Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 No. 2(2006), pp. 153–170

Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX

History of Linear Algebra up to the Dawn of the 20th Century

Deivi Luzardo (dluzardo@luz.edu.ve)
Alirio J. Peña P. (apena@luz.edu.ve)
Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias,
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Resumen

En este trabajo se ofrece una aproximación al desarrollo histórico del álgebra lineal. Se trata el origen del concepto de sistema de ecuaciones lineales y algunos métodos para hallar sus soluciones, como el de eliminación gaussiana, el cual fue concebido originalmente por los matemáticos chinos del siglo II a.C. También, se tratan los inicios de los conceptos de matriz, determinante, rango y nulidad, forma canónica de Jordan, espacio vectorial, independencia lineal, dimensión y transformación lineal, entre otros.
Palabras y frases clave: Ecuación lineal, matriz, determinante, espacio vectorial, transformación lineal, forma canónica.

Abstract

In this work we offer an approximation to the historical development of linear algebra. We treat the origin of the concept of system of linear equations and some methods to compute their solutions, as gaussian elimination, which was originally conceibed by the chinese matematicians of the 2nd century b.C. Also, we treat the sources of the concepts of matrix, determinant, rank and nullity, Jordan canonical form, vector space, linear independence, dimension and linear transformation, among others.
Key words and phrases: Linear equation, matrix, determinant, vector space, linear transformation, canonical form.

Recibido 08/07/2006. Revisado 30/10/2006. Aceptado 30/11/2006.
MSC (2000): Primary: 01A02, 11C20; Secondary: 01A85.

1 Introducción

Desde tiempos remotos, y como parte esencial de su propio desarrollo evolutivo, el hombre ha procurado entender los diferentes aspectos que forman parte de su vida cotidiana. Para ello ha procurado disponer de herramientas que le permitan no sólo poder cazar y recolectar con mayor eficiencia, sino también poder medir longitudes, ordenar y contar objetos, o reconocer fenómenos periódicos de la naturaleza. Como parte de este proceso de elaboración, el hombre ha construido modelos que le han facilitado la tarea de resolver problemas concretos o que le han ayudado a encontrar una solución al problema específico que lo afecta. Todo esto con el propósito de favorecer tanto su forma de vida como la de los miembros de su comunidad. Muchos de estos problemas tienen un carácter lineal, es decir, pueden plantearse mediante algunas ecuaciones lineales con coeficientes en algún campo de números y con unas pocas variables o incógnitas. Recordemos que la palabra *ecuación* proviene del latín *aequatio* que significa *igualdad.* Así, una ecuación es una igualdad que contiene algunas cantidades desconocidas. En particular, una *ecuación lineal* es una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los *coeficientes*, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las *variables* o *incógnitas* y b el *término constante*. Un *sistema de ecuaciones lineales* es un conjunto finito de ecuaciones lineales.

Problemas tan amplios como la distribución de cosechas o el presupuesto de un país, el cálculo de la órbita de un asteroide (o de un planeta) y el cálculo de la estabilidad estructural de un edificio en ingeniería civil, entre muchos otros, pueden plantearse en términos de sistemas de ecuaciones lineales para obtener su solución.

El presente trabajo ha sido dividido atendiendo a criterios temáticos más que cronológicos, brindándole un mayor valor a las ideas que a las fechas. Así, en la sección 1 se incluyen algunos antecedentes históricos de los sistemas de ecuaciones lineales de la mano de matemáticos babilonios y chinos. En la sección 2 se incluyen algunas notas sucintas sobre la aparición del sistema de los números complejos con Cardano y las distintas demostraciones del teorema fundamental del álgebra por parte de D'Alembert, Euler, Frontenex, Lagrange y Gauss. En la sección 3 se tratan los inicios de las noción de vector y espacio vectorial. La sección 4 incluye las fuentes del álgebra de matrices, destacando los aportes de Cayley, Sylvester, Hamilton y Cauchy, entre otros. En la sección

5 se tratan los orígenes de la noción de determinante de una matriz cuadrada desde Leibniz en Europa y Seki en Japón, pasando por Maclaurin, Cramer, Bézout, Gauss, Cauchy, Jacobi y Sarrus, entre otros, hasta llegar a su actual presentación axiomática debida al genio de Kronecker y Weierstrass. La sección 6 trata sobre el fundamental Teorema de Cayley-Hamilton y, finalmente, en la sección 7 se ofrece una conclusión (a modo de justificación) del presente trabajo.

