

Control por realimentación dinámica de salida de un Motor DC de Escobillas

Control of a DC Brush Motor via Dynamic Output Feedback

Atilio Morillo (amorillo@luz.edu.ve)

Centro de Investigación de Matemática Aplicada
Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela

Miguel Ríos-Bolívar (riosm@ula.ve)

Departamento de Sistemas de Control
Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela

Vivian Acosta de Contreras (acostav@ula.ve)

Departamento de Cálculo
Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela

Resumen

El problema de estabilización por realimentación de salida de un motor DC de escobillas es presentado y resuelto. El enfoque empleado consiste en la reconstrucción asintótica de una ley de control estabilizante por realimentación del estado, sin necesidad de utilizar una función de Lyapunov y mediante la aplicación de un principio de separación. Primeramente, se diseña una ley de control robusta por realimentación del estado (de información completa) y, luego, se sintetiza una ley de control dinámica (con observación de los estados), la cual recupera asintóticamente la ley de control de información completa. Simulaciones digitales ilustran el excelente desempeño de las trayectorias del motor DC de escobillas, controladas por la ley de control dinámica por realimentación de salida.

Palabras y frases clave: Control de sistemas no lineales, estabilización por realimentación, control de motores.

Abstract

The output feedback stabilization problem for a DC brush motor is presented and solved. The used approach is the asymptotic reconstruction of a stabilizing control law by state feedback, without the need of using a Lyapunov function and applying a separation principle.

First, a robust control law by state feedback (with complete information) is designed, and then a dynamic control law (with observation of the states) is synthesized, with asymptotic recuperation of the complete information control law. Digital simulations show an excellent behavior of the DC brush motor trajectories, controlled by the dynamic output feedback control law.

Key words and phrases: Nonlinear systems control, feedback stabilization, motor's control.

1 Introducción

Los métodos de control por moldeo de energía han atraído el interés de muchos investigadores en los últimos años. Una característica sobresaliente de estos métodos, en el marco del problema de estabilización, corresponde a visualizar los sistemas físicos como la interconexión de sub-sistemas o componentes más simples que almacenan o disipan energía. Los métodos de moldeo de energía intentan preservar la estructura física Lagrangiana o Hamiltoniana en lazo cerrado, lo cual es altamente favorable en el problema de regulación de sistemas electro-mecánicos. Uno de estos métodos corresponde al enfoque de control basado en pasividad y asignación de amortiguamiento e interconexión (IDAPBC, de sus siglas en inglés), el cual ha sido aplicado, exitosamente, en el problema de regulación asintótica de posición en sistemas electro-mecánicos con moldeo total de la energía (ver Rodríguez y Ortega, 2003).

Por otro lado, el problema de regulación de posición de un motor DC de escobillas (BDC, de las siglas en inglés) ha sido estudiado y resuelto con el uso de técnicas de sistemas lineales. El requerimiento de un mejor desempeño de los controladores diseñados ha conducido, en años recientes, a la aplicación de técnicas de diseño no lineal. Por ejemplo, Dawson et al. (1998) proponen un diseño tipo *backstepping*, mediante la síntesis de leyes de control tanto por realimentación de salida como realimentación del estado. Además, Acosta y Ríos-Bolívar (2003) proponen un enfoque *forwarding*, mientras que Morillo,

Ríos-Bolívar y Acosta (2005) desarrollan un diseño en el marco de los sistemas Hamiltonianos de Puerto Controlado. Estos dos últimos enfoques logran una solución al problema de regulación del BDC con el diseño de un controlador de información completa.

Una ley de control por realimentación completa del estado para el BDC tiene la desventaja de requerir mediciones de la corriente eléctrica, la velocidad y la posición de la carga. Adicionalmente, el sensor de velocidad de carga, basado en el uso de tacómetros, típicamente produce una señal de ruido, deteriorando el sistema de lazo cerrado. Dado que una reducción de sensores disminuye el costo de todo el sistema de control, investigamos la construcción de observadores para estimar la corriente eléctrica y la velocidad de carga y usarlos en controladores estabilizantes de la posición de carga en lazo cerrado; en otras palabras, un controlador por realimentación de salida. En los últimos años, el problema de estabilización asintótica de sistemas no lineales por medio de regulación de salida ha sido ampliamente estudiado. En particular, la clase de sistemas que son lineales en los estados no medidos ha recibido especial atención, como es el caso del enfoque propuesto por Freeman y Kokotović (1996). Una novedosa técnica de diseño ha sido desarrollada por Karagiannis, Astolfi y Ortega (2003), basada en ideas tomadas de la teoría de regulación de sistemas no lineales y de las nociones de inmersión e invarianza (ver Astolfi y Ortega, 2003). Siguiendo esta técnica de diseño, un controlador que regula la posición de carga es desarrollado en este trabajo para el modelo electro-mecánico del motor DC de escobillas, bajo la hipótesis que solo mediciones de la posición de carga son disponibles para la realimentación y, además, el conocimiento de un modelo exacto de la dinámica del sistema electro-mecánico.

