Divulgaciones Matemáticas v. 4, No. 1/2 (1996), 21–31

Sobre los Invariantes de Matlis-Papp *

On Matlis-Papp's Invariants

Alirio J. Peña P.
Laboratorio de Álgebra Teórica y Computacional (LATyC)
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias. La Universidad del Zulia
Apartado Postal 526. Maracaibo 4001. Venezuela
(E-mail: apena@@luz.ve)

Resumen

En este artículo el autor muestra algunas condiciones para un anillo asociativo con identidad noetheriano a izquierda R, bajo las cuales los invariantes de Matlis-Papp del producto directo de una familia de R-módulos a izquierda son, precisamente, los de sus respectivos factores (Teorema 2). En particular, esto ocurre si R es un anillo artiniano conmutativo.
Palabras y frases clave: Módulo inyectivo indescomponible, conjunto anulador, anillo estable, anillo semiartiniano, anillo noetheriano.

Abstract

In this paper the author exhibits some conditions for a left noetherian associative ring with identity R, under which the Matlis-Papp's invariants of the direct product of an arbitrary family of letf R-modules are, precisely, those of their respective factors (Theorem 2). In particular this happens if R is an artinian commutative ring.
Key words and phrases: Indecomposable injective module, annihilating set, stable ring, semiartinian ring, noetherian ring.

---

*Este artículo fué financiado parcialmente por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de La Universidad del Zulia (CONDES) a través del proyecto de investigación No. 2083–95

1 Introducción

Recientemente, en [11], el autor inicia el estudio de un modelo general de L-asignaciones reticulares (fuertes y débiles) sobre la categoría de R-módulos a izquierda, denotada por R-Mod, siendo L un retículo completo y R un anillo asociativo con identidad $1 \neq 0$. Este modelo general sigue las directrices de [4] y está inspirado en modelos concretos estudiados en [2], [12], [13] y [14], entre otros.

Toda L-asignación reticular fuerte sobre R-Mod es también una L-asignación reticular débil sobre R-Mod. Más aún, un resultado bien conocido de Eben Matlis (véase [6]) dice que si R es un anillo noetheriano a izquierda y $\xi(R)$ denota una familia de representantes bajo isomorfismos de los R-módulos a izquierda inyectivos indescomponibles, entonces todo R-módulo a izquierda inyectivo E admite una única descomposición del tipo

$$E \cong \coprod_{i \in \Gamma_i} E_i^{(\Gamma_i)}$$

donde los $E_i \in \xi(R)$, cada Γ_i es un conjunto no-vacío y $\coprod$ denota el operador coproducto directo en la categoría R-Mod. La unicidad de esta descomposición se sigue del celebre Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya (véase [15]). En particular, si M es un R-módulo a izquierda y $E = E(M)$ denota la cápsula inyectiva de M, entonces la familia $\{E_i\}$ está unívocamente determinada por M y la asignación

$$\Psi_{inv} \colon M \to \{E_i\}$$

es un ejemplo de una $2^{\xi(R)}$-asignación reticular débil sobre la categoría R-Mod, la cual no necesita ser fuerte. Aquí, para cada conjunto X, 2^X denota el álgebra booleana formada por todos los subconjuntos de X.

El propósito fundamental de este artículo es presentar algunas condiciones sobre el anillo R bajo las cuales la asignación Ψ_{inv} es una $2^{\xi(R)}$-asignación reticular fuerte sobre la categoría R-Mod. Veremos que esta última afirmación está estrechamente relacionada con la bien conocida $2^{Spec(R)}$-asignación reticular débil

$$\Psi_{ass} \colon M \to Ass(M)$$

estudiada en la teoría de descomposición primaria clásica (véase la Proposición 3 siguiente) y, además, veremos que esta condición es válida cuando R es un anillo artiniano conmutativo (Corolario 1).