2 Algunos antecedentes históricos

> *"La Matemática tiene la virtud de elevar el alma, obligándola a razonar acerca de los números."*
> Platón

Los primeros rudimentos de lo que hoy conocemos como *Álgebra lineal* se han encontrado en el documento matemático más antiguo que ha llegado hasta nuestros días: el *papiro Rhind*, conservado en el *British Museum* con algunos fragmentos en el *Brooklyn Museum*, y conocido también como el *Libro de Cálculo*, el cual fue escrito por el sacerdote egipcio Ahmés hacia el año 1650 a.C. y exhumado en Tebas en 1855 ([11], Vol. I, pag. 40). En este valioso documento se consideran las ecuaciones de primer grado, donde la incógnita aparece representada por un "ibis" que significa *escarbando en el suelo*, posiblemente por su primogénita aplicación a la agrimensura. Este documento contiene 85 problemas redactados en escritura hierática y fue concebido originalmente como un manual práctico para los no iniciados. Según el propio Ahmés, este texto es una copia de uno más antiguo (2000-1800 a.C.), algunos de cuyos documentos proceden quizá de períodos más antiguos.

Los babilonios sabían como resolver problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, usando completación de cuadrados o sustitución, así como también ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales tales como:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x \pm y & = & a \\ x^2 \pm y^2 & = & b \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} x \pm y & = & a \\ xy & = & b \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcl} ax + y + cz & = & d \\ mx + ny + p & = & h \\ rx + sy + qz & = & 0. \end{array}\right.$$

Un ejemplo concreto de una tal situación ha llegado hasta nuestros días en una de las famosas *tablillas de Croquetta*, que datan del último período sumerio hacia el año 2100 a.C., es el siguiente problema:

"Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de 2/3 de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de 1/2 saco por yarda cuadrada. Si la producción total es de 1100 sacos, ¿cuál es el tamaño de cada campo?"

Para una excelente referencia sobre la matemática babilónica, véase [11] (Vol. I, Cap. 2). Por su parte, los matemáticos chinos durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal. Por ejemplo, en el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*, publicado durante la Dinastia Han, aparece el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+z & = & 39 \\ 2x+3y+z & = & 34 \\ x+2y+3z & = & 26 \end{array}\right.$$

así como un método para su resolución, conocido como la regla "fan-chen", la cual, en esencia, es el conocido método de eliminación gaussiana de nuestros días. Es interesante recordar el problema que dió origen a este sistema lineal, el cual es similar al planteado por los babilonios:

"Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?"

Esta obra *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático* fue compuesta por el hombre de estado y científico Chuan Tsanom en el año 152 a.C. y en el se incluyeron sistemáticamente todos los conocimientos matemáticos de la época ([31], pág. 31). Es oportuno recordar que esta obra fue consultada por Carl Friederich Gauss (1777-1855) en un estudio sobre la órbita del asteroide *Pallas* ([17]). Usando observaciones de Pallas, tomadas entre los años 1803 y 1809, Gauss obtiene un sistema de seis ecuaciones lineales en seis incógnitas y dá un método sistemático para resolver tales ecuaciones, hoy día conocido como *eliminación gaussiana*.

Luego vendrían los aportes de los matemáticos islámicos y europeos, quienes siguieron cultivando el pensamiento lineal. Por ejemplo, Leonardo de Pisa (1180-1250), mejor conocido como Fibonacci, en su obra *Liber Quadratorum* publicada en 1225, estudió el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x^2 + a &= y^2 \\ x^2 - a &= z^2, \end{cases}$$

el cual es una generalización de un problema que le había propuesto Giovanni da Palermo (con $a = 5$). Algunos aspectos sobre la vida y obra de Leonardo de Pisa aparecen en [39].

Los matemáticos griegos, por su parte, no se preocuparon por los problemas lineales, a pesar de poseer un reconocido pensamiento lineal en sus consideraciones geométricas de origen pitagórico y de reminiscencias babilonias ([2]). No obstante, en sus trabajos se aprecian algunas tentativas del análisis diofántico, especialmente en el estudio de las magnitudes ([14], Libro V) y las propiedades aritméticas de los números enteros ([14], Libro VII). No olvidemos que la solución general de la ecuación de segundo grado aparece en los *Elementos* de Euclides ([14]).

3 Génesis de los números complejos y raíces de polinomios

Dos eventos cruciales en el desarrollo del álgebra lineal son: el descubrimiento del sistema de los *números complejos*, como una extensión del sistema $\mathbb{R}$ formado por los números reales, junto con las operaciones usuales de suma y multiplicación, y la primera prueba del llamado *teorema fundamental del álgebra*, el cual afirma que cada polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. Es bien conocido que este teorema es equivalente a que cada polinomio no constante con coeficientes reales puede ser factorizado en un producto de factores lineales y cuadráticos. Sobre este último resultado, el plural genio de Gauss le brindaría tal importancia que llegaría a ofrecer hasta cuatro demostraciones, siendo la primera de éstas su tesis doctoral de 1799, aunque se sabe que él conocía la prueba desde octubre de 1797. La segunda y tercera prueba fueron publicadas en 1816 y la cuarta en 1849.

