X) = G_y(X) + e_y(X) - e_x(X) + \frac{\delta f(x, y, X) - \delta f(x, y, 0)}{\lambda \epsilon}$$

soit en passant à l'ombre

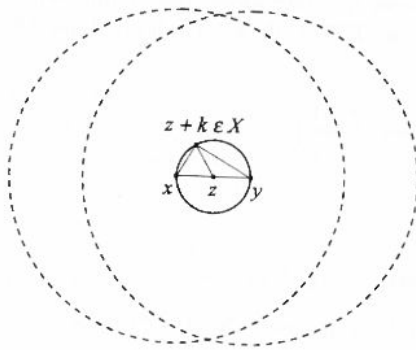
$$G_x(X) = G_y(X)$$

car  $G_x$  et  $G_y$  sont standard.

Montrons maintenant que, si  $|x - y| = @ \epsilon$  avec  $@ \leq 1$ , alors  $G_x = G_y$ .

Posons  $k = \frac{1}{2} \circ \left( \frac{|x-y|}{\epsilon} \right)$  et  $z = \frac{x+y}{2}$ .

Soit  $X$  standard de norme 1, on a



$$\begin{aligned} & \frac{f(z+k\epsilon X) - f(z)}{\lambda \epsilon} \\ &= \frac{f(x+(z+k\epsilon X-x)) - f(x)}{\lambda \epsilon} - \frac{f(z) - f(x)}{\lambda \epsilon} \\ &= G_x(kX) + e_x\left(\frac{z+k\epsilon X-x}{\epsilon}\right) - e_x\left(\frac{z-x}{\epsilon}\right) \\ &= \frac{f(y+(z+k\epsilon X-x)) - f(y)}{\lambda \epsilon} - \frac{f(z) - f(y)}{\lambda \epsilon} \\ &= G_y(kX) + e_y\left(\frac{z+k\epsilon X-x}{\epsilon}\right) - e_y\left(\frac{z-y}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne en passant à l'ombre

$$G_x(kX) = G_y(kX)$$

car  $G_x$  et  $G_y$  sont standard. Les applications linéaires  $G_x$  et  $G_y$ , coïncidant sur la sphère de rayon 1, sont égales.

Montrons que cela entraîne  $G_x = G_a$  pour tous les points  $x$  vérifiant  ${}^o x = a$ .

Si  $|x - a| \leq \epsilon$  on a directement le résultat d'après ce qui précède.

Supposons donc  $|x - a| > \epsilon$  et désignons par  $N$  la partie entière de  $\frac{|x-a|}{\epsilon}$  et par  $\vec{u}$  le vecteur unitaire  $\frac{x-a}{|x-a|}$ .



Définissons la suite de points  $x_0, \dots, x_{N+1}$  par

$$x_0 = a, x_i = a + i\epsilon \vec{u}, x_{N+1} = x,$$

on a alors

$$G_{x_i} = G_{x_{i+1}} \quad i = 0, \dots, N$$

ce qui implique bien

$$G_a = G_x.$$

c) L'application  $f$  est dérivable en tout point  $a$  standard de  $U$

Soit donc  $a$  un point standard de  $U$  et  $x$  et  $y$  deux points ayant pour ombre  $a$ .

Posons  $\lambda = \lambda(a)$ .

Si  $|x - y| = @\epsilon$  avec  $@ \leq 1$ , on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{\epsilon\lambda} = G_x\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) + e_x\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) = G_a\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) + e_x\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right)$$

ce qui donne

$$\frac{f(y) - f(x)}{|y-x|} = \lambda G_a\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) + \lambda \frac{\epsilon}{|y-x|} e_x\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right)$$

et donc

$$o\left(\frac{f(y) - f(x)}{|y-x|}\right) = o\left(\lambda G_a\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right)\right).$$

Supposons maintenant  $|y-x| > \epsilon$ , désignons par  $N$  la partie entière de  $\frac{|y-x|}{\epsilon}$  et par  $\vec{u}$  le vecteur unitaire  $\frac{y-x}{|y-x|}$ .

