Divulgaciones Matemáticas Vol. 12 No. 1(2004), pp. 95–99

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@demat.org.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Durante los días 8 y 9 de junio de este año se realizó en Managua, Nicaragua, la VI Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe, dirigida a estudiantes de bachillerato de la región sin experiencia en olimpíadas internacionales (IMO) o iberoamericanas. Los problemas 80 al 85 son los propuestos en dicha competencia.

1 Problemas propuestos

80. En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero.

Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar cómo juegue su rival.

81. Se define una sucesión $a_0,a_1,a_2,\ldots$ de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$.

    Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

82. Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento EF y G el punto de corte de la recta CM con el segmento AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

83. Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

84. Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea P el punto sobre AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

    a) Demostrar que la medida de $\angle BPC$ es $90°$.
    b) Sea Q el punto medio de BC y R el punto de corte de la recta AD y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B,P,R y C están sobre una misma circunferencia.

85. Con perlas de diversos colores se forman collares. Se dice que un collar es *primo* si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre si.

    Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.

    Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

2 Soluciones

21. [**8**(1) (2000) p. 88.] Dadas dos circunferencias M y N decimos que M *biseca* a N si la cuerda común es un diámetro de N. Considere dos circunferencias fijas C_1 y C_2 no concéntricas.

    a) Pruebe que existen infinitas circunferencias B tales que B biseca a C_1 y B biseca a C_2.
    b) Determine el lugar geométrico de los centros de las circunferencias B.

    Solución por Marco Dalai, Dipartimento di Elettronica, Università degli Studi di Brescia, Italia.

    Sea c_1 el centro de C_1 y r_1 su radio; sea c_2 el centro de C_2 y r_2 su radio. Sea l la línea que pasa por c_1 y c_2. Sea t_1 la recta perpendicular a l que pasa por c_1; ésta corta a C_1 en los puntos x_1 e y_1. Igualmente sea t_2 la perpendicular a l por c_2 que corta a C_2 en x_2 e y_2. Sea e el eje del segmento $\overline{x_1x_2}$ y sea c la intersección de e y l.
    Es claro que la circunferencia C de centro c que pasa por x_1 biseca a C_1 y C_2. Sean r el radio de C y t la recta perpendicular a l que pasa por c.

    Veamos que cualquier punto p de la recta t es centro de una circunferencia que biseca a C_1 y C_2.

    De hecho tenemos que $\overline{pc_1}^2 = \overline{pc}^2 + \overline{cc_1}^2 = \overline{pc}^2 + r^2 - r_1^2$ y $\overline{pc_2}^2 = \overline{pc}^2 + \overline{cc_2}^2 = \overline{pc}^2 + r^2 - r_2^2$. Entonces $\overline{pc_1}^2 + r_1^2 = \overline{pc}^2 + r^2 = \overline{pc_2}^2 + r_2^2$ y esto significa que la circunferencia con centro en p que biseca a C_1 también biseca a C_2.

    Nota del Editor: En la prueba anterior falta ver que *sólo* los puntos de la recta t pertenecen al lugar, pero eso es inmediato pues la igualdad $\overline{pc_1}^2 + r_1^2 = \overline{pc_2}^2 + r_2^2$ caracteriza completamente a los puntos del lugar y sólo es satisfecha si p está en t.

55. [**10**(1) (2002) p. 85-86]. Sean n y k enteros positivos distintos. Se considera un arreglo rectangular de $k \times n$, de modo que en la posición determinada por la fila i y la columna j se encuentra el número $i + j - 1$, tal como se ve a continuación:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & k+1 & \cdots & n+k-1 \end{array}$$

Sea m la suma de los elementos del arreglo. Se sabe que m es una potencia entera de un número primo p.

(a) Demostrar que sólo existe un posible valor del número primo p.

(b) Determinar, con demostración, todos los posibles valores de n y k.

Solución por Ignacio Larrosa Cañestro, A Coruña, España.

La suma de la primera fila es $n(n+1)/2$ y en las sucesivas filas se suma 1 a cada elemento de la fila anterior. Entonces la suma de todo el arreglo es $S(k,n) = kn(n+1)/2 + nk(k-1)/2 = kn(k+n)/2$. Si se tiene que $S(k,n) = p^r$, con p primo, dos de los tres números k, n y $k+n$ deben ser potencias de p y el otro el doble de una potencia de p. Pero $k+n$ no puede ser el doble de una potencia de p, pues entonces se tendría $k = p^s$, $n = p^t$, $t \neq s$ y $p^s p^t(p^s + p^t)/2 = p^r$, lo cual es imposible (por ejemplo si $t > s$ resulta $1 + p^{t-s} = 2p^{r-2s-t}$).