El enfoque empleado consiste en la aplicación de un principio de separación, el cual establece que es posible resolver el problema de regulación propuesto, siempre que dos sub-problemas sean resueltos. El primer sub-problema se refiere a encontrar una ley de control de realimentación de estado robusta de información completa, la cual ha sido sintetizada en Morillo, Ríos-Bolívar y Acosta (2005), para la regulación del BDC. El segundo problema conduce al diseño de una ley de control dinámica estabilizante, por inyección de salida. Esto permite obtener un controlador dinámico de realimentación de salida y globalmente estabilizante (con estimación de los estados no medidos). Una característica importante es que el mecanismo de estabilización no depende de la construcción de una función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado (Karagiannis, Astolfi y Ortega, 2003).

La sección 2 presenta la metodología propuesta en Karagiannis, Astolfi y Ortega (2003) para resolver el problema de estabilización de salida de siste-

mas electro-mecánicos. La aplicación del esquema propuesto conjuntamente con simulaciones digitales son presentadas en la sección 3, para mostrar el desempeño del controlador sintetizado; la sección 4 presenta algunos comentarios y conclusiones.

2 Estabilización de Sistemas No Lineales por Realimentación de Salida

2.1 Definiciones básicas

A continuación se presentan algunas definiciones de interés y que son de importancia trascendente para claridad de los resultados considerados en el presente trabajo.

Considere el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz en x y continua a trozos en t .

Definición 2.1. *El origen $x = 0$ es el punto de equilibrio para (1) si*

$$f(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 2.2. *Una función continua $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ se dice pertenecer a la clase \mathcal{K} si ésta es estrictamente creciente y $\gamma(0) = 0$. Además, se dice que ésta pertenece a la clase \mathcal{K}_∞ si $a = \infty$ y $\gamma(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow \infty$.*

Definición 2.3. *Una función continua $\beta : [0, a] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se dice pertenecer a la clase \mathcal{KL} si para cada s dado la aplicación $\beta(r, s)$ pertenece a la clase \mathcal{K} con respecto a r , y para cada r dado $\beta(r, s)$ es decreciente con respecto a s y $\beta(r, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$. Se dice que esta función pertenece a la clase \mathcal{KL}_∞ si, además, para cada s dado la aplicación $\beta(r, s)$ pertenece a la clase \mathcal{K}_∞ con respecto a r .*

Estas funciones de comparación permiten escribir las definiciones de estabilidad en los siguientes términos (ver Krstić et al., 1995):

Definición 2.4. *El punto de equilibrio $x = 0$ de (1) es*

- uniformemente estable, si existe una función $\gamma(\cdot)$ de clase \mathcal{K} y una constante positiva c , independiente de t_0 , tal que

$$|x(t)| \leq \gamma(|x(t_0)|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (2)$$

$$\forall x(t_0) \mid |x(t_0)| < c;$$

- uniforme y asintóticamente estable, si existe una función $\beta(\cdot, \cdot)$ de clase \mathcal{KL} y una constante positiva c , independiente de t_0 , tal que

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) \quad , \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (3)$$

$$\forall x(t_0) \mid |x(t_0)| < c;$$

- exponencialmente estable, si (3) se satisface con $\beta(r, s) = kre^{-\alpha s}$, $k > 0$, $\alpha > 0$;
- global y uniformemente estable, si la condición (2) se satisface con $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ para todo estado inicial $x(t_0)$;
- global, uniforme y asintóticamente estable, si (3) se satisface con $\beta \in \mathcal{KL}_\infty$ para todo estado inicial $x(t_0)$; y
- global y exponencialmente estable, si (3) se satisface para todo estado inicial $x(t_0)$ y con $\beta(r, s) = kre^{-\alpha s}$, $k > 0$, $\alpha > 0$.

Las definiciones descritas anteriormente permiten introducir la noción de *estabilidad entrada-estado*, propuesta por Sontag (1989,1990), la cual juega un rol fundamental en el método de diseño empleado en el presente trabajo.

Definición 2.5. Se dice que el sistema

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (4)$$

con f continua a trozos en t y localmente Lipschitz en x y u , es estable de entrada a estado (ISS, de sus siglas en inglés) si existe una función β de clase \mathcal{KL} y una función γ de clase \mathcal{K} , tal que para cualesquiera $x(0)$ y u continuas y acotadas en $[0, \infty)$, la solución existe para todo $t \geq 0$ y satisface

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |u(\tau)| \right) \quad (5)$$

para todo t_0 y t , tal que $0 \leq t_0 \leq t$.

El siguiente teorema establece la conexión entre la existencia de una función de Lyapunov y la estabilidad entrada-estado.

