Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1 (1998), 61–68.

Sistema de Tabulación de Coeficientes Binomiales o Triángulo de Pascal: un Modelo Numérico Rasga el Telar de los Tiempos

Binomial Coefficients' Tabulation System or Pascal's Triangle: a Numeric Model Rips the Loom of Time

María Cristina Solaeche Galera (solaeche@luz.ve)
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ingeniería
La Universidad del Zulia
Apartado Postal 10.063 (Bellavista)
Maracaibo. Venezuela

Resumen

Uno de los modelos numéricos más famoso de la Historia de la Matemática, el Triángulo de Pascal, nos muestra su origen y trajinar a través del telar de los tiempos. Desde su creación oriental casi mágica y olvidada, hasta su arraigo en el mundo occidental.
Palabras y frases clave: triángulo de Pascal, triángulo aritmético, coeficientes binomiales, método celestial.

Abstract

One of the most famous numeric models of the History of Mathematics, Pascal's triangle, shows us its origin and shuttling throug the loom of time, since its oriental creation, almost magical and forgotten, until becoming rooted in the occidental world.
Key words and phrases: Pascal's triangle, arithmetical triangle, binomial coefficients, heavenly method.

1 Introducción

La convergencia histórica, en su confluencia de hechos e ideas con sus propios pasados, pone en movimiento nuevos acontecimientos, nuevos pensamientos ... que con el transcurrir del tiempo participan a su vez en nuevas conjunciones conformando continuamente el hoy con parte del ayer. El retorno al orígen de las ideas y conceptos matemáticos ayuda a tropezar acertadamente con la falsa creencia de la gratuidad mediata de los descubrimientos que ellos encierran, a asomarnos al abismo que suele a veces separar las diferentes etapas de una misma idea, a conducirnos en un "ir y regresar" de conclusiones deducidas de tan sutiles como imprevistos razonamientos, hasta las más arraigadas y profundas raíces que el tiempo y las circunstancias adentraron en el conocimiento humano, permiténdonos, de alguna forma, asistir a la prodigiosa evolución de la Matemática en su eslabonada continuidad y revolucionario carácter. Como ha dicho P. Boutroux [1]: *"Lo que más nos asombra cuando comparamos la Matemática de nuestro tiempo con la de épocas anteriores es la extraordinaria diversidad y el aspecto imprevisto de los caminos y los atajos por los que esta ciencia se ha embarcado, es el desorden aparente con que ejecuta sus marchas y contramarchas, son las maniobras y los continuos cambios de frente"*.

El llamado *Sistema de tabulación para calcular coeficientes de binomios* o *Método celestial* o *Triángulo aritmético* o *Rectángulo de Tartaglia* o *Triángulo de Pascal* es uno de los modelos numéricos más famoso en la Historia de la Matemática; sencillo en su construcción y maravilloso como fuente, tal pareciera inagotable de riquezas matemáticas, ofrece una notable correspondencia entre su simple construcción, los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton y los relevantes conceptos de combinaciones y variaciones del Análisis Combinatorio y el Cálculo de Probabilidades.

Durante la Edad Media Oriental, en China, el matemático Chia Hsien (1100 d.C. Dinastía Liao; Ch'itan tártara) lo define como *Sistema de tabulación para calcular coeficientes de binomios*; el poeta, matemático, astrónomo y filósofo persa Omar Khayyam lo describe alrededor del 1100 d.C., probablemente basándose en fuentes chinas e indias más antiguas, y se cree extraviado en la obra *Potencias Acumulativas y Coeficientes Calculados* del matemático Liu Ju-Hsien (1218 d.C. Dinastía Chin; Jurchen tártara). En la obra del matemático chino Chu Shih Chieh (1270-1330 d.C. Dinastía Yuan mongola), *Ssu - yuan yu - chien* (*Espejo Precioso de los Cuatro Elementos*) escrita en 1303 (ver [3]), aparece en la primera página un delicado diagrama (ver Figura 1) del triángulo; la obra refiere su estudio a los "cuatro elementos" como las cuatro incógnitas figurativamente llamadas cielo, tierra, hombre y objeto; estudia

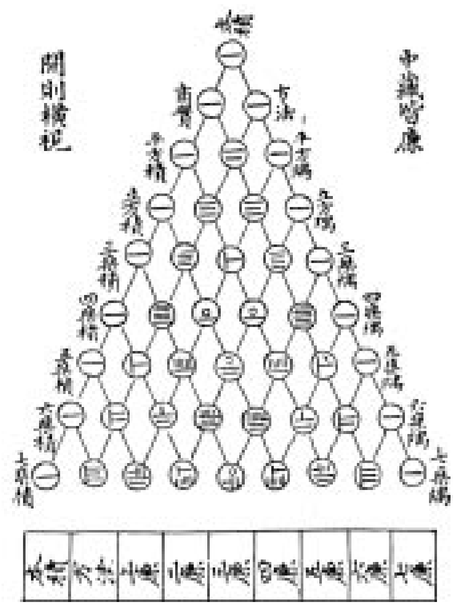

Figura 1: Diagrama del "antiguo método" en la obra de Chu Shih Chieh *Ssu-yuan yu-chien* o *Espejo Precioso de los Cuatro Elementos*.

ecuaciones simultáneas, ecuaciones elevadas a exponentes "tan altos" como el decimocuarto, el algoritmo *fan-fan* (redescubierto por William Horner y Paolo Ruffini en 1819), la suma de series y progresiones geométricas y aritméticas, y una disposición del binomio $(x+y)^n$ con los coeficientes dispuestos hasta la octava potencia, valiéndose para ello el autor del que llama *método celestial* o *método muy antiguo* para calcular las potencias hasta la octava inclusive.