En la sección 1 se ofrecen la terminología y notaciones básicas, incluyendo las nociones de L-asignaciones reticulares fuerte y débil sobre la categoría R-Mod. En la sección 2 se introducen los invariantes de Matlis-Papp de un R-módulo a izquierda, para el caso en que R es un anillo noetheriano a izquierda y se prueba el mayor resultado de este artículo (Teorema 2). Concluímos este trabajo con una caracterización de los anillos semiartinianos conmutativos en términos de la asignación Ψ_{ass}.

2 Preliminares y Notaciones Básicas

En todo lo que sigue R denotará un anillo asociativo con identidad $1 \neq 0$ y $Spec(R)$ denotará la familia de ideales (biláteros) primos de R. Por un *módulo* entenderemos un R-módulo a izquierda unitario y denotaremos por R-Mod la categoría de módulos. $\xi(R)$ denotará una familia de representantes bajo isomorfismos de los módulos inyectivos indescomponibles. Para cada módulo M, $E(M)$ denotará la cápsula inyectiva de M y usaremos los símbolos ${}_RM$ y $N \leq_R M$ para indicar que M es un módulo y que N es un submódulo de M, respectivamente. L siempre denotará un retículo completo, cuya operación de supremo indicaremos por $\bigvee$. Además, denotaremos por $\prod$ y $\coprod$ a los operadores producto directo y coproducto directo en la categoría R-Mod, respectivamente. En particular, si M es un módulo, Γ es un conjunto y $M_i = M$ $(i \in \Gamma)$, usaremos las siguientes notaciones:

$$M^{(\Gamma)} := \coprod_{i \in \Gamma} M_i \;\; y \; M^{\Gamma} := \prod_{i \in \Gamma} M_i \; .$$

Un módulo no-nulo M se dice *primo* si y sólo si se tiene que $(0 : M) = (0 : N)$, para cada N tal que $(0) \neq N \leq_R M$. Es fácil ver que si M es un módulo primo, entonces $(0 : M) \in Spec(R)$. Ahora, para cada módulo M, pongamos

$$Ass(M) := \{(0 : N) \; / \; N \leq_R M \;\; y \; N \text{ es primo } \}$$

y

$$A(M) := \{ \; a \in R \; / \; aRx = (0), \text{ para algún } 0 \neq x \in M \; \}.$$

Este último conjunto $A(M)$ se llama el *conjunto anulador para* M (véase [12]). Sea $A \subseteq R$. Diremos que A es una *parte absorbente de* R si y sólo si $A = \emptyset$ ó si A satisface la siguiente condición:

$$(\alpha) \text{ Si } a \in A, \text{ entonces } Ra \cup aR \subseteq A.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}_a(R)$ a la familia de partes absorbentes de R. Es claro que

$$Ass(M) \in 2^{Spec(R)} \text{ y } A(M) \in \mathcal{P}_a(R), \text{ para cada módulo } M.$$

Además, $\mathcal{P}_a(R)$, junto con las operaciones usuales de intersección y unión de conjuntos ($\cap$ y $\cup$), es un retículo completo. R se dice un *anillo estable a izquierda* (veánse [3] y [9]) si y sólo si para cada módulo inyectivo E, la clase de módulos

$$\{_RM \ / \ Hom_R(M,E) = (0)\}$$

es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Supondremos que el lector está familiarizado con los trabajos [5] y [9]. Para una excelente referencia véase [1].

Una *L-asignación sobre R-Mod* es una regla Ψ que asigna a cada módulo M un único elemento $\Psi(M)$ de L. Una L-asignación sobre R-Mod, Ψ, se dice una *L-asignación reticular fuerte sobre R-Mod* si y sólo si Ψ satisface las siguientes condiciones:
(I) (*Invariancia*) Si M y M' son módulos isomorfos, entonces $\Psi(M) = \Psi(M')$.
(II) (*Estabilidad*) $\Psi(M) = \Psi(E(M))$, para cada módulo M.
(III) (*Producto-Supremo*) $\Psi(\prod_i M_i) = \bigvee_i \Psi_i(M_i)$ en L, para cada familia de módulos $\{M_i\}$.

Es claro que toda L-asignación reticular fuerte sobre R-Mod satisface también la condición:
(IV) (*Coproducto-Supremo*) $\Psi(\coprod_i M_i) = \bigvee_i \Psi(M_i)$ en L, para cada familia de módulos $\{M_i\}$.