Teorema 2.1. *Suponga que para el sistema (4) existe una función continua y diferenciable $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^m$,*

$$\gamma_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \gamma_2(|x|)$$

$$|x| \geq \rho(|u|) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -\gamma_3(|x|)$$

donde γ_1 , γ_2 y ρ son funciones \mathcal{K}_∞ y γ_3 es una función clase \mathcal{K} . Luego, el sistema (4) es ISS con $\gamma = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ \rho$.

Una función V que satisface las condiciones del Teorema 2.1 es llamada una función de Lyapunov ISS. A continuación se presenta una caracterización de ISS en términos de pasividad.

Teorema 2.2. *Para el sistema*

$$\dot{x} = f(x, u)$$

las siguientes propiedades son equivalentes:

- *el sistema es ISS,*
- *existe una función de Lyapunov ISS suave,*
- *existe una función suave, definida positiva y radialmente no acotada, V , y funciones ρ_1 y ρ_2 de clase \mathcal{K}_∞ , tal que la siguiente desigualdad de pasividad se satisface*

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq -\rho_1(|x|) + \rho_2(|u|).$$

2.2 Estabilización por realimentación de salida

A los fines de garantizar una mayor claridad sobre el esquema aplicado en este trabajo, incluimos en esta sección la metodología propuesta por Karagiannis, Astolfi y Ortega (2003). Considere una clase de sistemas descrito por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A(y, u)\eta + B(y, u) \\ \dot{y} &= \psi_0(y, u) + \psi_1(y, u)\eta \end{aligned} \tag{6}$$

con el estado $(\eta, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, la salida y y la entrada de control $u \in \mathbb{R}^m$. Se asume que solo la salida y está disponible para realimentación. Conjuntamente con el sistema (6), consideramos una salida de desempeño ρ definida como

$$\rho = h(y, \eta) \quad (7)$$

para alguna aplicación $h(\cdot)$.

Se propone el siguiente problema de regulación. Considere el sistema (6) y la variable de desempeño definida en (7). Encontrar una ley de control por realimentación dinámica de salida, descrita por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}} &= \pi(y, \hat{\eta}) \\ u &= \alpha(y, \hat{\eta}) \end{aligned} \quad (8)$$

tal que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6)-(8) sean acotadas y, además,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0. \quad (9)$$

Cabe destacar que, cuando $\rho = 0$, no implica que $y = 0$ y $\eta = 0$. Nótese que la variable de desempeño ρ ha sido introducida porque, en general, no es posible regular el estado completo (η, y) a cero (o cualquier otro equilibrio deseado). Esto permite tratar, adicionalmente, el caso de control adaptativo, cuando η contiene parámetros desconocidos.

El problema de la regulación de salida del sistema (6) puede ser resuelto por aplicación de la siguiente proposición, formulada en Karagiannis, Astolfi y Ortega (2003).

Proposición 2.1. Considere un sistema descrito por ecuaciones de la forma (6) y una variable de desempeño ρ definida como en (7). Suponga que las siguientes hipótesis se satisfacen

(A1) Existe una ley de control de información completa

$$u^* = \alpha(y, \eta) \quad (10)$$

tal que todas las trayectorias del sistema en lazo cerrado (6)-(8) sean acotadas y tal que la condición (9) se satisfaga. Además, el sistema (6) con $u = \alpha(y, \eta + d(t))$ es globalmente estable de entrada acotada y estado acotado (ISS), con respecto a la entrada $d(t)$.

(A2) Existe una aplicación $\beta(y)$ tal que el sistema

$$\dot{z} = \left(A(y, u) - \frac{\partial \beta}{\partial y} \psi_1(y, u) \right) z \quad (11)$$

es uniforme y globalmente estable para cualquier par y, u ; y adicionalmente, $z(t)$ es tal que, para cualquier par y y η fijo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\alpha(y, \eta + z(t))] = \alpha(y, \eta) \quad (12)$$

Entonces existe una ley de control dinámica de realimentación de salida descrita por ecuaciones de la forma (8), que resuelve el problema de regulación por realimentación de salida.

En razón de que la prueba de esta proposición es constructiva y permite diseñar la ley de control por realimentación de salida, la reproducimos en el presente trabajo.

Prueba. Considere un sistema como en (6) y el controlador dinámico por regulación de salida

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}} &= w \\ u &= \alpha(y, M\hat{\eta} + \beta(y)), \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\alpha(\cdot)$ está definida como en la ecuación (10), M es una matriz invertible, $\beta(y) : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es la aplicación considerada en la hipótesis (A2) y w es una nueva señal de control. Sea la variable de error

$$z = M\hat{\eta} - \eta + \beta(y), \quad (14)$$

y observe que el sistema en lazo cerrado (6)-(13) puede ser escrito en coordenadas η, y y z como