Définissons la suite de points  $x_0, \dots, x_{N+1}$  par

$$x_0 = x, x_i = a + i\epsilon \vec{u}, x_{N+1} = y,$$

on a alors

$$\frac{f(y) - f(x)}{\epsilon\lambda} = G_a\left(\frac{y-x}{\epsilon}\right) + \sum e_{x_i}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}\right)$$

soit

$$\frac{f(y) - f(x)}{|y-x|} = \lambda G_a\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) + \lambda \tilde{e}(x, y)$$

avec  $|\tilde{e}(x, y)| \leq \frac{(N+1)\epsilon}{|y-x|} e = \emptyset$  en désignant par  $e$  la plus grande des normes  $|e_{x_0}(\frac{x_1-x_0}{\epsilon})|, \dots, |e_{x_N}(\frac{x_{N+1}-x_N}{\epsilon})|$ ,

et donc

$$o\left(\frac{f(y) - f(x)}{|y-x|}\right) = o\left(\lambda G_a\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right)\right).$$

Il ne nous reste plus qu'à traiter le cas  $|x - y| = \emptyset\epsilon$ .

Pour ce faire on va montrer que l'application  $G_x$  qui, apparemment dépendait de l'infiniment petit  $\epsilon$  choisi, ne dépend que de  $f$ .

Soit donc  $\epsilon'$  un infiniment petit différent de  $\epsilon$ . Comme précédemment, on définit une application  $G'_x$  par

$$G'_x(X) = o\left(\frac{f(x + \epsilon'X) - f(x)}{\epsilon'\lambda}\right) \quad \forall^{st} X \quad |X| < 2,$$

et l'on a encore  $G'_x = G'_a$  pour tous les  $x$  vérifiant  ${}^o x = a$ .

Si  $\epsilon' = @\epsilon$ , on a  $G'_a = G_a$ .

Si  $\epsilon' = \emptyset\epsilon$ , en reprenant la démonstration faite dans le cas  $|x - y| > \epsilon$  avec  $\epsilon'$  à la place de  $\epsilon$ , on obtient, si  $X$  est un vecteur unitaire,

$$\frac{f(a + \epsilon X) - f(a)}{\epsilon} = \lambda G'_a(X) + \lambda \tilde{\epsilon}'(a, a + \epsilon X) \quad \text{avec} \quad |\tilde{\epsilon}'(a, a + \epsilon X)| = \emptyset,$$

mais comme on a aussi

$$\frac{f(a + \epsilon X) - f(a)}{\epsilon} = \lambda G_a(X) + \lambda \tilde{\epsilon}(a, a + \epsilon X) \quad \text{avec} \quad |\tilde{\epsilon}(a, a + \epsilon X)| = \emptyset,$$

on en déduit  $G'_a = G_a$  car les deux applications sont linéaires standard.

Si  $\epsilon = \emptyset\epsilon'$ , en échangeant les rôles de  $\epsilon$  et  $\epsilon'$ , on obtient encore  $G'_a = G_a$ .

On a donc montré que quel que soit le point  $a$  standard de  $U$ , il existe une application linéaire standard  $G_a$  telle que l'on ait

$${}^o\left(\frac{f(y) - f(x)}{|y - x|}\right) = {}^o\left(\lambda G_a\left(\frac{y - x}{|y - x|}\right)\right), \quad \forall x, y \quad \text{vérifiant} \quad {}^o x = a = {}^o y$$

l'application  $f$  est de classe  $\mathcal{S}^1$  dans  $U$ , c'est-à-dire  $\mathcal{C}^1$  car  $f$  est standard.

2<sup>e</sup> partie : nature de la fonction selon la norme choisie.

a) Norme euclidienne :  $|x|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$ .

On a montré, qu'en tout point standard  $a$  de  $U$ , donc dans  $U$  tout entier, la dérivée,  $\lambda(a)G_a$ , de  $f$ , est une similitude et que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors, d'après la version de P. Hartman du théorème de Liouville, si  $n \geq 3$ , l'application  $f$  est une application de Moebius

c'est-à-dire une translation ou une similitude ou une inversion ou la composée de ces applications.

