

Problemas y Soluciones

José Heber Nieto

Los siguientes problemas fueron propuestos en el número anterior de Divulgaciones Matemáticas. Los repetimos para dar tiempo a nuestros lectores a enviar sus soluciones, las mejores de las cuales serán publicadas a partir del próximo número.

Problema 1

Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos tal que si $i \neq j$ entonces $|z_i - z_j| > 1$.

- Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/z_n^\alpha$ converge absolutamente para todo real $\alpha > 2$.
- Muestre con un ejemplo que lo anterior no es cierto para $\alpha = 2$.

Problema 2

Sea $a > 2$ un número real y definamos una sucesión así: $x_0 = a$, $x_n = x_{n-1}^2 - 2$ para $n > 0$. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

Problema 3

Sea n un entero positivo y G un grafo con $2n$ vértices y al menos $n^2 + 1$ aristas.

- Pruebe que G contiene al menos un triángulo.
- ¿Puede afirmarse lo mismo si el grafo contiene $2n$ vértices y n^2 aristas?

Problema 4

Sea f una función continua a valores reales definida en la frontera S del cubo unitario $[0, 1]^n$ en R^n tal que las restricciones a cada cara $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ y $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ sean polinomios para $i = 1, \dots, n$. Pruebe que existe una función polinomial $P : R^n \rightarrow R$ cuya restricción a S es f .