Una L-asignación reticular sobre R-Mod que satisface las condiciones (I), (II) y (IV) anteriores se dice una *L-asignación reticular débil sobre R-Mod*. Denotaremos por $A(R,L)$ y $A^*(R,L)$ a las clases formadas por las L-asignaciones reticulares fuertes y débiles, respectivamente, sobre la categoría R-Mod. Algunas de las propiedades de $A(R,L)$ y $A^*(R,L)$, así como sus respectivas estructuras reticulares en términos de los retículos L e $I(R)$ se muestran en [11], donde $I(R)$ denota el retículo completo formado por los funtores núcleos idempotentes de Goldman (véase [5]). En general, $A(R,L)$ siempre es un conjunto, mientras que el autor sólo conoce que $A^*(R,L)$ es un conjunto para ciertos anillos R (e.g., si R es un anillo seminoetheriano a izquierda).

Es claro que las asignaciones definidas por:

$$\Psi_{ass}(M) := Ass(M) \text{ y } \Psi_a(M) := A(M), \text{ para cada módulo } M,$$

están en $A^*(R, 2^{Spec(R)})$ y $A(R, \mathcal{P}_a(R))$, respectivamente (veánse [11] y [16]).

3 Los invariantes de Matlis-Papp de un módulo

El siguiente resultado es bien conocido y es crucial para la definición de los invariantes de Matlis-Papp de un módulo dado.

Teorema 1 (Matlis–Papp) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) R es un anillo noetheriano a izquierda.

(2) Cada módulo inyectivo E admite una única descomposición de la forma

$$E \cong \coprod_{i \in \Gamma_i} E_i^{(\Gamma_i)}$$

donde cada $E_i \in \xi(R)$ y cada Γ_i es un conjunto no-vacío.

La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) fue probada por Eben Matlis en [6], mientras que (2) $\Rightarrow$ (1) fue probada por Zoltan Papp en [10]. La unicidad en la condición (2) del teorema anterior es una consecuencia del celebre Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya. La descomposición del módulo inyectivo E en (2) la llamaremos la *$\xi(R)$-descomposición de E*. En particular, si R es un anillo noetheriano a izquierda, entonces para cada módulo M, la $\xi(R)$-descomposición de $E = E(M)$ nos da un conjunto de invariantes $\{E_i\}$, unívocamente asociados a M, que llamaremos los *invariantes de Matlis-Papp de M*. Es fácil ver que la asignación definida por:

$$\Psi_{inv} : \ {}_R M \longrightarrow \{E_i\} \in 2^{\xi(R)}$$

siempre que $\{E_i\}$ sea el conjunto de invariantes de Matlis-Papp de M, está en $A^*(R, 2^{\xi(R)})$. En general, Ψ_{inv} no necesita estar en $A(R, 2^{\xi(R)})$. En efecto, es bien conocido que si $R = Z$ es el anillo de los números enteros y P denota el conjunto de números primos, entonces podemos elegir $\xi(Z) = \{\ Q,\ Z_{p^\infty}\ /\ p \in P\ \}$, donde Q y Z_{p^∞} denotan, respectivamente, el grupo de los números racionales y el p-grupo de Prüfer. Ahora, para el grupo abeliano

$$G = \prod_{p \in P} Z_{p^\infty}$$

se tiene que

$$G \cong \coprod_{p \in P} Z_{p^\infty} \times Q^{(\Gamma)}$$

donde, por cuestiones de cardinalidad, el conjunto Γ tiene la potencia del continuo. De donde, en tal caso,

$$\Psi_{inv}(\prod_{p\in P} Z_{p^\infty}) = \xi(Z)$$

y

$$\bigcup_{p\in P} \Psi_{inv}(Z_{p^\infty}) = \xi(Z) - \{Q\}.$$

Así, pues, es natural plantearnos el siguiente

Problema: ¿Cuándo $\Psi_{inv} \in A(R, 2^{\xi(R)})$?