Según B.L. van der Waerden ([39], pág. 56), el precursor de los números complejos fue el doctor en medicina, astrólogo, filósofo y matemático milanés Girolamo Cardano (1501-1576), por ser éste el primero en considerar expresiones de la forma $a + \sqrt{-b}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. En un contexto históricamente referido como pugnas entre Niccolò Tartaglia (1499-1557) y Cardano por la prioridad, y consecuente autoría, en la solución de la ecuación de tercer grado

$$x^3 + px = q \text{ con } p, q \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

surge una solución de Cardano, la cual le había sido sugerida por Tartaglia tal como el propio Cardano lo reconociera en su libro *Ars Magna* publicado en 1545 ([7], pág. 362). Esta solución involucra la raíz cuadrada de la expresión $(\frac{1}{3}q)^2 - (\frac{1}{3}p)^2$, la cual puede ser negativa. Estos casos son llamados *casus irreducibilis* por Cardano y en su *Ars Magna* muestra un método para obtener las soluciones de la ecuación (2). Así, los *casus irreducibilis* de Cardano son los números imaginarios de nuestros días y dieron origen a un nuevo sistema de números que extiende el de los números reales.

Para ilustrar el impacto de esta novedosa idea, Cardano en el Capítulo 37 de su *Ars Magna* plantea el siguiente problema: "*Dividir 10 en dos partes tales que su producto sea igual a 40.*" Al respecto, él escribió:

"*Es claro que este caso es imposible. No obstante, nosotros trabajamos así: dividimos 10 en dos partes iguales, haciendo cada una de 5. Éstas las elevamos al cuadrado, para formar 25. Sustraer 40 de los 25 así producidos, tal como se prueba en el capítulo sobre operaciones en el libro sesto, dejando un resto de -15, la raíz cuadrada del cual sumada a ó sustraida de 5 da las partes del producto el cual es 40. Éstas serán* $5 + \sqrt{-15}$ *y* $5 - \sqrt{-15}$."

Acto seguido, Cardano verifica que éstos dos números satisfacen las condiciones requeridas.

El problema de hallar las raíces de un polinomio con coeficientes reales ocupó gran parte de la atención de los matemáticos desde los árabes en la antigüedad, quienes usaron métodos aritmético-geométricos, pasando por los griegos (especialmente los pitagóricos y euclidianos) y sus razonamientos geométricos hasta llegar al siglo XVIII de nuestra era con la solución general de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado usando radicales (como en el caso de sus predecesores) y la demostración del teorema fundamental del álgebra. Recordemos que el descubrimiento del número $\sqrt{2}$ fue tratado con suma cautela por los pitagóricos, por razones de tipo místico, debido a que éste no es un *número racional* (i.e., una razón entre dos números enteros) y a pesar de ser una solución de la ecuación $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ que representa, según el conocido *teorema de Pitágoras*, la longitud de la hipotenusa del triángulo rectangulo con catetos iguales y de longitud 1.

Las soluciones de las ecuaciones de tercer y cuarto grado fueron obtenidas por matemáticos italianos del siglo XVI, a saber: Scipione del Ferro (1465-1526), Tartaglia y Cardano para la ecuación de tercer grado y Ludovico Ferrari (1522-1565), amigo y secretario de Cardano, para la ecuación de cuarto grado ([39]). Asimismo, la solución de las ecuaciones de quinto grado fue lograda por Charles Hermite (1822-1901) y Leopold Kronecker (1823-1891) a mediados del siglo XIX (véanse [5], [26] y [38]). Por otra parte, la imposibilidad de resolver por radicales las ecuaciones de grado mayor o igual a 5 se conoce como el *teorema de Abel* ([21], Cap. 5, Teorema 5.Y), en honor al matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), cuyo período vital, a pesar de su brevedad, dejó honda huella en la Matemática ([1]).

Sobre el teorema fundamental del álgebra, antes de la disertación doctoral de Gauss en 1799, ya se conocían otras cuatro pruebas de este importante resultado, dadas por: Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783), Frontenex y Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Sin embargo, en cada una de estas pruebas se asume la existencia de raíces del polinomio dado en algún sentido y luego se prueba que éstas son números complejos. Esta es la principal objeción que planteó Gauss a estas demostraciones, entre algunas otras. Algunos detalles sobre las primeras tres pruebas dadas por Gauss al teorema fundamental del álgebra aparecen en [39].

4 Lenguaje de vectores

El álgebra lineal tuvo un fuerte impulso gracias al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, tal como señalamos, y más recientemente, con los sistemas de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. En ambos contextos subyacen los importantes conceptos de *vector* y *espacio vectorial*.

A finales del siglo XVII fueron redescubiertas y desarrolladas las ideas originales de los babilonios, y principalmente de los chinos, sobre el pensamiento lineal. Recordemos que hasta el siglo XVIII el álgebra era, esencialmente, el arte de resolver ecuaciones de grado arbitrario. El matemático y filósofo francés, y uno de los iniciadores de la *Enciclopedia*, D'Alembert descubre que las soluciones de un sistema $Ax = b$ forman una variedad lineal. Asimismo, Euler, Lagrange y el propio D'Alembert se dan cuenta que la solución general del sistema homogéneo $Ax = 0$ es una combinación lineal de algunas soluciones particulares.