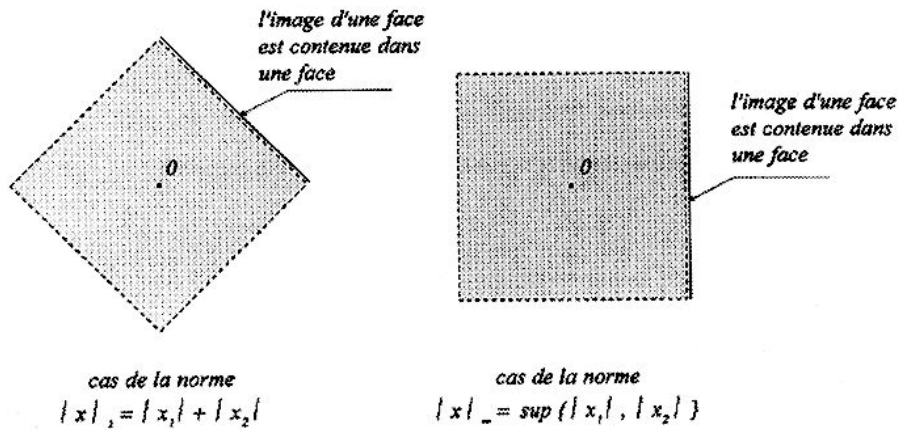
Si  $n = 2$ , si l'on écrit  $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ , l'application  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifie, à une symétrie près, les équations de Cauchy  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$   $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ , c'est donc une application holomorphe si  $f$  préserve l'orientation, sinon c'est une application antiholomorphe.

b) Forme d'une isométrie (relativement à la norme de Manhattan) linéaire.

Le cocube  $B = \{x \mid |x|_1 = \sum |x_i| \leq 1\}$ , boule unité pour la norme de Manhattan, est un polytope dont les  $2n$  sommets sont les points dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une qui vaut  $\pm 1$ .

Soit  $L$  une application linéaire qui est une isométrie pour la norme de Manhattan.

Si  $\sigma' = (a'_1, \dots, a'_n)$  est une face de  $B$ , son image  $L(\sigma') = (b'_1, \dots, b'_n)$  est un  $(n-1)$ -simplexe situé sur une face  $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$  de  $B$ , de plus, comme  $|a'_i - a'_j| = 2$ , on a  $|b'_i - b'_j| = 2$ . Nous allons montrer qu'à une permutation près cela implique  $(b'_1, \dots, b'_n) = (a_1, \dots, a_n)$ .



Si  $x = \sum \lambda_i(x)a_i$  et  $y = \sum \lambda_i(y)a_i$  sont deux points distincts de  $\sigma$ , on a une partition de  $\{1, \dots, n\}$  en quatre sous-ensembles

$$\begin{aligned} I_0(x, y) &= \{ i \mid \lambda_i(x) > 0 \ \lambda_i(y) > 0 \} \\ I_1(x, y) &= \{ i \mid \lambda_i(x) > 0 \ \lambda_i(y) = 0 \} \\ I_2(x, y) &= \{ i \mid \lambda_i(x) = 0 \ \lambda_i(y) > 0 \} \\ I_3(x, y) &= \{ i \mid \lambda_i(x) = 0 \ \lambda_i(y) = 0 \} \end{aligned}$$

et l'on a

$$|x - y|_1 = \sum_{i \in I_0} |\lambda_i(x) - \lambda_i(y)| + \sum_{i \in I_1} \lambda_i(x) + \sum_{i \in I_2} \lambda_i(y)$$

avec  $\sum \lambda_i(x) = 1 = \sum \lambda_i(y)$ .

Si  $I_0$  est non vide on a  $|x - y|_1 < 2$ , par conséquent,  $I_0(b'_1, b'_2)$  est vide.

Quitte à changer la numérotation des sommets de la face  $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$  qui contient  $L(\sigma') = (b'_1, \dots, b'_n)$  on peut supposer

$$\begin{aligned} I_1(b'_1, b'_2) &= \{1, \dots, p_1\} & I_2(b'_1, b'_2) &= \{p_1 + 1, \dots, p_1 + p_2\} \\ I_3(b'_1, b'_2) &= \{p_1 + p_2 + 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Les égalités  $|b'_1 - b'_3| = 2$  et  $|b'_2 - b'_3| = 2$  impliquent

$$\lambda(b'_3) = 0 \quad \forall i \leq p_1 + p_2,$$

ce qui avec l'égalité  $\sum \lambda_i(b'_3) = 1$  entraîne, quitte à faire une permutation sur les sommets  $a_{p_2+1}, \dots, a_n$ ,