En lo sucesivo supondremos que R es un anillo noetheriano a izquierda.

Lema 1 *Si M es un módulo finitamente generado tal que $A(M)$ es un ideal de R, entonces $A(M) \in Ass(M)$. En particular, $Ass(E) = \{A(E)\}$, para cada $E \in \xi(R)$.*

Demostración:
Es claro que, en tal caso, $A(M)$ es el más grande de los ideales anuladores para M y así, por la Proposición (3.1) en [14], tenemos que $E \in \xi(R)$. La última parte es clara.

Proposición 1 *Para cada módulo M, definamos*

$$\Psi_{\overline{a}}(M) := \{A(E_i)\}$$

si $\{E_i\}$ es el conjunto de invariantes de Matlis-Papp de M. Entonces, se tiene que $\Psi_{\overline{a}} \in A^*(R, 2^{Spec(R)})$.

Demostración:
Por el Lema 1, $\Psi_{\overline{a}}$ está bien definida. Los axiomas (I) y (II) se satisfacen claramente. Ahora, el axioma (III) se sigue del Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya junto con la noetherianidad a izquierda de R.

Notar que Ψ_{inv} y $\Psi_{\overline{a}}$ están bien definidas, pues el anillo R es noetheriano a izquierda.

Proposición 2 *Para cada módulo M, se tiene que $\Psi_{ass}(M) = \Psi_{\overline{a}}(M)$ (i.e., $\Psi_{ass} = \Psi_{\overline{a}}$).*

Demostración:

Sea $E(M) \cong \coprod_i E_i^{(\Gamma_i)}$ la $\xi(R)$-descomposición de un módulo M. Por el Lema 1, es claro que $\Psi_{\overline{a}}(M) \subseteq \Psi_{ass}(M)$. Ahora, si $P \in \Psi_{ass}(M) = Ass(M)$, existe un $(0) \neq N \leq_R M$ tal que N es primo y $P = (0 : N)$. Luego, como todo submódulo no-nulo de un módulo primo es también un módulo primo, se sigue que $P \in \Psi_{\overline{a}}(M)$.

Sean $\Psi \in A^*(R, L)$ y $X \subseteq \xi(R)$. Diremos que la familia X *está* Ψ-*determinada* si y sólo si cada vez que $\Psi(E) = \Psi(E')$, con E *y* $E' \in X$, se tiene que $E = E'$. Es claro que si $X = \emptyset$ ó $X = \{E\}$, con $E \in \xi(R)$, entonces X está Ψ-determinada, para cada $\Psi \in A^*(R, L)$. Ahora, si R es un anillo noetheriano (o semiartiniano) conmutativo, es bien conocido que la familia $\xi(R)$ está Ψ_a-determinada.

Proposición 3 *Si la familia $\xi(R)$ está Ψ_a-determinada, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\Psi_{ass} \in A(R, 2^{Spec(R)})$.

(2) $\Psi_{inv} \in A(R, 2^{\xi(R)})$.

Demostración:

Sean $\{M_i\}$ una familia arbitraria de módulos, $M = \prod_i M_i$ y consideremos

$$E(M) \cong \coprod_{\lambda} E_{\lambda}^{(I_\lambda)} \text{ y } E(M_i) \cong \coprod_{(i,j)} E_{ij}^{(\Gamma_{ij})}$$

las respectivas $\xi(R)$-descomposiciones de $E(M)$ y $E(M_i)$, para cada índice i.
$(1) \Rightarrow (2)$: Basta probar que

$$\{E_\lambda\} = \Psi_{inv}(M) \subseteq \cup_i \Psi_{inv}(M_i) = \{E_{ij}\},$$

donde, claro está, en el conjunto $\{E_{ij}\}$ se han omitido las posibles repeticiones. Por (1) y el Lema 1, tenemos que

$$\{A(E_{ij})\} = \cup_i Ass(M_i) = Ass(M) = \cup_\lambda Ass(E_\lambda) = \{A(E_\lambda)\}.$$