En 1843, el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) descubre los *Quaternions* como el primer y único anillo de división no conmutativo sobre los números reales ([19]-[20]), la unicidad fue probada por Georg Frobenius (1849-1917) en 1879 ([21], Cap. 7, Teorema 7.E). Años antes, en 1863, Karl Weierstrass (1815-1897) había probado que el cuerpo de los números complejos es el único cuerpo conmutativo sobre los números reales ([40]).

En esa época aparecen con Hamilton, Arthur Cayley (1821-1895) y Hermann Günther Grassmann (1809-1877) las nociones de *vector* y de *espacio vectorial*, como una axiomatización de la idea de "vector" manejada por los estudiosos de la Mecánica desde fines del siglo XVII, un hecho que representó la génesis del *Cálculo vectorial* y de la Matemática moderna. Además, considerado el maestro del álgebra lineal, Grassmann introduce el producto geométrico y lineal, siendo el primero de éstos equivalente a nuestro *producto vectorial*. Asimismo, introduce las nociones de *independencia lineal* de un conjunto de vectores, así como el de *dimensión* de un espacio vectorial, y prueba la clásica identidad:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

para cada par de subespacios U y W de un espacio vectorial ([18]).

5 Álgebra de matrices

El primero en usar el término "matriz" fué el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) en 1850 ([35]), quien definió una matriz como un *"oblong arrangement of terms"* (arreglo cuadrilongo de términos). A su regreso a Inglaterra en 1851, luego de un período migratorio en América, Sylvester establece contacto con Cayley, un joven abogado quien compartía su interés por la Matemática y que pronto se dedicaría exclusivamente a ella. Cayley rápidamente entendería la importancia del concepto de matriz y por el año de 1853 publica una nota en donde aparece por vez primera la inversa de una matriz ([10]). Más tarde, en 1858, publica su *Memoir on the theory of matrices*, la cual contiene la primera definición abstracta de matriz y donde se muestra que los arreglos de coeficientes estudiados anteriormente para las formas cuadráticas y las transformaciones lineales son casos especiales de este concepto general. Asimismo, Cayley desarrolla el álgebra matricial definiendo las operaciones básicas de suma, multiplicación y multiplicación por escalares, así como la inversa de una matriz invertible, junto con una construcción de la inversa de una matriz invertible en términos de su determinante y prueba que, en el caso de matrices 2×2, una matriz satisface su propia ecuación característica. Además, señala que tiene chequeado este resultado para matrices

3×3, indicando su demostración, pero afirma: *"I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree"*.

En 1870, el matemático francés Camille Jordan (1838-1922) publica su *Traité des substitutions et des équations algébriques* ([25]), en donde estudia una forma canónica para sustituciones lineales sobre cuerpos finitos de orden primo. En este contexto aparece por vez primera lo que hoy conocemos como la *forma canónica de Jordan*. Una presentación clásica de este importante resultado sobre un cuerpo arbitrario puede verse en [21] y [23].

Arthur Cayley es considerado como el fundador de la teoría de matrices, aunque históricamente fueron los matemáticos chinos los pioneros en esta materia y el término matriz es debido a Sylvester. Uno de los principales méritos de Cayley fue la introducción de las operaciones básicas de suma y multiplicación de matrices, aunque indicios de éstas ya aparecen en trabajos anteriores de Euler, Lagrange y Gauss. Cayley probó además que la multiplicación de matrices es asociativa e introduce las potencias de una matriz, así como las matrices simétricas y antisimétricas. Por tanto, siendo fiel a la *Historia de la Matemática*, Cayley merece ser considerado como el fundador del *álgebra de matrices*.

6 Los orígenes del determinante

Cardano en su *Ars Magna*, muestra una regla para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a la cual llama *regula de modo* y que, esencialmente, es la conocida *regla de Cramer* para resolver sistemas lineales 2×2. Sin embargo, a pesar de que Cardano no ofrece una definición formal del determinante, y con la ventaja del tiempo a su favor, en su método se pueden apreciar las primeras luces en esta dirección.

Tal como se apuntó antes, los inicios de la teoría de determinantes de matrices datan del siglo II a.C. con los matemáticos chinos. La idea de determinante apareció en Japón y Europa casi al mismo tiempo. En Japón, fue Takakasu Seki Kowa (1642-1708) el primero en publicar un trabajo sobre este tema. En efecto, en 1683, Seki escribió un manuscito tutulado *Método de resolver los problemas disimulados*, en el cual se incluyen algunos métodos matriciales expuestos en forma de tablas, al más puro estilo de los matemáticos chinos de esa época. Sin contar con un término que corresponda a la idea de determinante, Seki introduce los determinantes y ofrece métodos generales para calcularlos basados en ejemplos concretos, siendo capaz de calcular el determinante de matrices cuadradas de hasta orden 5.