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A(y, \alpha(y, \eta + z))\eta + B(y, \alpha(y, \eta + z)) \\ \dot{y} &= \psi_0(y, \alpha(y, \eta + z)) + \psi_1(y, \alpha(y, \eta + z))\eta \\ \dot{z} &= Mw - A(y, \alpha(y, \eta + z))(-z + M\hat{\eta} + \beta(y)) \\ &\quad - B(y, \alpha(y, \eta + z)) + \frac{\partial \beta}{\partial y} \left[\psi_0(y, \alpha(y, \eta + z)) \right. \\ &\quad \left. + \psi_1(y, \alpha(y, \eta + z))(-z + M\hat{\eta} + \beta(y)) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Nótese que, con la excepción de los términos $A(y, \alpha(y, \eta + z))z$ y $\frac{\partial \beta}{\partial y}[\psi_1(y, \alpha(y, \eta + z))z]$, todos los términos de la ecuación \dot{z} pueden ser medidos. En razón de la

invertibilidad de la matriz M es posible seleccionar una ley w como

$$w = M^{-1} \left[A(y, \alpha(y, \eta + z))(M\hat{\eta} + \beta(y)) + B(y, \alpha(y, \eta + z)) - \frac{\partial \beta}{\partial y} \psi_0(y, \alpha(y, \eta + z)) - \frac{\partial \beta}{\partial y} \psi_1(y, \alpha(y, \eta + z))(M\hat{\eta} + \beta(y)) \right] \quad (16)$$

produciendo la dinámica en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A(y, \alpha(y, \eta + z))\eta + B(y, \alpha(y, \eta + z)) \\ \dot{y} &= \psi_0(y, \alpha(y, \eta + z)) + \psi_1(y, \alpha(y, \eta + z))\eta \\ \dot{z} &= \left[A(y, \alpha(y, \eta + z)) - \frac{\partial \beta}{\partial y} \psi_1(y, \alpha(y, \eta + z)) \right] z \end{aligned} \quad (17)$$

Por la suposición (A2), la variable z permanece acotada para todo t , de tal manera que la ecuación (12) se satisface; además, por la suposición (A1), y y η están acotadas para todo t y la condición (9) se cumple, con lo cual se concluye la prueba. \square

Observe que z puede verse como una entrada acotada que perturba al sistema (6) controlado por la ley (10), pero que, en virtud de la condición ISS de la suposición (A2), el estado (y, η) es estable. Además, la suposición (A2) de la Proposición 2.1 puede ser reemplazada por una condición más estricta que garantice

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0,$$

para todo y y u . Bajo estas condiciones, $\hat{\eta}$ puede usarse para construir una estimación asintótica de los estados no medidos η , obteniéndose el controlador dinámico de realimentación de salida

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}} &= M^{-1} \left[A(y, \alpha(y, M\hat{\eta} + \beta(y)))(M\hat{\eta} + \beta(y)) + B(y, \alpha(y, M\hat{\eta} + \beta(y))) - \frac{\partial \beta}{\partial y} \psi_0(y, \alpha(y, M\hat{\eta} + \beta(y))) - \frac{\partial \beta}{\partial y} \psi_1(y, \alpha(y, M\hat{\eta} + \beta(y)))(M\hat{\eta} + \beta(y)) \right] \\ u &= \alpha(y, M\hat{\eta} + \beta(y)). \end{aligned} \quad (18)$$

La suposición (A2) de la Proposición 2.1 significa que es posible reconstruir asintóticamente la ley de control de información completa (10), a partir de la ley de control dinámica (18).

3 Regulación por realimentación de salida de un Motor BDC

En esta sección se aplica la metodología descrita anteriormente para resolver el problema de regular la posición angular de un motor BDC, el cual maneja una carga conectada al extremo del eje (ver Fig. 1). Un modelo matemático que describe las ecuaciones dinámicas del motor BDC (Dawson, Hu y Burg, 1998), en el cual se han integrado los parámetros del mismo, es el siguiente

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + B\dot{q} + N\text{sen}(q) &= i \\ L\frac{di(t)}{dt} &= v - Ri - \tau_L\dot{q} \end{aligned} \quad (19)$$

donde

- M Inercia constante
- N Término de carga
- B Coeficiente de fricción
- q Posición angular de la carga
- i Corriente del rotor
- L Inductancia del rotor
- R Resistencia del rotor
- τ_L Coeficiente contra-electromotriz
- v Voltaje de control

El sistema (19) puede ser representado en términos de variables de acoplo inductivo, λ , posición angular de la carga, θ , y momento mecánico, p ,

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda} &= -\frac{R}{L}\lambda + \frac{R}{L}\tau_L\theta + u \\
 \dot{\theta} &= \frac{p}{J} \\
 \dot{p} &= \frac{\tau_L}{L}\lambda - \frac{\tau_L^2}{L}\theta - N_0\text{sen}(\theta) - \frac{r_m}{J}p
 \end{aligned} \tag{20}$$

donde

- u Voltaje aplicado al circuito
- r_m Parámetro asociado a la fricción
- J Inercia rotacional constante
- N_0 Término asociado a la energía potencial,

y están relacionados de la forma siguiente

$$J = M\tau_L; \quad r_m = B\tau_L; \quad N_0 = N\tau_L.$$

La representación del sistema (20) permite escribir al mismo en la forma de un sistema Hamiltoniano de puerto controlado, necesaria para aplicar el enfoque IDA-PBC para el moldeo de la energía del sistema en lazo cerrado. Este fue el enfoque utilizado en Morillo, Ríos-Bolívar y Acosta (2005) para regular el motor BDC, bajo la suposición de que todo el vector de estado estaba disponible para realimentación.