De donde, para cada índice λ, existe un par (i, j) para el cual $A(E_\lambda) = A(E_{ij})$ y así, por la hipótesis sobre $\xi(R)$, tenemos que $E_\lambda = E_{ij}$.
$(2) \Rightarrow (1)$: Por la Proposición 2, basta probar que

$$\Psi_{\overline{a}}(M) = \cup_i \Psi_{\overline{a}}(M_i).$$

En efecto, por (2), $\{E_\lambda\} = \{E_{ij}\}$ y así,

$$\Psi_{\overline{a}}(M) = \{A(E_\lambda)\} = \{A(E_{ij})\} = \cup_i \Psi_{\overline{a}}(M_i).$$

Teorema 2 *Sea R un anillo noetheriano a izquierda que satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\xi(R)$ *está* Ψ_a*-determinada.*

(2) R *es un anillo estable a izquierda.*

(3) *CK-dim*$(R) = 0$ *(i.e., cada ideal primo de R es maximal entre los ideales de R).*

Entonces, se tiene que $\Psi_{inv} \in A(R, 2^{\xi(R)})$.

Demostración:

Adoptemos la notación de la demostración anterior. Para cada índice λ, se tiene un isomorfismo de grupos abelianos

$$(0) \neq Hom_R(E_\lambda, \Pi_i E(M_i)) \cong \Pi_i Hom_R(E_\lambda, E(M_i)).$$

Así, existe un índice i para el cual $Hom_R(E_\lambda, E_i) \neq (0)$, siendo $E_i = E(M_i)$. Ahora, como el funtor covariante $Hom_R(E_\lambda, \_)$ es exacto a izquierda y tenemos una sucesión exacta del tipo

$$0 \to E_i \to \prod_j E_{ij}^{\Gamma_{ij}},$$

tenemos también una sucesión exacta en la categoría Z-Mod del tipo:

$$0 \to Hom_R(E_\lambda, E_i) \to Hom_R(E_\lambda, \prod_j E_{ij}^{\Gamma_{ij}}) \cong \prod_j Hom_R(E_\lambda, E_{ij})^{\Gamma_{ij}}.$$

De donde, existe un par (i, j) para el cual $Hom_R(E_\lambda, E_{ij}) \neq (0)$ y así, $E_\lambda \notin T_\tau$, siendo $\tau = \tau_{E_{ij}}$ el funtor núcleo idempotente asociado a E_{ij}. Luego, por la estabilidad a izquierda de R, tenemos que E_λ es libre de τ-torsión. Por tanto, existe una sucesión exacta del tipo

$$0 \to E_\lambda \longrightarrow E_{ij}^{\Gamma},$$

para algún conjunto Γ. Pero entonces, $A(E_\lambda) \subseteq A(E_{ij})$ en $Spec(R)$ y así, por la condición (3) y el Lema 1 anterior, tenemos que $A(E_\lambda) = A(E_{ij})$. Finalmente, por (1), se sigue que $E_\lambda = E_{ij}$ y así, concluimos la demostración.

Corolario 1 *Si R es un anillo artiniano conmutativo, entonces*

$$\Psi_{inv} \in A(R, 2^{\xi(R)}) \quad y \quad \Psi_{ass} \in A(R, 2^{Spec(R)})$$

Concluimos este artículo con una caracterización de los anillos semiartinianos conmutativos, en términos de la asignación Ψ_{ass} y cuya demostración se basa fundamentalmente en dos trabajos de C. Nâstâsescu y N. Popescu (veánse [7] y [8]) de finales de los años sesenta. Recordemos que un anillo arbitrario R se dice *semiartiniano a izquierda* si y sólo si todo módulo no-nulo contiene un submódulo simple.

Teorema 3 *Si R es un anillo conmutativo arbitrario, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) R es un anillo semiartiniano.

(2) (a) $\Psi_{ass} \in A(R, 2^{Spec(R)})$ es fiel (i.e., $\Psi_{ass}(M) \neq (0)$, para cada módulo no-nulo M).

(b) Para cada módulo M tal que $\Psi_{ass}(M)$ es un conjunto finito y cada $N \leq_R M$, se tiene:

$$\Psi_{ass}(M) = \Psi_{ass}(N) \cup \Psi_{ass}(M/N)$$

(3) (a) Ψ_{ass} es fiel.