$$\lambda_i(b'_3) > 0 \quad p_1 + p_2 + 1 \leq i \leq p_1 + p_2 + p_3.$$

En recommençant avec  $b'_1, \dots, b'_j$  et  $b'_{j+1}$ , on construit ainsi par récurrence, avec éventuellement une permutation, une suite d'entiers  $p_1, \dots, p_n$  supérieurs ou égaux à 1 tels que

$$\begin{cases} \lambda_i(b'_{j+1}) = 0 & 1 \leq i \leq p_1 + \dots + p_j \leq n \\ \lambda_i(b'_{j+1}) > 0 & p_1 + \dots + p_j + 1 \leq i \leq p_1 + \dots + p_{j+1} \leq n \end{cases}$$

ce qui est impossible si l'un de ces entiers est strictement supérieur à 1.

On a ainsi montré qu'à une permutation près  $(b'_1, \dots, b'_n) = (a_1, \dots, a_n)$ .

L'application linéaire  $L$  est donc obtenue comme composée d'une permutation de coordonnées ( $n!$  possibilités) et de changements de signe des coordonnées ( $2^n$  possibilités).

*c) Forme d'une isométrie (relativement à la norme du sup) linéaire.*

Nous allons monter par récurrence sur  $n$  que l'image du cube

$$C_n(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - c|_\infty = \sup |x_i - c_i| = r\}$$

par une isométrie (pour la norme du sup) linéaire est le cube  $C_n(f(c), r)$ .

Elle est vérifiée pour  $n = 1$ .

Supposons donc qu'elle soit vérifiée pour tous les cubes  $C_{n-1}(\cdot, \cdot)$ .

Soient  $L$  une isométrie (pour la norme du sup) linéaire et  $C_n(c, r)$  un cube.

Une face  $\sigma$  de  $C_n(c, r)$  est un cube  $C_{n-1}(c_\sigma, r)$  en désignant par  $c_\sigma$  le centre de symétrie de  $\sigma$ , l'image  $L(\sigma)$  est contenue dans une face  $\sigma'$  de  $C_n(f(c), r)$ . Mais l'hypothèse de récurrence implique

$$L(\sigma) = L(C_{n-1}(c_\sigma, r)) = C_{n-1}(L(c_\sigma), r)$$

ce qui donne

$$C_{n-1}(L(c_\sigma), r) \subseteq C_{n-1}(c_{\sigma'}, r)$$

ce qui n'est possible que si  $L(c_\sigma) = c_{\sigma'}$  et donc  $L(\sigma) = \sigma'$ .

En désignant par  $\sigma_i$  la face du cube  $C_n(0, 1)$  dont le centre de symétrie  $c_{\sigma_i}$  est le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la  $i^e$  qui vaut 1, le raisonnement précédent implique que  $L(c_{\sigma_i})$  est un point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une, la  $j(i)^e$  qui vaut  $\pm 1$ .

L'application linéaire  $L$  est donc obtenue comme composée d'une permutation de coordonnées ( $n!$  possibilités) et de changements de signe des coordonnées ( $2^n$  possibilités) et envoie bien le cube  $C_n(c, r)$  sur le cube  $C_n(f(c), r)$ .

*d) Forme d'une application  $f$  dont la dérivée  $Df_x$  est la composée d'une homothétie et d'une isométrie (relativement à la norme de Manhattan ou du sup).*

Désignons par  $\mathcal{G}$  le groupe dont les éléments sont les applications linéaires permutation de coordonnées et changement de signe, groupe des isométries linéaires relativement à la norme de Manhattan (ou à celle du sup).

Soit  $a$  un point de  $U$ , il existe une permutation  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{i_1, \dots, i_n\}$  telle que

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)_a = 0 \quad j \neq i_k \quad \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)_a = \pm \lambda(a) \quad j = i_k$$

la continuité des dérivées partielles implique qu'elles sont de la même forme dans un voisinage  $V_a$  de  $a$ .

Plaçons nous en un point  $a$  standard et supposons pour simplifier que la permutation soit l'identité,  $i_k = k$ . Quitte à restreindre  $V_a$  on peut supposer que c'est un cube standard centré en  $a$  de côté  $r$ .

