Divulgaciones Matemáticas Vol. 13 No. 2(2004), pp. 147–149

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@demat.org.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

A fines de septiembre se realizó en Cartagena de Indias, Colombia, la XX Olimpiada Iberoamericana de Matemática. Este importante evento contó con la participación de veintidós países: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

Venezuela estuvo representada por los estudiantes Leonardo Urbina, que obtuvo medalla de plata, Roland Hablutzel, que obtuvo bronce, Rafael Guédez y Víctor Villamizar. Vayan nuestras felicitaciones a todos ellos.

Los problemas 107 al 112 son los propuestos en dicha competencia.

1 Problemas propuestos

107. Determine todas las ternas de números reales (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xyz &= 8, \\ x^2y + y^2z + z^2x &= 73, \\ x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 &= 98. \end{aligned}$$

108. Una pulga salta sobre puntos enteros de la recta numérica. En su primer movimiento salta desde el punto 0 y cae en el punto 1. Luego, si en un movimiento la pulga saltó desde el punto a y cayó en el punto b, en el siguiente movimiento salta desde el punto b y cae en uno de los puntos $b + (b - a) - 1$, $b + (b - a)$, $b + (b - a) + 1$. Demuestre que si la pulga ha caído dos veces sobre el punto n, para n entero positivo, entonces ha debido hacer al menos t movimientos, donde t es el menor entero mayor o igual que $2\sqrt{n}$.

109. Sea $p > 3$ un número primo. Si

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^p} = \frac{n}{m}$$

donde el máximo común divisor de n y m es 1, demuestre que p^3 divide a n.

110. Dados dos enteros positivos a y b, se denota por $(a \bigtriangledown b)$ el residuo que se obtiene al dividir a por b. Este residuo es uno de los numeros 0, 1,..., $b-1$. Encuentre todas las parejas de números (a, p) tales que p es primo y se cumple que

$$(a \bigtriangledown p) + (a \bigtriangledown 2p) + (a \bigtriangledown 3p) + (a \bigtriangledown 4p) = a + p.$$

111. Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y A_1 un punto en el arco menor BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Sean A_2 y A_3 puntos en los lados AB y AC respectivamente, tales que $\angle BA_1A_2 = \angle OAC$ y $\angle CA_1A_3 = \angle OAB$. Demuestre que la recta A_2A_3 pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

112. Dado un entero positivo n, en un plano se consideran $2n$ puntos alineados A_1, A_2,..., A_{2n}. Cada punto se colorea de azul o rojo mediante

el siguiente procedimiento: En el plano dado se trazan n circunferencias con diámetros de extremos A_i y A_j, disyuntas dos a dos. Cada A_k, $1 \leq k \leq 2n$, pertenece exactamente a una circunferencia. Se colorean los puntos de modo que los dos puntos de una misma circunferencia lleven el mismo color. Determine cuántas coloraciones distintas de los $2n$ puntos se pueden obtener al variar las n circunferencias y la distribución de los dos colores.

2 Soluciones

58. [**10**(1) (2002) p. 86.] Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio cúbico, cuyos coeficientes a, b, c y d son números reales. Se sabe que existen cuatro enteros consecutivos, k, $k+1$, $k+2$ y $k+3$, tales que $P(k)$, $P(k+1)$, $P(k+2)$ y $P(k+3)$ son números enteros. Demostrar que, para cualquier entero m, $P(m)$ es un número entero.

Solución por Ignacio Larrosa Cañestro, A Coruña, España. Haciendo el cambio $y = x - k$, podemos considerar sólo el caso $k = 0$. Llamando $r = P(0)$, $s = P(1)$, $t = P(2)$ y $u = P(3)$, formamos la tabla de diferencias, cuya tercera fila ser constante, al tratarse de un polinomio cúbico:

$$\begin{array}{ccccccc}
r & & s & & t & & u \\
& s-r & & t-s & & u-t & \\
& & t-2s+r & & u-2t+s & & \\
& & & u-3t+3s-r & & &
\end{array}$$

Entonces

$$P(x) = r + x(s-r) + \frac{x(x-1)}{2}(t-2s+r) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}(u-3t+3s-r),$$

que se ve fácilmente que es entero para valores enteros de x.

El resultado se generaliza para cualquier polinomio de grado n que tome valores enteros para $n+1$ argumentos enteros consecutivos.