La aparición de la noción de determinante en Europa fue durante ese mismo año de 1683, en una carta de Leibniz a Guillaume de l'Hôpital (1661-1704) en donde le explica que cierto sistema de ecuaciones lineales tiene solución. Leibniz usó la palabra "resultante" para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante y probó varios resultados sobre éstos resultantes, incluyendo uno que, en esencia, es la conocida *regla de Cramer*. Leibniz también conocía que un determinante se puede expander usando columnas, lo que hoy se conoce como la *expansión de Laplace*, y estudió los sistemas de coeficientes de ecuaciones, principalmente aquellos ligados a las formas cuadráticas en donde usó los determinantes.

En los años de 1730, Colin Maclaurin (1698-1746) escribió su *Tratado de álgebra*, el cual fue publicado en 1748, dos años después de su muerte. En este trabajo aparecen los primeros resultados sobre determinantes, se prueba la regla de Cramer para sistemas pequeños 2×2 y 3×3, y se indica como deducir el caso 4×4. El propio Gabriel Cramer (1704-1752) anunció la regla general para sistemas $n \times n$ en su *Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques*, publicado en 1750 ([12]). Sin embargo, ésta sólo aparece enunciada en un Apéndice y sin ofrecer prueba alguna de este hecho, conformándose el autor con señalar: *"Uno da el valor de cada incógnita formando n fracciones de las cuales el común denominador tiene tantos términos como existan permutaciones de n cosas"*.

Más adelante, en 1764, Etienne Bézout (1730-1783) muestra nuevos métodos para calcular determinantes, así como también Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) en 1771 ([37]). Al respecto, en 1772, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) lanza una fuerte crítica a los métodos de Cramer y Bézout señalándolos de ser imprácticos y en un artículo en el que estudia las órbitas de los planetas, describe un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales sin necesidad de calcularlos explícitamente. Además, sorprende Laplace al usar el término "resultante" para señalar lo que conocemos como determinante, pues, como apuntamos antes, éste es el mismo término usado por Leibniz y, según algunos historiadores, Laplace debió desconocer los trabajos de Leibniz.

Por su parte, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), en un artículo sobre Mecánica publicado de 1773, estudia identidades para determinantes funcionales 3×3. En este trabajo aparece por primera vez la interpretación del determinante como un volumen. En efecto, se prueba que el tetraedro formado por el origen $O(0,0,0)$ y los tres puntos $M(x,y,z)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ y $M_2(x_2,y_2,z_2)$ tiene volumen: $\frac{1}{6}[z(x_1y_2-y_1x_2)+z_1(yx_2-xy_2)+z_2(xy_1-yx_1)]$. Este resultado también es atribuido a Grassmann, quien prueba que el determinante del arreglo

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

representa el volumen del paralelépipedo determinado por los tres vectores fila.

El término "determinante" fue usado por vez primera por Gauss en sus *Disquisitiones arithmeticae* publicadas en 1801, en las cuales estudia las formas cuadráticas. Gauss usó este término pues éste "determina" completamente las propiedades de la forma cuadrática. Sin embargo, el concepto de determinante dado por Gauss no es el mismo que hoy conocemos. En este trabajo, Gauss considera los coeficientes de sus formas cuadráticas en arreglos rectangulares y describe la multiplicación matricial (la cual considera sólo como una *composición*, y no señala el concepto de álgebra matricial), así como la inversa de una matriz en el contexto de los arreglos de coeficientes de formas cuadráticas. En 1815, Gauss publica su memoria sobre determinantes ([17]). Años antes, en 1812, Cauchy introduce el término "determinante" en el sentido moderno ([9]). Este trabajo de Cauchy es el más completo de la época sobre determinantes, en donde no sólo se prueban algunos resultados bien conocidos, sino también otras nuevas propiedades sobre menores y adjuntos. Asimismo, se prueba por primera vez el *teorema de la multiplicación* para determinantes, $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. Cauchy también probó que los valores propios de una matriz simétrica con entradas complejas son números reales e introduce la *ecuación característica* de una matriz cuadrada ([9]). Un hecho por demás curioso es que durante una reunión celebrada en el *Instituto de Francia*, Binet lee un artículo en el cual se incluye también una prueba del teorema de la multiplicación, aunque esta última es menos satisfactoria que la dada por Cauchy.

Por otra parte, Cauchy en 1826 y en el contexto de las formas cuadráticas en n variables, usó el término "tabla" ("tableau") para la matriz de coeficientes, introdujó los valores propios de este tipo de matrices y probó algunos resultados sobre diagonalización de una matriz con el propósito de convertir una forma cuadrática en una suma de cuadrados. También, Cauchy introduce la idea de matrices similares (pero no así el término) y prueba que si dos matrices son similares, entonces éstas tienen la misma ecuación característica, lo cual había sido probado anteriormente por Hamilton durante el desarrollo de su teoría de cuaterniones. Asimismo, y de nuevo en el contexto de las formas cuadráticas, Cauchy prueba que cada matriz real simétrica es diagonalizable.