On désigne par  $(u_1, \dots, u_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $x$  un point de  $V_a$ . Posons  $r_i(x) = r - |x_i - a_i|$ .  
 Pour  $i \neq j$  et  $|t_i| < r_i(x)$  et  $|t_j| < r_j(x)$  les égalités

$$\begin{aligned} & f(x + t_i u_i + t_j u_j) - f(x) \\ &= f(x + t_i u_i + t_j u_j) - f(x + t_i u_i) + f(x + t_i u_i) - f(x) \\ &= \int_0^{t_j} \frac{\partial f}{\partial u_j}(x + t_i u_i + t u_j) dt + \int_0^{t_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x + t u_i) dt \\ &= f(x + t_i u_i + t_j u_j) - f(x + t_j u_j) + f(x + t_j u_j) - f(x) \\ &= \int_0^{t_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x + t u_i + t_j u_j) dt + \int_0^{t_j} \frac{\partial f}{\partial u_j}(x + t u_j) dt \end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^{t_j} \lambda(x + t_i u_i + t u_j) dt \right) u_j + \left( \int_0^{t_i} \lambda(x + t u_i) dt \right) u_i \\ &= \left( \int_0^{t_i} \lambda(x + t u_i + t_j u_j) dt \right) u_i + \left( \int_0^{t_j} \lambda(x + t u_j) dt \right) u_j \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\lambda(x + t_i u_i + t_j u_j) = \lambda(x + t_i u_i) = \lambda(x + t_j u_j)$$

et donc

$$\lambda(x + t_i u_i + t_j u_j) = \lambda(x).$$

Si  $n = 2$  cela nous donne que  $\lambda$  est constante dans  $V_a$ .

Si  $n > 2$ , le même raisonnement permet, pour  $|t_i| < r_i(x)$ , de montrer, par récurrence sur  $l$ ,

$$\lambda(x + t_1 u_1 + \dots + t_l u_l) = \lambda(x) \quad l = 2 \dots n.$$

Dans  $V_a$  on a alors

$$Df_x = \lambda(a) L_a \quad \text{avec} \quad L_a \in \mathcal{G}$$

ce qui entraîne

$$f(x) = f(a) + \lambda(a) L_a (x - a).$$

Comme  $f$  et  $U$  sont standard on a ce résultat pour tous les points de  $U$ , soit :

$$\forall a \in U \quad \exists V_a \quad f(x) = f(a) + \lambda(a) L_a (x - a) \quad \forall x \in V_a.$$

Mais alors, si  $a_0$  est un point standard de  $U$ , l'ensemble

$$F_{a_0} = \{x \in U \quad f(x) = f(a_0) + \lambda(a_0) L_{a_0} (x - a_0)\}$$

est ouvert et fermé et donc égal à  $U$  car  $U$  est connexe. ■

## Références

- [1] V. A. ALEXANDROV *Imbedding locally euclidean and conformally euclidean metrics* Math. USSR Sbornik 73 (1992)
- [2] V. A. ALEXANDROV *On the Gale-Nikaido-Inado fundamental theorem on univalence mapping* Siberian Math. J. 35 (1994)
- [3] F. S. BECKMANN — D. A. QUARLES *On isometries of euclidian spaces* Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1952)
- [4] M. BERGER *Géométrie 3/ Convexes et polytopes...* Cedic Fernand Nathan Paris (1978)
- [5] S. BERNSTEIN *Génération et généralisation des fonctions analytiques d'une variable réelle* L'Approximation : leçons... Chelsea (1970)
- [6] L. A. CAMPBELL *Rational Samuelson maps are univalent* J. of Pure and Applied Algebra 92 (1994)
- [7] P. CARAMAN *n-Dimensional Quasiconformal (QCf) Mappings* Academiei Bucuresti Abacus Press (1974)
- [8] S. C. CHEN *On the Darboux Picard theorem in  $C^n$*  Michigan Math. J. 40 (1993)
- [9] P. T. CHURCH — E. HEMMINGEN *Light open maps on n-manifolds* Duke Math. J. 27 (1960)
- [10] F. H. CLARKE *On the inverse function theorem* Pacific J. of Math. 64 (1976)
- [11] M. CRISTEA *Some conditions for ... injectivity of mapping between two n-manifolds* Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 33 (1988)
- [12] M. CRISTEA *Local and global inversion theorems without assuming continuous differentiability* Bull. Math. Roumanie 33 (1989)
- [13] N. J. CUTLAND — F. HANQIAO *An infinitesimal proof of the implicit function theorem* Glasgow Math. J. 35 (1993)
- [14] F. DIENER — G. REEB *Analyse Non Standard* Hermann Paris (1989)
- [15] G. A. EGARD *Measure, Topology and Fractal Geometry* Springer New York (1989)
- [16] V. EHRARD *Regard peu ordinaire sur des graphes de fonctions ordinaires* Thèse Strasbourg (1981)
- [17] M. FECKAN *An inverse function theorem for continuous mappings* J. of Math. Analysis and Appl. 185 (1994)
- [18] H. FEDERER *Geometric Measure Theory* Springer Berlin (1969)
- [19] H. FLANDERS *Liouville's Theorem on Conformal Mapping* J. Math. Mech. 15 (1966)
- [20] J.D. FOLEY — A. VAN DAM *Fundamentals of Interactive Computer Graphics* Reading Addison Wesley (1983)
- [21] T. FUJISAWA — E. S. KUH *Piecewise linear theory of non linear networks* SIAM J. Appl. Math. 22 (1972)

