Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 No. 2(2006), pp. 171–172

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@yahoo.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LATEX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LATEX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

119. (VIII OMCC, Panamá, 2006.)

Se consideran los enteros positivos

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006},$$

con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Halle la última cifra del número

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9.$$

120. (VIII OMCC, Panamá, 2006.) Sean Γ y Γ' dos circunferencias de igual radio con centros O y O' respectivamente. Γ y Γ' se cortan en dos pntos y A es uno de ellos. Se escoge un punto B cualquiera en Γ. Sea C el

otro punto de corte de la recta AB con Γ' y D un punto en Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demuestre que la longitud del segmento CD es constante, es decir que no depende de la elección de B.

121. (VIII OMCC, Panamá, 2006.) Para cada número natural n, se define $f(n) = \lfloor n + \sqrt{n} + 1/2 \rfloor$. Pruebe que para cada $k \geq 1$ la ecuación

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.

122. (VIII OMCC, Panamá, 2006.) El producto de varios nḿeros enteros mayores que 0 y distintos entre si, es múltiplo de $(2006)^2$. Determine el menor valor que puede tomar la suma de esos nḿeros.

123. (VIII OMCC, Panamá, 2006.) El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

   - Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
   - Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

   Determine el número de maneras de construir los puentes.

124. (VIII OMCC, Panamá, 2006.) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea I el punto de intersección de las diagonales AC y BD. Sean E, H, F y G puntos sobre los segmentos AB, BC, CD y DA respectivamente, tales que EF y GH se cortan en I. Sea M el punto de intersección de EG y AC y sea N el punto de intersección de HF y AC. Demuestre que

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}.$$