Divulgaciones Matemáticas Vol. 12 No. 2(2004), pp. 77–82

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@demat.org.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

El 6 de noviembre del 2004 se realiz la VIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitaria. En esta ocasión Adolfo Rodríguez obtuvo la primera medalla de oro para Venezuela en esta competencia, acompañado por David Seguí (plata), Nstor Guillén (bronce), Héctor Chang y Marco Antonio Pérez (menciones honoríficas). Vayan nuestras felicitaciones a todos ellos.

Los problemas 94 al 100 son los propuestos en dicha competencia.

Los días 21 y 22 de junio se realizó en El Salvador la VII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Venezuela estuvo representada por las niñas Sofía Taylor (medalla de broince), Carmela Acevedo (mención honorífica) e Isabel Clemente. Las medallas de oro se las llevaron México y Colombia.

Los problemas 101 al 106 son los propuestos en dicha competencia.

1 Problemas propuestos

94. Sea p un polinomio de grado menor o igual a 4 con $p(1) = p(-1) = 0$, $p(0) = 1$ y tal que, para todo $x \in [-1, 1]$, $p(x) \leq 1$. Encuentre el mayor valor posible de
$$\int_{-1}^{1} p(t)\, dt.$$

95. Considere la matriz real cuadrada S de orden r y entradas
$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} k^{i+j}.$$
Calcule $\det S$ (en función de r).

96. Sean N_1, N_2, N_3, matrices reales 2×2 tales que $N_1^2 = N_2^2 = N_3^2 = 0$. Pruebe que si existen números reales x_1, x_2, x_3 no todos nulos con
$$x_1N_1 + x_2N_2 + x_3N_3 = 0$$
entonces existen índices $i \neq j$ y un número real r con $N_i = rN_j$.

97. Sea $\{0, 1\}^n$ el conjunto de las sucesiones de n términos con valores 0 o 1. Decinos que dos puntos de $\{0, 1\}^n$ son *vecinos* si difieren en una única coordenada. Los conjuntos A_1, A_2,... A_k, son disjuntos y su unión es $\{0, 1\}^n$. Sabemos que para cualesquiera $i \neq j$ existen $a_i \in A_i$ y $a_j \in A_j$ tales que a_i y a_j son vecinos. Pruebe que
$$n \geq \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1.$$

98. Sea $\mathcal{I}_k \subset \mathbb{C}$ el conjunto de todas las raíces de polinomios mónicos de grado k y coeficientes enteros.
    i) Muestre que $\mathcal{I}_2 \cap \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ pero $\mathcal{I}_2$ no es denso en $\mathbb{C}$.
    ii) Determine si $\mathcal{I}_3$ es denso en $\mathbb{C}$.

99. Para cada entero positivo n sea
$$X_n = \{-2n + 1, -2n + 3, \ldots, -1, 1, \ldots, 2n - 3, 2n - 1\}$$
el conjunto de los enteros impares de módulo menor que $2n$. Sea $P_n \subset \mathbb{R}[x]$ el conjunto de los polinomios p de grado menor que $2n$ tales que

$|p(x)| \leq 1$ para todo $x \in X_n$. Sea $g(n) = \text{máx}_{p \in P_n} p(0)$ el mayor valor posible de $p(0)$ para $p \in P_n$. Pruebe que el límite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{\ln(n)}$$

existe y calcule su valor.

100. Sea $\mathcal{S} = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones con valores 1 o 1. Para $p, q \in \mathcal{S}$, definimos

$$p \perp q \iff \lim_{n \to \infty} \sum_{k<n} \frac{p(k)q(k)}{n} = 0.$$

Muestre que existe $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ tal que si $p \neq q$ entonces $f(p) \perp f(q)$.

101. ¿De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, cuál ocupa la posición 2005?

102. Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

103. En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo en los lados AB, BC y AC respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR en PQ, QR y PR, respectivamente.

    a) Demuestre que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.

    b) Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

104. Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.

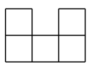
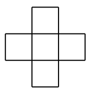
Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

105. En un triángulo acutángulo ABC, sean H su ortocentro y M el punto medio del lado AC. Por M se traza una recta L paralela a la bisectriz del ángulo AHC. Demuestre que la recta L divide al triángulo ABC en dos partes que tienen el mismo perímetro.

106. Se tienen n cartas numeradas de 1 a n y p cajas para guardarlas, con p primo. Determine los posibles valores de n para los que se pueden guardar todas las cartas de forma que la suma de las cartas en cada caja sea la misma.

2 Soluciones

34. [**8**(2) (2000) p. 180.] Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y n con piezas congruentes a

 y  .

Notas:
a) Las piezas no deben superponerse ni dejar huecos.
b) Los cuadritos de las piezas son de lado 1.