El problema de regulación por realimentación de salida del motor BDC (20) se formula en los siguientes términos: deseamos sintetizar una ley de control dinámica de la forma (18), cuando la única variable disponible para realimentación es la posición angular θ . Esto es equivalente a considerar que la velocidad del rotor y la corriente del circuito no son medidas.

Debido a la linealidad de las variables no medidas es posible, denotando $\eta = [\lambda \ p]^T$, $y = \theta$, escribir el sistema (20) como

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ \frac{\tau_L}{L} & \frac{-r_m}{J} \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} \frac{R}{L}\tau_L y + u \\ \frac{-\tau_L^2}{L}y - N_0\text{sen}(y) \end{bmatrix} \\
 \dot{y} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \eta
 \end{aligned} \tag{21}$$

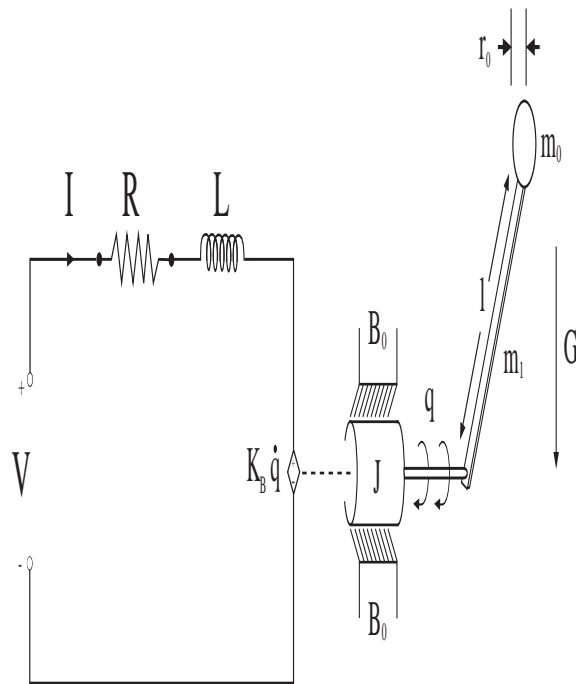


Figura 1: Diagrama de Motor BDC con una carga acoplada

Expresando el sistema (21) como en (6), se obtienen las matrices

$$\begin{aligned}
 A(y, u) &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ \frac{\tau_L}{L} & \frac{-r_m}{J} \end{bmatrix} \\
 B(y, u) &= \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \tau_L y + u \\ \frac{-\tau_L^2}{L} y - N_0 \text{sen}(y) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{22}$$

y las funciones

$$\psi_0(y, u) = 0, \quad \psi_1(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Con el propósito de verificar las condiciones de la suposición (A2), se muestra a continuación que el sistema (21) es ISS, al emplearse la ley de realimentación

de información completa del estado $u^* = \alpha(y, \lambda, p)$, para lo cual consideramos la función escalar y definida positiva

$$V = (1/2)[\lambda^2 + p^2 + y^2],$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias del sistema resulta

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left(-\frac{R}{L}\lambda^2 - \frac{r}{J}p^2 \right) + \frac{R}{L}\tau_L\lambda y + u^*\lambda \\ & - \frac{\tau_L^2}{L}p - Npsen(y) + \frac{1}{J}py. \end{aligned} \quad (24)$$

Luego, rearmado convenientemente los términos, la ecuación (24) puede reescribirse

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\left(\frac{R}{L} + \frac{r}{J}\right)V + \frac{R}{L}\tau_L\lambda y + u^*\lambda + \frac{R}{L}(p^2 + y^2) \\ & + \frac{r}{J}(\lambda^2 + y^2) - \frac{\tau_L^2}{L}p - Npsen(y) + \frac{1}{J}py, \end{aligned} \quad (25)$$

la cual representa la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{V} + \left(\frac{R}{L} + \frac{r}{J}\right)V = F(\lambda, p, y, u^*),$$

cuya solución es de la forma

$$V(t) = V_0 \exp(-at) + \exp(-at) \int_0^t \exp(a\tau) F(\cdot) d\tau$$

donde $a = R/L + r/J$ es una constante positiva y $F(\cdot)$ es una función continua. Observe que esta solución $V(t)$ es exponencialmente convergente para toda condición inicial $V_0 = V(0)$, y esta propiedad de estabilidad se preserva cuando la ley de control original $u^* = \alpha(y, \lambda, p)$ es perturbada en la forma $u = \alpha(y, \lambda + d_1(t), p + d_2(t))$, donde $d(t) = (d_1(t), d_2(t))^T$ es una función acotada de t . Luego, aplicando las desigualdades

$$\|\lambda\| \leq 2V, \quad \|p\| \leq 2V, \quad \|y\| \leq 2V$$

resulta entonces que, ante entradas acotadas $d(t)$, el estado $(y, \lambda, p)^T$ permanece acotado; en otras palabras, el sistema (21) es ISS.

