Divulgaciones Matemáticas v. 3, No. 1/2 (1995), 129–130

Problemas y Soluciones

Editor responsable
José Heber Nieto
(e-mail: jhnieto@luz.ve)

Reiteramos la invitación a nuestros lectorews para que envíen soluciones a los problemas propuestos en esta sección, las mejores de las cuales serán publicadas, y también a que propongan problemas interesantes y originales.

Problemas Propuestos

Problema 5

Pruebe que para todo entero n existe una matriz simétrica de 4×4 cuyos elementos diferentes son diez enteros consecutivos y cuyo determinante es n.

Problema 6 (Comunicado por Alirio J. Peña P.)

Sea X un conjunto infinito, A un anillo conmutativo con identidad $1 \neq 0$, $L = A^{(X)}$ la suma directa (externa) de $\mathrm{card}(X)$ (cardinal de X) copias de A, visto como A-módulo, y $R = \mathrm{End}_A(L)$ el anillo de endomorfismos A-lineales de L. Pruebe que R, visto como R-módulo a izquierda, tiene una base con n elementos, para cada entero positivo n.

Soluciones

Problema 3

Sea n un entero positivo y G un grafo con $2n$ vértices y al menos $n^2 + 1$ aristas.

a) Pruebe que G contiene al menos un triángulo.

b) ¿Puede afirmarse lo mismo si el grafo contiene $2n$ vértices y n^2 aristas?

Solución (por el Editor Responsable)

a) Para $n = 1$ el resultado es cierto por vacuidad. Supongámoslo cierto para un natural n y sea G un grafo con $2(n+1)$ vértices y al menos $(n+1)^2+1$ aristas. Sean u y v dos vértices adyacentes de G. Si u y v son ambos adyacentes a un tercert vértice w, entonces G contiene un triángulo. En caso contrario el grafo $G' = G-\{u,v\}$ que resulta al remover de G u, v y todas las aristas incidentes con ellos, tiene $2n$ vértices y al menos $(n+1)^2+1-(2n+1) = n^2+1$ aristas, y por hipótesis inductiva G' contiene algún triángulo.

b) No, ya que el grafo bipartito completo $K_{n,n}$ tiene $2n$ vértices, n^2 aristas y ningún triángulo.

Comentario: El profesor Julio Subocz hace notar que este problema es un caso particular de un teorema de Turán (ver Harary, "Graph Theory", p.17, Addison-Wesley, 1969).

Problema 4

Sea f una función continua a valores reales definida en la frontera S del cubo unitario $[0,1]^n$ en R^n tal que las restricciones a cada cara $f(x_1,\dots,x_{i-1},0,\ x_{i+1},\dots,x_n)$ y $f(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)$ sean polinomios para $i=1,\dots,n$. Pruebe que existe una función polinomial $P : R^n \to R$ cuya restricción a S es f.

Solución

Está contenida en el artículo "An algorithm for extending functions in hypercubes", en este mismo número.

Nota Al momento del cierre de la edición del presente número se recibió una solución del Br. Oswaldo Larreal.