Solución por José H. Nieto, Universidad del Zulia.

Es posible para cualquier entero n positivo excepto 1, 2, 4 y 7. Comencemos por observar que si se forma un rectángulo con esas piezas, en el borde, para que no queden huecos aislados, deben ponerse piezas en forma de U con la base contra el lado o bien cruces con una U a cada lado, formando bloques rectangulares de 3×5. Por lo tanto si se puede construir un rectángulo de $15 \times n$, n debe ser de la forma $3a + 5b$ con a y b enteros no negativos. Se sigue de inmediato que no se pueden construir rectángulos de $15 \times n$ si $n = 1, 2, 4$ o 7. Veamos que para cualquier otro entero positivo n sí se puede. En efecto, con 3 bloques de 3×5 se puede formar el rectángulo de 15×3, y con 5 bloques el de 15×5.

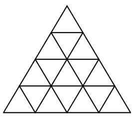
Con dos rectángulos de 15×3 se forma el de 15×6. Si $n \geq 8$ entonces consideremos tres casos:
a) $n = 3k$. Entonces con k rectángulos de 15×3 se forma el de $15 \times n$.
b) $n = 3k + 1$. Entonces $n = 3(k - 3) + 10$, y con $k - 3$ rectángulos de 15×3 y 2 de 15×5 se forma el de $15 \times n$.
b) $n = 3k + 2$. Entonces $n = 3(k - 1) + 5$, y con $k - 1$ rectángulos de 15×3 y uno de 15×5 se forma el de $15 \times n$.
con k rectángulos de 15×3 se forma el de $15 \times n$.

35. [**8**(2) (2000) p. 180]. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo (las diagonales quedan dentro del pentágono). Sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE, respectivamente. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo y que su área es igual a 2/9 del área del cuadrilátero $ABCD$.

Solución por José H. Nieto, Universidad del Zulia.

Sean K, L, M y N los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y DA, respectivamente. $KLMN$ es un paralelogramo ya que $KL \parallel AC \parallel NM$ y $LM \parallel BD \parallel KN$. Entonces $PQRS$ es también un paralelogramo por ser la imagen de $KLMN$ por la homotecia de centro E y razón 2/3. Además el área de $PQRS$ (que denotaremos $[PQRS]$) es igual al área de $KLMN$ multiplicada por $(2/3)^2$, es decir $[PQRS] = \frac{4}{9}[KLMN]$. Pero por otra parte, como $[KBL] = \frac{1}{4}[ABC]$, $[NDM] = \frac{1}{4}[ADC]$, $[KAN] = \frac{1}{4}[BAD]$ y $[LCM] = \frac{1}{4}[BCD]$, resulta que $[ABCD] = [KLMN] + [KBL] + [KAN] + [NDM] + [LCM] = [KLMN] + \frac{1}{2}[ABCD$. de donde $[KLMN] = \frac{1}{2}[ABCD]$, y finalmente $[PQRS] = \frac{4}{9}[KLMN] = \frac{2}{9}[ABCD]$.

36. [**8**(2) (2000) p. 180]. En la figura, escribir un entero dentro de cada triangulito de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos.



Nota: Dos triangulitos son *vecinos* si comparten un lado.

Solución por José H. Nieto, Universidad del Zulia.

Una solución se obtiene llenando dos bandas laterales con la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, el triangulito central con 0 y los tres triangulitos restantes con 4, como se indica en el siguiente diagrama:

```
             13
          5  8  4
       2  3  0  4  4
    1  1  2  3  5  8 13
```

37. [**8**(2) (2000) p. 181]. Sea ABC un triángulo rectángulo, C_1 y C_2 dos circunferencias que tienen a los lados AB y CA como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado AB en el punto F ($F \neq A$) y C_1 corta al lado CA en el punto E ($E \neq A$). Además, BE corta a C_2 en P y CF corta a C_1 en Q. Demostrar que las longitudes de los segmentos AP y AQ son iguales.

   Solución por José H. Nieto, Universidad del Zulia.

   Como los triángulos AFQ y QFB son rectángulos y semejantes resulta que $FQ/FA = FB/FQ$, o sea $FQ^2 = FA \cdot FB$. Además por Pitágoras $AQ^2 = AF^2 + FQ^2 = AF^2 + FA \cdot FB = AF(AF + FB) = AF \cdot AB$. Análogamente $PE^2 = PE \cdot EC$ y $AP^2 = AE^2 + EP^2 = AE \cdot AC$. Ahora como los triángulos AFC y AEB son rectángulos y semejantes se tiene que $AF/AE = AC/AB$, o sea $AF \cdot AB = AE \cdot AC$, de donde $FQ^2 = PE^2$ y $FQ = PE$.