Jacques Sturm (1803-1855) dá una generalización del problema de los valores propios en el contexto de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En efecto, el concepto de un valor propio aparece 80 años después, también en trabajos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en contribuciones de D'Alembert sobre el movimiento de una cuerda con masas atadas a ésta en varios puntos.

Puede afirmarse que ni Cauchy ni Sturm tuvieron una visión de la generalidad de sus ideas. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) alrededor de 1830 y más tarde Kronecker y Weierstrass durante los años 1850 y 1860, también trabajaron con matrices, pero, de nuevo, sólo en casos especiales, y la noción de transformación lineal que comenzaba a surgír para la época.

En 1841, Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes ([24]), los cuales alcanzaron singular importancia, pues en ellos aparecen por vez primera una definición algoritmica del determinante y con la novedad de que las entradas en el determinante no sean especificadas, con lo cual sus resultados son igualmente aplicables tanto al caso en que las entradas eran números como cuando éstas sean funciones.

En 1841, Cayley publicó la primera contribución en idioma Inglés de la teoría de determinantes ([10]). En este artículo se usan dos líneas verticales sobre ambos lados del arreglo de los coeficientes de la matriz para denotar el determinante, una costumbre que se conserva hasta hoy. Cayley también probó que una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

La definición axiomática del determinante que hoy conocemos como la (única) función multilineal alternada y que toma el valor 1 en la matriz identidad se debe a Kronecker y Weierstrass. Las conferencias de Weiertrass fueron publicadas después de su muerte en 1903 en la nota *Sobre la teoría de determinantes* ([40]). En ese mismo año, las conferencias de Kronecker sobre determinantes fueron publicadas, también como obra póstuma, y donde se introduce el *producto tensorial* de espacios vectoriales. Con estas dos contribuciones la teoría moderna de determinantes comenzó a ocupar un lugar preponderante en la teoría de matrices. Uno de los primeros libros publicados en el siglo XX en donde se trata a las matrices por su propio interés es *Introduction to higher algebra*, escrito por Bôcher en 1907. Asimismo, Turnbull y Airen escribieron influyentes libros sobre esta materia durante los años 1930, mientras que Sir Thomas Muir (1844-1934) nos legó una descripción general de la historia de la teoría de determinantes, desde su descubrimiento por Seki y Leibniz en 1683 hasta 1920.

No podemos olvidar los aportes de Sylvester a la teoría de determinantes. Sylvester introdujo gran parte del lenguaje moderno del álgebra lineal y probó la llamada *Ley de inercia*, aunque ésta ya había sido descubierta por Jacobi. A Sylvester se debe el término matriz, como hemos mencionado, así como los primeros progresos de la teoría de autovalores de un operador lineal. En particular, Sylvester probó que los valores propios del operador lineal T^n son las potencias n-ésimas de los valores propios de T. En los cimientos del álgebra lineal también destacan las contribuciones de Henrich Sherz, quien demostró algunas de las propiedades básicas de los determinantes, tales como la linealidad en cada columna:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\det \begin{bmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

entre otras. Otro aporte de Sylvester a la teoría de matrices es el concepto de *nulidad* de una matriz cuadrada A, denotada por $n(A)$, introducido en 1884, como el mayor número entero positivo i tal que cada menor de A de orden $n - i + 1$ es cero, y probó que

$$\text{máx}\{n(A), n(B)\} \leq n(AB) \leq n(A) + n(B).$$

El norte de las investigaciones de Sylvester, junto con Cayley y Charles Hermite (1822-1901), siempre estuvo dirigido hacia la búsqueda de *invariantes* de matrices, es decir, propiedades que no cambian bajo ciertas transformaciones, siendo la nulidad uno de éstos invariantes.

7 Teorema de Cayley-Hamilton

El que cada matriz cuadrada con entradas en un cuerpo (conmutativo) arbitrario K satisface su propia ecuación característica, introducida por Cauchy como antes mencionamos, se conoce hoy día como el *teorema de Cayley-Hamilton*, es decir, si A es una tal matriz cuadrada, I es la matriz identidad de igual orden que A (y con entradas en K) y $p(x) = \det(xI - A) \in \mathrm{K}[x]$ (llamado el *polinomio característico de* A *en* $K[x]$), entonces $p(A) = 0$.

Este teorema de Cayley-Hamilton es un resultado medular para la teoría de matrices y fue probado originalmente por Cayley para matrices 2×2, como mencionamos antes, y posteriormente por Hamilton para matrices 3×3.

En 1878, Frobenius publica una de las más valiosas contribuciones a la teoría de matrices titulada *Sobre sustituciones lineales y formas bilineales*, en la cual trabaja con coeficientes de formas cuadráticas sin usar el término matriz ([15]). Sin embargo, prueba importantes resultados sobre matrices canónicas como representantes de clases de equivalencia de matrices y cita a Kronecker y Weiertrass por haber considerado casos especiales de este resultado en 1874 y 1868, respectivamente. Frobenius también prueba el resultado general de que cada matriz cuadrada satisface su ecuación característica. A pesar del hecho que Cayley y Hamilton sólo probaron casos pequeños del teorema de Cayley-Hamilton, Frobenius generosamente atribuyó este resultado a Cayley, a pesar de que fuése él mismo quien probó el teorema en su forma general. Años más tarde, en 1896, Frobenius habría de conocer la *Memoir on the theory of matrices* de Cayley de 1858 y a partir de entonces comienza a usar el término matriz.