- [22] M. FURI *A note on maps sending open sets into open sets* Bollettino U. M. I. 7 (1990)
- [23] D. GALE – H. NIKAIDO *The jacobian matrix and global univalence of mappings* Math. Annalen 159 (1965)
- [24] J. GEWIRTZ *Metric conditions that implies local invertibility* Communications in Pure and Appl. Math. 21 (1969)
- [25] C. GODBILLON *Eléments de topologie algébrique* Hermann Paris (1971)
- [26] P. HARTMAN *On Isometries and a Theorem of Liouville* Math. Zeitung 69 (1958)
- [27] J. HARTONG *Eléments pour une théorie du continu* 3ème Rencontre de géométrie du Schnepfenried 10-15 mai 1982 Astérisque 109-110
- [28] M. HATA *Differentiable functions which do not satisfy an uniform Lipschitz condition of any order* Proceeding Amer.Math. Soc. 111 (1991)
- [29] F. JOHN *On Quasi Isometric Mapping I* Communication on Pure and Appl. Math 21 (1968)
- [30] F. JOHN *On Quasi Isometric Mapping II* Communication on Pure and Appl. Math 22 (1969)
- [31] F. JOHN *A criterium for Univalence Brought up to date* Communication on Pure and Appl. Math 29 (1976)
- [32] M. KOJIMA *Studies on piecewise linear approximations ...* Math. Operations Research 5 (1978)
- [33] M. KOJIMA – R. SAIGAL *A study of PC1 homeomorphism on subdivided polyedrom* SIAM J. Math. Anal. 10 (1979)
- [34] M. KOJIMA – R. SAIGAL *On the relationship between conditions that insure a PL map. is a homeomo.* Math Operations Research 5 (1980)
- [35] T. KUCZMOV – W. RZYMOWSKI – A STACHURA *Lipschitzian homeo. with large sets of... derivatives* Real Analysis Exchange 15 (1989-90)
- [36] D. KUHN – R. LOVEN *Piecewise affine bijection of  $\mathbb{R}^n$  and the equation  $Sx^+ - Tx^- = y$*  Linear Algebra and its Appl. 96 (1987)
- [37] J. LELONG-FERRAND – J. M. ARNAUDIES *Cours de Mathématiques T.2* Dunod Paris (1977)
- [38] K. G. LLOYD *Degree Theory* Cambrige Univ. Press (1978)
- [39] G.G. MAGARI- IL'AEV *The implicit function theorem for lipschitz maps* Russian Math. Surveys 33 (1978)
- [40] A. MARCHAUD *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles* J. de Math 6 (1927)
- [41] O. MARTIO – S. RICKMAN – J. VAÍSÁLÁ *Definition for quasi-regular* Ann.Scient. Fennica 448 (1969)
- [42] W. S. MASSEY *Sufficient conditions for a local homeomorphism to be injective* Topology and its aplication 47 (1992)
- [43] A. MAS COLELL *Homeomorphisms of compact convex sets and the jacobian matrix* SIAM J. Math. Anal. 6 (1979)