Bajo estas condiciones y siguiendo la prueba de la Proposición (2.1), se debe diseñar un controlador por realimentación dinámica de la salida de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= w \\ u &= \alpha(y, \hat{\eta} + \beta(y))\end{aligned}\quad (26)$$

donde α se define como en (10), $\beta(y) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^2$ se define de acuerdo a la Hipótesis (A2), y w es una nueva señal de control. Observe que la ley de realimentación completa (10) corresponde, en este caso, a la ley de control tipo IDA-PBC sintetizada en Morillo, Ríos-Bolívar y Acosta (2005)

$$\begin{aligned}u &= Ri_d + \varphi \left[-K_p \bar{\theta} \left(\frac{2 + \bar{\theta}^2}{\sqrt{(1 + \bar{\theta}^2)^3}} \right) + (i - i_d) \times \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{L}{\tau_L} \left(N_o \cos(\theta) - K_p \left(\frac{-2 + \bar{\theta}^2}{\sqrt{(1 + \bar{\theta}^2)^5}} \right) \right) + \tau_L \right] \right] \\ &\quad + \gamma \left[\frac{p}{J} + (i - i_d) \varphi \right]\end{aligned}\quad (27)$$

con $\bar{\theta} := \theta - \theta_*$, donde θ_* es la posición angular deseada, y además,

$$\begin{aligned}i &= \frac{\lambda - \tau_L \theta}{L} \\ i_d &= \frac{1}{\tau_L} \left[N_o \sin(\theta) + \left(r_m - r_{a1} - r_{a2} \frac{p^2}{1 + p^2} \right) \frac{p}{J} \right] \\ &\quad - \frac{K_p \bar{\theta}}{\tau_L} \left(\frac{2 + \bar{\theta}^2}{\sqrt{(1 + \bar{\theta}^2)^3}} \right) \\ \varphi &= \frac{-L}{\tau_L J} \left[r_m - r_{a1} - r_{a2} \left(\frac{p^2(3 + p^2)}{(1 + p^2)^2} \right) \right] \\ \gamma &= \frac{1}{\tau_L} \left[N_o \cos(\theta) + K_p \left(\frac{-2 + \bar{\theta}^2}{\sqrt{(1 + \bar{\theta}^2)^5}} \right) \right] \\ &\quad - \varphi \left(r_{a1} + r_{a2} \frac{p^2}{1 + p^2} \right).\end{aligned}\quad (28)$$

Sea la variable de error

$$z = \hat{\eta} + \beta(y) - \eta, \quad (29)$$

el sistema en lazo cerrado (21)-(26) puede ser escrito en coordenadas η , y y z como

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ \frac{\tau_L}{L} & \frac{-r_m}{J} \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \tau_L y + u \\ \frac{-\tau_L^2}{L} y - N_0 \text{sen}(y) \end{bmatrix} \\ \dot{y} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \eta \\ \dot{z} &= w - \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ \frac{\tau_L}{L} & \frac{-r_m}{J} \end{bmatrix} (-z + \hat{\eta} + \beta) \\ &\quad - \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \tau_L y + u \\ \frac{-\tau_L^2}{L} y - N_0 \text{sen}(y) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\partial \beta}{\partial y} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} (-z + \hat{\eta} + \beta) \right).\end{aligned}\tag{30}$$

Observe que, a excepción de los términos que aparecen multiplicados por z , todos los demás términos en la ecuación \dot{z} son medidos. Luego, es posible seleccionar w para obtener la ley de estimación

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ \frac{\tau_L}{L} & \frac{-r_m}{J} \end{bmatrix} (\hat{\eta} + \beta) + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \tau_L y + u \\ \frac{-\tau_L^2}{L} y - N_0 \text{sen}(y) \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{\partial \beta}{\partial y} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} (\hat{\eta} + \beta) \right)\end{aligned}\tag{31}$$

y, de esta forma, la dinámica en lazo cerrado resulta

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ \frac{\tau_L}{L} & \frac{-r_m}{J} \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \tau_L y + u \\ \frac{-\tau_L^2}{L} y - N_0 \text{sen}(y) \end{bmatrix} \\ \dot{y} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \eta \\ \dot{z} &= \left(\begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ \frac{\tau_L}{L} & \frac{-r_m}{J} \end{bmatrix} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \right) z.\end{aligned}\tag{32}$$