Por lo tanto debe ser $k = p^s$ y $n = 2p^t$ o $k = 2p^t$ y $n = p^s$, y en ambos casos $k+n = p^s + 2p^t$ debe ser una potencia de p. Es claro que esto sólo es posible si $s = t$ y $p = 3$. En este caso debe ser $k = 3^s$ y $n = 2 \cdot 3^s$, o bien $k = 2 \cdot 3^s$ y $n = 3^s$, con lo que $S(k,n) = 3^{3s+1}$.

70. [**11**(1) (2003) p. 84.] Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea P un punto en AB tal que $BC = CP$. Sea Q un punto en AC tal que $AQ = QP = PB$. Determinar los ángulos del triángulo ABC. Justificar su respuesta.

Solución por Wilson Pacheco, Universidad del Zulia.

Sean $\alpha = \angle BAC$ y $\beta = \angle ABC = \angle ACB$, entonces $\alpha + 2\beta = 180$. Como el triángulo PBC es isósceles con base PB, se tiene que $\angle BPC = \angle PBC = \beta$ y $\angle BCP = 180 - 2\beta = \alpha$.

Por ser el triángulo PQA isósceles con base AP se tiene que $\angle QPA = \alpha$. Además $\angle BPC + \angle CPQ + \angle QPA = 180$, es decir, $\beta + \angle CPQ + \alpha = 180$, de donde $\angle CPQ = \beta$. Entonces los triángulos PQC y PBC son congruentes y $\angle PCQ = \angle PCB = \alpha$, de donde $\beta = 2\alpha$. Finalmente $180 = \alpha + 2\beta = 5\alpha$, de donde $\alpha = 36$ y $\beta = 72$.

Nota: También resuelto por Ricardo Barroso Campos (Universidad de Sevilla, España), Marco Dalai (Università degli Studi di Brescia, Italia) y Oswaldo Larreal (Universidad del Zulia).

71. [**11**(1) (2003) p. 84.] Sea n un entero positivo impar. Se construye una lista de enteros positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tal que a_1 es un entero positivo cualquiera y, para todo $j \geq 2$ se define a_j de la siguiente manera:

(a) Si a_{j-1} es par, entonces $a_j = a_{j-1}/2$.

(b) Si a_{j-1} es impar, entonces $a_j = a_{j-1} + n$.

Encontrar, para cada entero positivo n, todos los posibles valores de a_1 tales que éste valor vuelve a aparecer más adelante en la sucesión.

Solución por Marco Dalai, Dipartimento di Elettronica, Università degli Studi di Brescia, Italia.

Probaremos que a_1 se repite si y sólo si pertenece al conjunto

$$S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n, n+1, n+3, n+5, \ldots, 2n\}$$

formado por los enteros menores o iguales a n o pares y menores o iguales que $2n$. Es fácil ver que si $a_{j-1} \in S_n$ también $a_j \in S_n$. Además, si $a_j \in S_n$ y $a_{j-1} \in S_n$ entonces, a_{j-1} está unívocamente determinado por a_j. Entonces, si $a_1 \in S_n$ sabemos que $a_j \in S_n \, \forall j$. Pero el conjunto S_n tiene $(3n+1)/2$ elementos, así que los valores tienen que repetirse en la sucesión de los a_j, formando un bucle de periodo $p \leq (3n+1)/2$. Ahora basta ver que el bucle empieza con a_1. De hecho, supongamos que a_k sea el primer valor de la sucesión que vuelve a encontrarse, es decir k es el menor entero tal que $a_k = a_{k+p}$. Entonces, si $k > 1$, a_k es hijo de a_{k-1} y también de a_{k-1+p}; pero los dos padres pertenecen a S_n y entonces tienen que ser iguales. Entonces si $k > 1$, a_k no es el primer elemento que se repite. Esto demuestra que cualquier $a_1 \in S_n$ vuelve a repetirse en la sucesión.

Si en cambio $a_1 \notin S_n$ la sucesión siempre llega a un valor en S_n, después de lo cual permanece en S_n y a_1 no se repite. Para demostrar esto basta ver que si $a_j \notin S_n$ entonces $a_j > n$ y $a_{j+1} < a_j$ o $a_{j+2} < a_j$. Entonces existe una subsucesión estrictamente decreciente que llega a un valor menor o igual que n, que claramente está en S_n.