Se debe destacar igualmente la influencia de Frobenius sobre el desarrollo de la noción de *transformación lineal*, la cual venía evolucionando desde el siglo XVIII con los trabajos de Cauchy, Weierstrass y Kronecker, entre otros, y que adoptaría su forma actual en 1918 de la mano del matemático alemán Hermann Weyl (1885-1955). A Frobenius también debemos las nociones de rango de una matriz (la cual usa en su trabajo sobre formas canónicas, así como la definición de *matrices ortogonales*), equivalencia y congruencia de matrices. En tal sentido, Frobenius probó que si A y B son matrices semejantes y f es un polinomio con coeficientes matriciales (y del mismo orden de A y B), entonces las matrices $f(A)$ y $f(B)$ también lo son.

A pesar de salirse del período establecido para este trabajo, es oportuno mencionar que, recientemente, Jenö Szigeti ([33]) tiene probada una identidad para matrices sobre un anillo con identidad arbitrario, a partir de la cual se deduce el teorema de Cayley-Hamilton para matrices sobre un anillo conmutativo con identidad y de característica cero.

8 Conclusión

Los conceptos y métodos del álgebra lineal han contribuido decisivamente al desarrollo de muchas áreas del conocimiento tanto dentro como fuera de la Matemática, entre las que podemos mencionar: la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, la teoría de códigos y criptografía, la teoría de decisiones, robótica, astronomía y programación lineal. No es exagerado afirmar que sus ideas y resultados aparecen en casi todo desarrollo humano.

Modernamente, las matrices, como los polinomios o las series de potencias formales, bien pueden considerarse como arreglos de datos de algún tipo dado (Sylvester), donde el álgebra que se establezca sobre éstas determina la manera en que éstos datos pueden combinarse para generar nueva información (Cayley). La formulación de un problema concreto en términos del álgebra lineal ha sido, y sin duda lo seguirá siendo, uno de los métodos más efectivos para hallar su solución. Herramientas tales como el determinante, las formas canónicas y las transformaciones lineales, entre muchas otras, contribuyen decisivamente a facilitar esta labor.

Es por ello que se justifica el estudio de éstos temas en la mayoria de las carreras tanto profesionales como técnicas. No obstante, no sólo basta con conocer la presentación que hoy día se le dá a cada uno de estos temas. Se requiera, además, de elementos de caracter histórico que motiven al interesado a continuar estudios superiores y, con no menos importancia, a sugerir soluciones a problemas concretos. Esperamos que este modesto ensayo sobre los orígenes del álgebra lineal hasta los primeros años del siglo XX, el cual ha sido complementado con numerosas referencias, en especial las que han sido publicadas (o traducidas) en nuestra lengua castellana, ayude a cumplir con éstos elevados objetivos didácticos.

9 Agradecimientos

Los autores desean dejar constancia de su agradecimiento a los árbitros de este trabajo por sus múltiples recomendaciones en cuanto a la presentación y organización final del mismo.

Referencias

[1] Abel, N. H., *Euvres*, 2 Vols., ed. Sylow et Lie, Christiana, 1881.

[2] Babini, J., *Historia de las ideas modernas en Matemática*, 3ra. edición, Colección de Monografías Científicas, Serie de Matemática, No. 4, Organización de Estados Americanos, Washington, D.C., 1980.

[3] Bell, E. T., *The development of Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1940 (2da. edición ampliada, 1945). Versión castellana de la 2da. edición en inglés: *Historia de las Matemáticas*, 2da. edición, Fondo de Cultura Económica, México, 1985 (1ra. reimpresión 1992).

[4] Bell, E.T., *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1937. Versión castellana: *Los grandes matemáticos (Desde Zenón a Poincaré): Su vida y sus obras*, Editorial Losada, Buenos Aires, 1948.

[5] Berry, T., Herrero, D., Kuplinsky, J., y Slutzki, R., *Las ecuaciones de quinto grado*, 3 Vols., Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación, Universidad Simón Bolívar, Caracas, 1981.

[6] Bourbaki, N., *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1969. Versión castellana: *Elementos de historia de las matemáticas*, 2da. edición corregida y aumentada, Alianza Universidad, Madrid, 1976.

[7] Boyer, C. B., *A history of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969. Versión castellana: *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad, Madrid, 1999.

[8] Calven, L.-J., *Histoire de l'écriture*, Plon, Paris, 1996. Versión castellana: *Historia de la escritura: de Mesopotamia hasta nuestros días*, Editorial Paidós, Barcelona, 2001.