En consecuencia, bajo las condiciones de la hipótesis (A2), la variable z permanece acotada para todo t y la condición de convergencia (12) se satisface. Para este propósito es necesario seleccionar una función $\beta(y)$ apropiada. En este caso se propone la función

$$\beta(y) = \begin{bmatrix} JKy \\ -r_m y \end{bmatrix}, \quad (33)$$

la cual permite obtener la dinámica de error

$$\dot{z} = \bar{A}z = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & -K \\ \frac{\tau_L}{L} & 0 \end{bmatrix} z \quad (34)$$

A los fines de garantizar estabilidad asintótica de la dinámica del error, los autovalores de \bar{A} ,

$$\mu_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - K\frac{\tau_L}{L}},$$

deben ubicarse en el semiplano izquierdo del plano complejo, mediante la selección adecuada del parámetro de diseño K . De esta manera se satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [\alpha(y, \eta + z(t))] &= \alpha(y, \eta). \end{aligned} \quad (35)$$

En otras palabras, se satisfacen las condiciones en (A1) y (A2) y, por aplicación de la Proposición 2.1, se sintetiza el observador dinámico (31) que integra la ley de realimentación de salida (26). La ley $u = \alpha(y, \hat{\eta} + \beta(y))$ en (26) se obtiene al reemplazar en la ley de control de información completa (27)-(28) el vector η por el correspondiente vector $\hat{\eta} + \beta(y)$, es decir,

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ p \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \hat{\lambda} + JKy \\ \hat{p} - r_m y \end{bmatrix}, \quad (36)$$

Obteniendo un nuevo conjunto de expresiones para i, i_d, φ y γ , a partir de (28), al aplicar (36),

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{(\hat{\lambda} + JKy) - \tau_L \theta}{L} \\
 i_d &= \frac{1}{\tau_L} \left[N_o \text{sen}(\theta) - K_p \bar{\theta} \left(\frac{2 + \bar{\theta}^2}{\sqrt{(1 + \bar{\theta}^2)^3}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left[r_m - r_{a1} - r_{a2} \frac{(\hat{p} - r_m y)^2}{1 + (\hat{p} - r_m y)^2} \right] \frac{(\hat{p} - r_m y)}{J} \right] \\
 \varphi &= \frac{-L}{\tau_L J} \left[r_m - r_{a1} \right. \\
 &\quad \left. - r_{a2} \left(\frac{(\hat{p} - r_m y)^2 (3 + (\hat{p} - r_m y)^2)}{(1 + (\hat{p} - r_m y)^2)^2} \right) \right] \\
 \gamma &= \frac{1}{\tau_L} \left[N_o \text{cos}(\theta) + K_p \left(\frac{-2 + \bar{\theta}^2}{\sqrt{(1 + \bar{\theta}^2)^5}} \right) \right] \\
 &\quad - \varphi \left[r_{a1} + r_{a2} \frac{(\hat{p} - r_m y)^2}{1 + (\hat{p} - r_m y)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{37}$$

Estas nuevas expresiones conforman la ley de realimentación de salida

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\eta}} &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ \frac{\tau_L}{L} & \frac{-r_m}{J} \end{bmatrix} (\hat{\eta} + \beta) + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \tau_L y + u \\ \frac{-\tau_L^2}{L} y - N_o \text{sen}(y) \end{bmatrix} \\
 &\quad - \frac{\partial \beta}{\partial y} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} (\hat{\eta} + \beta) \right)
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 u &= Ri_d + \varphi \left[-K_p \bar{\theta} \left(\frac{2 + \bar{\theta}^2}{\sqrt{(1 + \bar{\theta}^2)^3}} \right) + (i - i_d) \times \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{L}{\tau_L} \left(N_o \text{cos}(\theta) - K_p \left(\frac{-2 + \bar{\theta}^2}{\sqrt{(1 + \bar{\theta}^2)^5}} \right) \right) + \tau_L \right] \right] \\
 &\quad + \gamma \left[\frac{\hat{p} - r_m y}{J} + (i - i_d) \varphi \right]
 \end{aligned}$$

que logra la regulación asintótica de la posición angular del motor BDC. Los resultados anteriores se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. Considere el modelo del sistema electromecánico (21), correspondiente a un motor BDC representado en coordenadas de posición angular, acoplo inductivo y momento mecánico. Se define la variable de desempeño $\rho = \theta - \theta^*$ y se suponen las siguientes condiciones de operación

(B1) El acoplo inductivo λ y el momento mecánico p son variables de estado no medidas.

(B2) La posición angular θ es la única variable de estado disponible para realimentación.

(B3) Todos los parámetros son constantes y conocidos.

Bajo estas condiciones de operación, la ley de control por realimentación dinámica de salida (37)-(38) resuelve el problema de regulación de salida del motor BDC y, además, satisface las condiciones de convergencia (35). Esto significa que la ley de control de información completa, tipo IDA-PBC, (27) es recuperada asintóticamente.