- [44] S. MAZUR – S. ULAM *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés* C. R. Acad. Sci. Paris 194 (1932)
- [45] J. W. MILNOR *Topology from differentiable viewpoint* Univ. Virginia 1965
- [46] J. R. MUNKRES *Elementary Differential Topology* Princeton Univ. Press 1963
- [47] E. NELSON *Internal Set Theory : A new approach to non standard analysis* Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977)
- [48] J. W. NEUBERGER *Chaos and higher order differences* Proceeding Amer. Math. Soc. 101 (1987)
- [49] R. NEVANLINNA *On differentiable Mappings* in : Analytic Functions Princeton Univ. Press (1960)
- [50] A. OSTROWSKI *Un théorème d'existence pour les systèmes d'équations* C. R. Acad. Sci. Paris 231 (1950)
- [51] A. OSTROWSKI *Un nouveau théorème d'existence pour les systèmes d'équations* C. R. Acad. Sci. Paris 232 (1951)
- [52] T. PARTHSARATHY *On global univalence Theorem* Lectures Notes in Math. 977 (1983) Springer
- [53] R. PHILLIPS *Liouville's Theorem* Pacific J. Math 28 (1969)
- [54] M. L. PITTEWAY *Algorithms for drawing ellipses or hyperbolae with digital plotter* Comput. J. 10 (1981)
- [55] A. POMMELET *Une preuve élémentaire du théorème d'Hamadard sur les homéomorphismes de  $\mathbb{R}^n$*  Revue de Math. Sp. 105 (octobre 1994)
- [56] B. H. POURCIAU *Univalence and degree for lipschitz continuous maps* Arch.Ration. Mechanics and Analysis 81 (1983)
- [57] D. RALPH *On Branching Number of Normal P.L. Manifolds* Non Linear Analysis 20 (1994)
- [58] P. A. RAVIART – J. M. THOMAS *Introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles* Masson (1988)
- [59] W. C. RHEINBOLDT – J. S. VANDERGRAFT *On piecewise affine mapping in  $\mathbb{R}^n$*  SIAM Appl. Math. 29 (1975)
- [60] J. P. REVEILLES *Discrétisations finies de la droite réelle et applications à la théorie de l'itération* Mathématiques finitaires et Analyse Non Standard Publ. Math. Paris 7 (1979)
- [61] J. P. REVEILLES *Géométrie discrète. Calcul en nombres entiers et algorithmique.* Thèse d'État Strasbourg 1991
- [62] S. M. ROBINSON *Sufficient conditions for a local homeomorphism to be injective* Topology and its Applications 47 (1992)
- [63] R. SAIGAL *On piecewise linear approximations to smooth mappings* Math. Operations Research 5 (1979)
- [64] S. SCHOLTES *Introduction to piecewise differentiable equations* Preprint Diskussionbeiträge Univ. Karlsruhe (May 1994)
- [65] R. SCHRAM *On piecewise linear functions and piecewise linear equations* Math. Operations Research 5 (1985)



- [66] L. SCHWARTZ *Analyse I Théorie des ensembles et topologie* Hermann (1991)
- [67] J. C. SIFRE *Illusions infinitésimales* Quadrature 3 (1990)
- [68] A. F. TIMAN *The Theory of Approximation of Functions of a Real Variable* Hind. Pub. Co. Delhi (1966)
- [69] C. J. TITUS – G. S. YOUNG *A jacobian condition for interiority* Michigan Math. J. 1 (1952)
- [70] C. J. TITUS – G.S. YOUNG *The extension of interiority with some applications* Trans. Amer. Math. Soc. (1962)
- [71] J. VAÍSÁLÁ *Discrete open mappings on manifolds* Ann. Acad. Sci. Fennicae 392 (1966)
- [72] J. VAÍSÁLÁ *Lectures on n-Dimensional QuasiConformal Mappings* Lectures Notes in Math 229 Springer (1971)
- [73] M. VUORINEN *Quasiconformal Space Mappings A collection of surveys 1960-1990* Lect. Notes in Math. 1508 Springer 1992
- [74] G. T. WHYBURN *Interior transformations on compact sets* Duke Math. J. 3 (1937)
- [75] G. T. WHYBURN *Analytic Topology* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 1942
- [76] F. XIANLING *The necessary and sufficient conditions for lipschitz local homeomorphism* Chin. Ann of Math. 13 (1992)

Université Louis Pasteur  
Département de Mathématique  
Institut de Recherche Mathématique Avancée  
STRASBOURG