Divulgaciones Matemáticas 3(1) (1995), 123–128

Estrategias del razonamiento matemático

Strategies of mathematical reasoning

Darío Durán C.

Departamento de Matemática
Facultad de Humanidades y Educación
Universidad del Zulia. Apartado Postal 526
Maracaibo 4001 - Venezuela
(dduran@luz.ve)

Resumen

Este artículo muestra cómo un profesor de matemática ve un ejercicio geométrico elemental y lo resuelve.

Abstract

This paper shows how a mathematics teacher sees an elementary geometrical problem and solves it.

La estrategia del razonamiento en Matemática

Una *estrategia educativa* es, a *grosso modo*, un proceso o acto para conocer de un asunto en una ciencia específica, y tiene como uno de sus objetivos dar a conocer el mundo a los niños para que éstos lo usen y expliquen. En particular, uno de los objetivos de la matemática es dar explicaciones sobre los hechos mundanos.

Toda estrategia educativa depende de múltiples y complejas variables. Sin embargo, haremos una drástica simplificación y diremos que ella depende de tres variables básicas: el discente x, el docente y, y el asunto de que se trate z. Pretender crear una estrategia global para la enseñanza de la matemática es equivalente a asegurar que existe una función $f(x, y, z)$, que va a producir resultados óptimos, independientemente de las variables x, y, z. Esto seguramente no será posible porque no existe una estrategia o conjunto de estrategias que ayuden al mismo universo de alumnos. Debemos aceptar, debido a nuestras propias experiencias, que una estrategia educativa no sirve para todos los alumnos, ni para todos los docentes.

No creemos que la falta de estrategias educativas de los profesores y maestros de la escuela elemental, sea la única causa del bajo rendimiento matemático, sino que la principal causa radica en la baja preparación matemática. Aunque es indudable que una buena preparación matemática no es suficiente para garantizar una buena enseñanza.

Los profesores universitarios se quejan, con razón, de que sus alumnos no saben razonar, y argumentan que es debido a que no les enseñaron a razonar. Tenemos serias dudas al respecto ya que los niños aprenden, al menos en sus inicios, por *imitación y experimentación.* **Pensamos que los niños no aprendieron a razonar porque nunca vieron a nadie razonando.**

A continuación se expone un modelo o ejemplo, resuelto minuciosamente, de cómo puede realizarse una clase de matemática que pueda ser útil para que los niños aprendan a razonar.

Este enunciado apareció propuesto en la III Olimpíada Iberoamericana de Matemática para estudiantes no universitarios.

Ejemplo

"Las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y las longitudes de las alturas del mismo también están en progresión aritmética. Demuestre que dicho triángulo es equilátero".

Discusión:

Considérese un triángulo ABC donde A, B, C denotan las medidas de sus ángulos; a, b, c denotan las longitudes de sus respectivos lados opuestos, y h_a, h_b, h_c denotan las longitudes de las alturas correspondientes a dichos lados. Debemos demostrar que "El triángulo ABC es equilátero". ¿ Cuándo un triángulo es equilátero? Hay muchas respuestas a esta interrogante y nos referiremos a las dos más simples: Un triángulo es equilátero si tiene sus lados iguales o tiene sus ángulos iguales, por lo que trataremos de mostrar que $a = b = c$ o que $A = B = C$. Sabemos que A, B, C forman una progresión aritmética, y para poder establecer una relación entre esos números deben colocarse en cierto orden. Supóngase que $A \leq B \leq C$. De la definición de progresión aritmética se sigue que $B - A = C - B$ lo cual es equivalente a escribir $2B = A + C$. O sea, el término intermedio de una progresión aritmética de tres términos es la media aritmética de los otros dos números. Esta es una propiedad de las progresiones aritmeticas. Si la igualdad anterior se sustituye dentro de la identidad geométrica $A+B+C = 180°$ se obtiene que $3B = 180°$, y al dividir por 3 resulta que $B = 60°$. Esto indica que vamos por el buen camino ya que los ángulos deben medir $60°$ cada uno. No conocemos por ahora otra relación entre los ángulos. De la otra hipótesis obtenemos que las longitudes h_a, h_b, h_c están también en progresión aritmética. ¿Cuál es el orden entre estas alturas? Para saber esto debe conocerse una relación entre las alturas y los ángulos. No recordamos en este momento una relación, pero sí podemos relacionar los ángulos y las alturas a través de los lados. En un triángulo, un ángulo es menor o igual que otro si y sólo si el lado opuesto al primero de esos ángulos es menor o igual que el lado opuesto al segundo ángulo. Esto induce a escribir que $a \leq b \leq c$. La relación entre los lados y sus alturas están dadas por las siguientes igualdades:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c. \tag{1}$$