En el s. XV el matemático y astrónomo al-Kâsî (1390-1450) indagando en el observatorio de Samarkanda, en el Islam, en la antigua ruta entre el Próximo Oriente y China, encuentra la forma del *Triángulo de Pascal* en relación con el desarrollo binomial en potencias enteras. Pero será muy posteriormente que la Alemania renacentista dará a conocer su contenido al mundo matemático europeo en la segunda mitad del s. XVI, con el matemático alemán Michael Stifel (1487-1567) y su obra *Arithmetica integra* (1544) considerada como el más importante de los libros de álgebra impresos hasta esa época (aunque algunos años atrás, en 1527, un dibujo del triángulo había aparecido decorando la portada del libro sobre aritmética comercial *Rechnung* del cosmógrafo y matemático alemán Petrus Apianus). El matemático italiano Niccolo Tartaglia estudia en su obra en parte póstuma que consta de tres volúmenes publicados entre 1556 y 1560 *General trattato di numeri et misure (Tratado general sobre el número y la medida)* una disposición numérica similar que llamó *Rectángulo aritmético.*

El genial matemático, místico y polemista francés Blaise Pascal (1623-1662) es el primero en relacionar rigurosamente los números combinatorios con el *Teorema del Binomio* (ya en alguna forma conocidos desde el s. XIV), en un tratado escrito en 1653 y póstumamente publicado en 1665 (que incluía también su muy particular *método de inducción*): *Traité du triangle arithmétique* (Tratado del triángulo aritmético), deduciendo nuevas propiedades y aplicaciones del *Triángulo* a la Teoría Combinatoria y a la Teoría de Probabilidades. En 1886 el mate'atico escocés George Chrystal lo denomina *Triángulo de Pascal* en el volumen I de su obra *Algebra.*

2 Construcción

Se disponen los números en un arreglo triangular con unos (1) en su vértice superior y en los lados adyacentes a dicho vértice; cada uno de los demás términos es la suma de los dos números inmediatamente superiores a su izquierda y a su derecha, en una disposición infinita con simetría bilateral respecto a la bisectriz de su ángulo fijo superior. Las líneas o filas se enumeran de arriba hacia abajo y los términos, las verticales o columnas y las diagonales, de izquierda a derecha, partiendo de cero y considerando la simetría.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Figura 2. Diagrama del Triángulo de Pascal, donde aparecen los coeficientes binomiales con índice menor o igual a nueve.

3 Algunas interesantes propiedades

Las tres propiedades siguientes, son textualmente extraídas del *Traité du triangle arithmétique* de B. Pascal y referidas a un particular diagrama con un giro de 45° con respecto al actual (ver [4]):

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

- En todo triángulo aritmético, si dos células son contiguas en la misma base, la superior es a la inferior como el número de células desde la superior hasta lo alto de la base es al número de células desde la inferior hasta abajo inclusive.
- En todo triángulo aritmético, la suma de las células de una fila paralela cualquiera es igual al número de combinaciones del exponente de la fila en el exponente del triángulo; propiedad que lo relaciona con la Teoría Combinatoria.
- En un juego de dos jugadores, a cada uno de los cuales le falta un cierto número de partidas para terminar el juego, encontrar mediante el triángulo aritmético el reparto que hay que hacer (si quieren separarse sin jugar), teniendo en cuenta las partidas que le faltan a cada uno. Solución: Tómese en el triángulo la base en la que haya tantas células como partidas les falten a los dos juntos; a continuación, tómense en esta base tantas células seguidas, comenzando por la primera, como partidas le falten al primer jugador, y tómese la suma de sus números. Por tanto quedan tantas células como partidas le faltan al otro jugador. Tómese de nuevo la suma de sus números. Estas sumas son la una a la otra como las ventajas recíprocas de los jugadores. Esta particular propiedad, relaciona al Triángulo de Pascal con el problema de determinar las apuestas entre dos jugadores que juegan varias partidas.

"Es rara su fertilidad en propiedades" (Pascal, [2]).

Las siguientes propiedades se refieren al diagrama que actualmente se maneja y que representamos en la Figura 2.