[9] Cauchy, A.-L., *Euvres complétes*, 26 Vols. (2 series), Gauthier-Villars, Paris, 1882-1958.

[10] Cayley, A., *Collected mathematical papers*, 13 Vols., Cambridge University Press, Cambridge, 1889-1898.

[11] Colette, J.-P., *Histoire des mathématiques*, 2 Vols., Éditiones du renouveau pédagogique, Montreal, 1979. Versión castellana: *Historia de las Matemáticas*, 2 Vols., 2da. edición, Siglo XXI Editores, México, 1986.

[12] Cramer, G., *Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques*, Cramer et Philibert, Genève, 1750.

[13] Descartes, R., *Euvres*, ed. Ch. Adam et P. Tannery, 13 Vols., Paris, (L. Cerf), 1897-1913.

[14] Euclides, *Euclidis Elementa*, 5 Vols., ed. J.L. Heiderg, Lipsiae (Taubner), 1883-1888. Versión castellana: Euclides, *Elementos*, Biblioteca Clásica Gredos, Vols. 155 y 191, Editorial Gredos, Madrid, 1991 y 1994.

[15] Frobenius, G., *Gessammelte Abhandlungen*, (ed. J.-P. Serre), 3 Vols., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

[16] Gauss, C. F., *Disquisitiones arithmeticae*, 1801.

[17] Gauss, C. F., *Werke*, 12 Vols., Göttingen, 1870-1927.

[18] Grassmann, H., *Gesammelte Werke*, 3 Vols., Leipzig (Teubner), 1894-1911.

[19] Hamilton, W. R., *Sir William Rowan Hamilton (1805-1865): Mathematical papers*, Disponible en: `www.xxx.uk/`.

[20] Hamilton, W. R., *Lectures on quaternions*, Dublin, 1853.

[21] Herstein, I. N., *Topics in algebra*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass., 1964. Versión castellana: *Álgebra moderna*, Trillas, México, 1970.

[22] Hoffman, J.E., *Geschichte der Mathematik*, Walter de Gruyter & Co, Berlin. Versión castellana: *Historia de la Matemática*, 2 Vols., UTEHA, México, 1960. Una presentación conjunta más reciente y con el mismo título: Limusa/Noriega Editores, México, 2002.

[23] Hoffman, K., and Kunze, R., *Linear algebra*, Prentice-Hall, New York, 1961. Versión castellana: *Álgebra lineal*, Prentice-Hall Internacional, Madrid, 1973.

[24] Jacobi, C. G. J., *Gesammelte Werke*, 7 Vols., G. Reimer, Berlin, 1881-1891.

[25] Jordan, C., *Traité des substitutions et des équations algébriques*, 2da. ed., Gauthier-Villars y A. Blanchard, Paris, 1957.

[26] Klein, F., *Volesungen über das Ikosaeder*, Leipzig, 1884. Versión inglesa: Dover, 1956.

[27] Le Lionnais, F., *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, Paris, France, 1948. Versión castellana: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, EUDEBA, Buenos Aires, 1962.

[28] López García, B., *Breve historia de la Matemática: Con quince tablillas en el texto*, Editorial Dossat, Madrid, 1955.

[29] O'Connor, J. J., and Robertson, E. F., *Matrices and determinants.* Disponible en: `html://www.arXiv.com`

[30] Rey Pastor, J., y Babini, J., *Historia de la Matemática*, 2 Vols., 2da. edición, Gedisa, Barcelona, 1986.

[31] Ríbnikov, K., *Historia de las Matemáticas*, Editorial Mir, Moscú, 1987. (1ra. reimpresión 1991.)

[32] Sestier, A., *Historia de las Matemáticas*, Editorial Limusa, México, 1983.

[33] Szigeti, J., *Cayley-Hamilton theorem for matrices over an arbitrary ring*, Serdica Math. J. 32 (2006), 269-276.

[34] Solaeche, M. C., *El algoritmo de las operaciones elementales y la matriz escalonada reducida: Conceptos milenarios y orientales*, Divulg. Mat. 4 (1996), 55-60. Disponible en: `html://www.emis.de/journals/DM/`

[35] Sylvester, J. J., *Collected mathematical papers*, 4 Vols., Cambridge, 1904-1911.

[36] Taton, R. *et al.*, *Histoire générale des sciences*, 5 Vols., Presses Universitaires, Paris, France, 1961, 1964. Versión castellana: *Historia general de las ciencias*, 5 Vols., Ediciones Destino, Barcelona, 1975.

[37] Vandermonde, A., *Mémoire sur la résolution des équations*, Hist. de l'Acad. Royale des Sciences, año 1771, Paris (1774), pp. 365-416.

[38] Weber, H., *Lehrbuch der Algebra*, 3 Vols., Chelsea, New York, 1961.

[39] Waerden, B. L. van der, *A history of algebra: From al-Khwärizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[40] Weierstrass, K., *Mathematische Werke*, 7 Vols., Berlin (Mayer und Müller), 1894-1927.