Esto quiere decir que a mayor lado le corresponde menor altura, y viceversa. Por ende, se puede escribir que $h_c \leq h_b \leq h_a$. De la propiedad de las progresiones aritméticas se deduce que

$$2 \cdot h_b = h_a + h_c \tag{2}$$

¿Cómo continuar? Nótese que conocemos el ángulo $B = 60°$. Podemos relacionar los lados con los ángulos opuestos usando el teorema del seno o el teorema del coseno. El primero de ellos involucra dos ángulos y solamente conocemos uno de ellos. Luego, al usar el teorema del coseno en el triángulo ABC, se tiene que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 60°$. Pero, $\cos 60° = 1/2$ y al sustituir se observa que

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac. \tag{3}$$

Esta igualdad tiene la desventaja que relaciona los tres lados del triángulo y deseamos relacionar sólo dos de ellos. Si logramos reducir (3) a una ecuación que involucre sólo dos lados, entonces pudiéramos obtener una respuesta a nuestras interrogantes. Veamos las ecuaciones (1) y (2). Si en (2) apareciese $b \cdot h_b$ en vez de $a \cdot h_a$ y en vez de $c \cdot h_c$ al sustituir y simplificar por h_b obtendríamos una relación entre los lados. Esto puede hacerse multiplicando la igualdad (2) por el número ac. Así, (2) se convierte en $2ach_b = ach_a + ach_c$. Usando las propiedades conmutativa y asociativa del producto de números vemos que la última igualdad puede escribirse en la forma $2ach_b = c(a \cdot h_a) + a(c \cdot h_c)$. Usando (1) vemos que esta igualdad se convierte en $2ach_b = cb \cdot h_b + ac \cdot h_b$ y al dividir por h_b se ve que $2ac = ab + bc$. Es decir, se tiene la igualdad

$$2ac = b(a + c) \tag{4}$$

Hemos encontrado una relación entre a,b,c distinta de (3) como se quería. De (3) y (4) podemos eliminar b despejándola en (4) y sustituyendo en (3). Se obtendría de este modo una ecuación que ligue a y c. Esto tiene el inconveniente de tener cocientes y para evitarlos haremos lo siguiente: al elevar (4) al cuadrado se tiene que $4a^2c^2 = b^2(a + c)^2$ y colocando el valor de b^2 de (3) resulta la igualdad $4a^2c^2 = (a^2 + c^2 - ac)(a + c)^2$. Hemos encontrado así una relación entre a y c solamente. Efectuando las operaciones en el segundo miembro de esa igualdad vemos que

$$\begin{aligned}&(a^2 + c^2 - ac)(a + c)^2 = (a^2 + c^2 - ac)(a^2 + 2ac + c^2)\\ &= a^4 + 2a^3c + a^2c^2 + a^2c^2 + 2ac^3 + c^4 - a^3c - 2a^2c^2 - a^3c,\end{aligned}$$

