Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 1(2007), pp. 77–80

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@yahoo.com)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Los problemas 125 al 130 fueron propuestos en la IX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, celebrada en la ciudad de Mérida, Venezuela, durante los das 5 y 6 de junio. Cada día se propusieron tres problemas, contando los participantes con cuatro horas y media de tiempo para resolverlos.

En esta ocasión participaron 12 países, representados por 35 estudiantes.

Las medallas de oro se las llevaron Alejandro Jiménez Martínez (México), Antonio Ismael García Rodríguez (Cuba) y Luis ngel Isaas Castellanos (México).

La Copa El Salvador que se otorga al país con mayor progreso relativo le correspondió a Honduras, que además ser la sede la X Olimpada en el 2008.

Venezuela obtuvo una medalla de bronce (David Urdaneta, alumno del Liceo Los Robles, de Maracaibo) y una mencin de honor otorgada a Estefanía Ordaz.

1 Problemas propuestos

125. *(IX OMCC, Problema 1.)* La OMCC es una competencia anual de Matemáticas. En el 2007 se lleva a cabo la novena olimpiada. ¿Para cuáles enteros positivos n se cumple que n divide al año en que se realiza la n-ésima olimpiada?

126. *(IX OMCC, Problema 2.)* Sean ABC un triángulo, D y E puntos en los lados AC y AB, respectivamente, tales que las rectas BD, CE y la bisectriz que parte de A concurren en un punto P interior al triángulo. Demuestre que hay una circunferencia tangente a los cuatro lados del cuadrilatero $ADPE$ si y sólo si $AB = AC$.

127. *(IX OMCC, Problema 3.)* Sea S un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos p, q de S, con $p \neq q$, hay elementos a, b, c de S, no necesariamente diferentes entre sí, con $a \neq 0$, de manera que el polinomio $F(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que $F(p) = F(q) = 0$. Determine el máximo número de elementos que puede tener el conjunto S.

128. *(IX OMCC, Problema 4.)* Los habitantes de cierta isla hablan un idioma en el cual todas las palabras se pueden escribir con las siguientes letras: a, b, c, d, e, f, g. Se dice que una palabra *produce* a otra si se puede llegar de la primera a la segunda aplicando una o más veces cualquiera de las siguientes reglas:

    (a) Cambiar una letra por dos letras de acuerdo a la siguiente regla:

    $$a \to bc,\ b \to cd,\ c \to de,\ d \to ef,\ e \to fg,\ f \to ga,\ g \to ab.$$

    (b) Si se encuentran dos letras iguales rodeando a otra, ellas se pueden quitar. Ejemplo: $dfd \to f$.

    Por ejemplo, $cafed$ produce a $bfed$, porque

    $$cafed \to cbcfed \to bfed.$$

    Demuestre que en esta isla toda palabra *produce* a cualquier otra palabra.

129. *(IX OMCC, Problema 5.)* Dados dos numeros enteros no negativos m, n, con $m > n$, se dirá que m *termina en* n si es posible borrar algunos

dígitos de izquierda a derecha de m para obtener n. Por ejemplo, 329 termina en 9 y en 29, únicamente. Determine cuántos números de tres dígitos terminan en el producto de sus dígitos.

130. *(IX OMCC, Problema 6.)* Desde un punto P exterior a una circunferencia S se trazan tangentes que la tocan en A y B. Sea M el punto medio de AB. La mediatriz de AM corta a S en C (interior al ΔABP), la recta AC corta a la recta PM en G, y la recta PM corta a S en el punto D exterior al triangulo ΔABP. Si BD es paralelo a AC, demuestre que G es el punto donde concurren las medianas del ΔABP.

131. *(Propuesto por Fernando Castro, UPEL, Maturín, Venezuela.)* ¿Son isomorfos los grupos aditivos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$?

2 Soluciones

117. [**14**(1) (2006) p. 94.] Encuentre todos los números reales a tales que el polinomio

$$P(x) = x^4 + 2ax^3 + 2a^2x^2 + 2ax + 1$$

tiene al menos una raíz real.

Solución por Elias Segundo Velazco Villanueva, IUTM y UNEFA, Maracaibo, Venezuela. Si x es una raíz real de P, entonces

$$2a^2x^2 + 2a(x^3 + x) + x^4 + 1 = 0,$$

y considerando esto como una ecuación de segundo grado en a debe ser

$$(2(x^3 + x))^2 - 4(2x^2)(x^4 + 1) \geq 0,$$

que desarrollando equivale a

$$-4x^6 + 8x^4 - 4x^2 \geq 0,$$

o bien

$$-4x^2(x^4 - 2x^2 + 1) \geq 0,$$

o

$$4x^2(x^2 - 1)^2 \leq 0.$$

Como $x = 0$ no es raíz de P, lo anterior sólo puede ocurrir si $x = 1$ o $x = -1$. En el primer caso

$$0 = P(1) = 2a^2 + 4a + 2 = 2(a + 1)^2,$$

y por lo tanto $a = -1$.

En el segundo caso

$$0 = P(-1) = 2a^2 - 4a + 2 = 2(a-1)^2,$$

y por lo tanto $a = 1$.

En conclusión, los reales a con la propiedad pedida son solamente 1 y -1.