- El término situado en la fila n y la columna m es el número $\binom{n}{m}$.
- Los unos en el vértice superior (o fila cero) y los lados adyacentes son fácilmente verificables mediante

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1, \qquad \text{para todo } n \geq 0.$$

- La simetría bilateral, consecuencia de la relación

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

  que expresa la igualdad de los números colocados simétricamente respecto del eje vertical (eje de simetría del triángulo). Todas las filas son simétricas respecto a dicho eje, pues la propiedad de simetría se conserva al pasar de una fila a otra.
- La n-ésima fila contiene $n+1$ términos.
- La diagonal nula da el equivalente en el espacio cero y sólo puede concebirse como formada por un punto (el vértice) en el que aparece el número 1.
- La primera diagonal está formada exclusivamente por unos (1).
- La segunda diagonal está formada por los números naturales.
- La tercera diagonal proporciona los *números triangulares* 1,3,6,10,15, ... así llamados por ser el cardinal de un conjunto de puntos que componen una disposición triangular con n puntos por lado en el espacio bidimensional. Cada uno de ellos se deduce del número triangular anterior sumándole el número de términos anteriores incluyendo el seleccionado.
- La expresión del n-ésimo número triangular $\binom{n+1}{2}$ nos dice cuántos términos del Triángulo de Pascal contienen sus n primeras filas, desde la cero hasta la $n-1$.
- La cuarta diagonal contiene los números *tetraédricos* o *piramidales* o *triángulo-piramidales* 1,4,10,20,35, ... , que se obtienen por adición de triángulos sucesivos en el espacio tridimensional.

- El n-ésimo número tetraédrico está dado por la expresión $\binom{n+2}{3}$ y geométricamente representa el número de puntos de una red piramidal de base una red triangular de orden n.
- La quinta diagonal 1,5,15,35,70, . . . da el número de puntos que forman disposiciones *hipertetraédricas* en el espacio de cuatro dimensiones.
- La n-ésima diagonal contiene los equivalentes n-dimensionales de los números triangulares en el espacio $(n-1)$-dimensional.
- La suma de los cuadrados de los números de una fila es igual al número del mismo triángulo.
- La suma de los términos de la n-ésima fila es equivalente al doble $2n$ de la suma de la siguiente fila $n-1$.
- La suma de los números de la fila n es 2^n.
- La suma de todos los números situados sobre cualquier diagonal hasta una cierta posición, es el número situado directamente debajo y a la derecha.
- La suma de las diagonales de menor pendiente forman la famosa *sucesión de Fibonacci* 1,1,2,3,5,8,13, . . . , propiedad no conocida por Pascal, pues fué descubierta recién a finales del s. XIX.
- Si se eliminan diagonales del lado izquierdo del triángulo se obtienen sumas parciales de la sucesión de Fibonacci (propiedad descubierta por el matemático Verner E. Hoggatt Jr.): si se eliminan k diagonales, se obtienen las sumas parciales de orden k de la sucesión de Fibonacci.
- La fila n contiene los coeficientes del desarrollo de las potencias n-simas del *Binomio de Newton* $(x+y)^n$, propiedad que relaciona inmediatamente al Triángulo de Pascal con la Combinatoria elemental y la Teoría de Probabilidades. Y la expresión:

  $$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

  dada por M. Stifel (1544), permite calcular recursivamente estos coeficientes binomiales.
- Todos los números de la fila n son impares si y sólo si $n = 2^r - 1$ para algún entero r.
- Todos los números del interior de la fila n (exceptuando los extremos) son divisibles por n si y sólo si n es primo.

Posteriormente se representaron por medio de triángulos similares los números de Stirling de primera y segunda clase y los números de Bell.

En este artículo, intentamos una vez más recordar la Historia de la Matemática, mirar hacia atrás y maravillarnos ante tan grandiosa unidad histórica, ante como un mismo conocimiento surge en mundos tan distantes, se asienta, perdura y rasga el telar de los tiempos desde dinastías, terratenientes y levantamientos campesinos allende el Oriente hasta el Occidente a través de creencias estáticas y ególatras como: todo ha sido creado en beneficio del hombre, la tierra yace inmóvil en el centro del Universo ...

En momentos históricos en que la ciencia tambaleaba dando sus primeros pasos mientras la tierra regalaba al hombre "nuevos mundos", Corneille escribe sus primeros versos, Copérnico cede su manuscrito de la teoría heliocéntrica, Descartes intenta hallar una verdad evidente a partir de la cual fuese posible alcanzar las verdades últimas ... Blaise Pascal [2] aporta su mística actitud filosófica :

"Dos excesos: excluir la razón o no admitir más que la razón."

Referencias

[1] Boutroux, P. *L'Ideal Scientifique des Mathématiciens, dans l'Antiquité et dans les Temps Modernes*, Paris, 1920.

[2] Pascal, B. *Pensées*, Editions Garnier, Paris, 1957.

[3] *Presencia de China*, Ediciones en Lenguas Extranjeras, Beijing, 1995.

[4] Uspenski. V. A., *Triángulo de Pascal*, trad. L. B. Ermoláev, Editorial MIR, Moscú, 1978.