Con el propósito de evaluar el desempeño del controlador dinámico (37)-(38), se efectuaron simulaciones digitales del motor BDC regulado por éste. Los parámetros utilizados para el motor BDC fueron: $M = 0,005242 K_g - \frac{m^2}{rad}$, $N = 2,2839 K_g - \frac{m}{seg^2}$, $B = 0,018 N - \frac{seg}{rad}$, $K_B = 0,90 N - \frac{m}{A}$, $R = 5 \Omega$, y $L = 25 \times 10^{-3} H$. Los parámetros de diseño usados fueron $K_p = 5$, $r_{a1} = 1$, $r_{a2} = 2$, $K = 40$. La figura 2 muestra el desempeño del controlador, en la tarea de regular la salida θ a la posición deseada $\theta_* = \pi/2$. En la figura se observa la convergencia de la posición angular al valor deseado, en aproximadamente un segundo. En la misma figura también se muestran las trayectorias controladas de la velocidad angular y corriente del rotor (no medidas) y sus correspondientes valores estimados, obtenidos a partir del observador de estados. Como puede apreciarse, los valores estimados convergen asintóticamente a los valores reales no medidos, en correspondencia con las condiciones de estabilidad garantizadas a partir de la matriz \bar{A} .

4 Conclusiones

El problema de regulación por realimentación de salida, correspondiente a la posición angular de un motor DC de escobillas, ha sido resuelto. La metodología de diseño utilizada está basada en la aplicación de un principio de separación equivalente a resolver, primero, el problema de sintetizar una ley de control de información completa, que en este caso correspondió a la ley

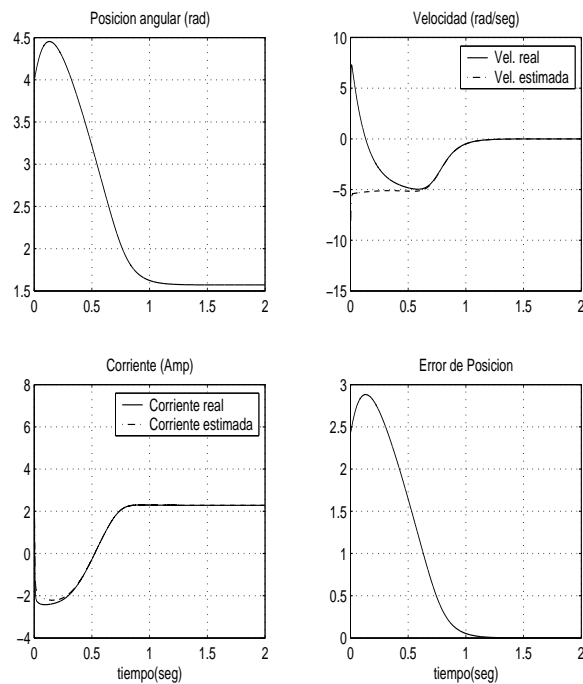


Figura 2: Regulación de salida de un motor BDC

de control encontrada previamente en Morillo, Ríos-Bolívar y Acosta (2005), por aplicación del enfoque IDA-PBC; luego, como segundo paso, se sintetiza una ley de control por realimentación dinámica de la salida, la cual recupera asintóticamente las propiedades estabilizantes de la ley control de información completa. Se realizaron simulaciones digitales que demostraron el excelente desempeño del motor BDC regulado por la ley de control por realimentación dinámica de la salida. Una posible extensión de estos resultados corresponde a la síntesis de controladores adaptativos por realimentación de salida, al considerar que algunos parámetros del sistema son desconocidos.

Referencias

- [1] V. Acosta de C., M. Ríos-Bolívar, *Control Forwarding de un motor DC de escobillas*, IV Congreso de Automatización y Control, CAC'03, Mérida, Venezuela, 2003.
- [2] A. Astolfi, R. Ortega, *Immersion and Invariance: a new tool for Stabilization and Adaptive Control of Nonlinear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, **4**(2003), 590–606.
- [3] D. M. Dawson , J. Hu, and T. C. Burg, *Nonlinear Control of Electric Machinery*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [4] R. Freeman, and P. Kokotović, *Tracking Controllers for Systems Linear in the unmeasured states*, Automatica, **32**(1996), 735–746.
- [5] D. Karagiannis, A. Astolfi, and R. Ortega, *Two Results for Adaptive Output Feedback Stabilization of Nonlinear Systems*, Automatica, **39**(2003), 858–866.
- [6] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P. Kokotović, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [7] A. Morillo, M. Ríos-Bolívar, V. Acosta, *Feedback Regulation of a DC Motor via Interconnection and Damping Assignment*, 16th IFAC World Congress, Praga, República Checa, 2005.
- [8] H. Rodríguez, R. Ortega, *Stabilization of Electromechanical Systems via Interconnection and Damping Assignment*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, **13**(2003), 1095–1111.
- [9] E. D. Sontag, *Smooth stabilization implies coprime factorization*, IEEE Transactions on Automatic Control, **34**(1989), 435–443.
- [10] E. D. Sontag, *Further facts about input to state stabilization*, IEEE Transactions on Automatic Control, **35**(1990), 473–476.