(b) Para cada $P \in Spec(R)$ y cada ideal H de R tal que $P \leq H$, se tiene:

$$\Psi_{ass}(R/P) = \Psi_{ass}(H/P) \cup \Psi_{ass}(R/H)$$

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2) : Por (1) y el Teorema (3.1) en [8], todo ideal primo de R es un ideal maximal y Ψ_{ass} es fiel. Ahora, sean $\{M_i\}$ una familia de módulos no todos nulos, $M = \prod_i M_i$ y $P \in \Psi_{ass}(M) = Ass(M)$. Entonces, existe un elemento $0 \neq x = (x_i) \in M$ para el cual $P = (0 : x) = \cap_i (0 : x_i)$. Luego, por la maximalidad de P, para cada índice i tal que $0 \neq x_i \in M_i$ se tiene que $P = (0 : x_i)$ y así, $P \in \Psi_{ass}(M_i)$. Por tanto, $\Psi_{ass} \in A(R, 2^{Spec(R)})$ es fiel. Finalmente, la parte (b) en (2), se sigue de (1) y la Proposición (3.1) en [7].
(2) $\Rightarrow$ (3) : Basta observar que para cada $P \in Spec(R)$, se tiene que

$$\Psi_{ass}(R/P) = Ass(R/P) = \{P\}.$$

(3) $\Rightarrow$ (1) : Por (3) y el Teorema (3.1) en [8], basta probar que cada ideal primo de R es maximal. Sean $P \in Spec(R)$ y $H \leq_R R$ maximal tal que $P \leq H$. Entonces, como R/H es un módulo primo (por ser simple) y la parte (b) en (3), tenemos que

$$\{H\} = \Psi_{ass}(R/H) \subseteq \Psi_{ass}(R/P) = \{P\}$$

y así, $H = P$.

Finalmente, como una consecuencia inmediata del Teorema 3 anterior, tenemos el siguiente

Corolario 2 *([7, Proposición 3.2]) Sean R un anillo semiartiniano conmutativo, M un módulo y $\{ M_i \ / \ i \in I \}$ una familia de submódulos no-nulos de M. Entonces,*

$$Ass(M) \subseteq \bigcup_{i \in I} Ass(M/M_i).$$

4 Referencias

[1] Anderson, F. W., Fuller, K. R. *Rings and categories of modules*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.

[2] Fisher, J. W. *The primary decomposition theory for modules*, Pacific J. Math. **35** (1970), 359–367.

[3] Gabriel, P. *Des categories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[4] Golan, J. S. *Decomposition and dimension in module categories*, Marcel Dekker, New York, 1977.

[5] Goldman, O. *Rings and modules of quotients*, J. of Algebra **13** (1969), 10–47.

[6] Matlis, E. *Injective modules over noetherian rings*, Pacific J. Math. **8** (1958), 511–528.

[7] Nâstâsescu, C. *Décomposition primaire dans les anneaux semi-artiniens*, J. of Algebra **14** (1970), 170–181.

[8] Nâstâsescu, C., Popescu, N. *Anneaux semi-artiniens*, Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 357–368.

[9] Papp, Z. *On stable noetherian rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **213** (1975), 107–114.

[10] Papp, Z. *On algebraically closed modules*, Pub. Math. Debrecen (1958), 311–327.

[11] Peña, A. J. *Asignaciones reticulares sobre la categoría de módulos*, preprint, 1995.

[12] Peña, A. J. *Filtros idempotentes y conjuntos anuladores*, Divulgaciones Matemáticas **2**(1) (1994), 11–35.

[13] Popescu, N. *La théorie générale de la décomposition*, Revue Roum. Math. Pures et Appl., **7** (1967), 1365–1371.

[14] Riley, J. A. *Axiomatic primary and tertiary decomposition theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 177–201.

[15] Sharpe, D. W., Vámos, P. *Injective modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[16] Stenström, B. *Rings of quotients: An introduction to methods of ring theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.