que al simplificar se convierte en $4a^2c^2 = a^4 + c^4 + a^3c + ac^3$, y ésta se transforma en la igualdad $a^4 + c^4 + a^3c + ac^3 - 4a^2c^2 = 0$. Ahora bien, los dos primeros términos de la izquierda con la mitad del último término forman un producto notable. Podemos escribir $(a^4 - 2a^2c^2 + c^4) + (a^3c - 2a^2c^2 + ac^3) = 0$. Resulta entonces que

$$(a^2 - c^2)^2 + ac(a^2 + c^2 - 2ac) = 0,$$

que es equivalente a escribir $(a^2 - c^2)^2 + ac(a - c)^2 = 0$. Por consiguiente, se tiene que $[(a - c)(a + c)]^2 + ac(a - c)^2 = 0$. Al factorizar vemos que

$$(a - c)^2 \cdot [(a + c)^2 + ac] = 0.$$

Como el número encerrado en el corchete es positivo se sigue que $(a - c)^2 = 0$. Por ende, $a = c$ y hemos demostrado que los lados a y c son iguales. Al cambiar a por c en (4) resulta $2c^2 = b(c + c)$, es decir. $2c^2 = 2bc$ y al simplificar resulta que $c = b$. En consecuencia, hemos demostrado que $a = b = c$ y el triángulo es equilátero.

Solución:

Sean A, B, C las medidas de los ángulos del triángulo; sean a, b, c las longitudes de sus respectivos lados opuestos y sean h_a, h_b, h_c las longitudes de sus respectivas alturas. Supóngase que $A \leq B \leq C$. De la geometría elemental se tiene que

$$A + B + C = 180° \tag{a}$$

$$a \cdot ha = b \cdot hb = c \cdot hc \tag{b}$$

En un triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado, y viceversa. (c)

De (c), (b) y la hipótesis vemos que $a \leq b \leq c$ y $h_c \leq h_b \leq h_a$. Además,

$$2B = A + C \tag{d}$$

$$2 \cdot hb = ha + hc \tag{e}$$

ya que en una progresión aritmética de tres términos el intermedio es media aritmética de los otros dos. Sustituyendo (d) en (a) y simplificando resulta que $B = 60°$. Multiplicando (c) por ac y usando (b) se tiene la igualdad

$$2ac = b(a + c) \tag{f}$$

El teorema del coseno dice que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 60°$ y al sustituir este último valor se ve que

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac \tag{g}$$

Sustituyendo (g) en (f) previamente elevado al cuadrado, y realizando manipulaciones algebraicas se obtiene que $(a - c)^2 \cdot [(a + c)^2 + ac] = 0$. De aquí se ve que $a = c$. El triángulo es isósceles, y como uno de sus ángulos mide 60° se tendrá que dicho triángulo es equilátero.

Nótese que lo que hemos llamado la discusión del ejemplo no es nada más que una detallada justificación de cómo puede hallarse una solución, e intenta indicar la manera de cómo el autor fue pensando los detalles a medida que se iba sumergiendo en el problema.

Addenda

1. En la discusión de nuestro ejemplo hemos mostrado cómo se razonó su solución, y en la solución se escribió su resumen.

2. Es evidente que ésta es una visión particular sobre el problema y no es la única solución ni es la más simple.

3. En el transcurso de la solución fuimos dando respuestas a varias interrogantes que podemos usar como nuevos ejercicios para los alumnos. “Si en un triágulo sus ángulos están en progresión aritmética, pruebe que uno de ellos mide $60°$” y “Si las longitudes de las alturas de un triángulo están en progresión aritmetica, pruebe que el producto de dos lados del triángulo es igual a la semisuma de las longitudes de esos lados multiplicada por la longitud del tercer lado.” 4

4. Se puede también plantear la siguiente conjetura: El ejemplo es verdadero si la segunda hipótesis se sustituye por “las longitudes de las alturas están en progresión geométrica”.

Esperamos que el ejemplo resuelto indique la orientación de esta sección de la revista y recibiremos con agrado los comentarios sobre la misma así, como los artículos para ser incluidos en ella.