Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 2 (1998), 113–119

Supersensibilidad en un Modelo de Agregación con Tiempo Discreto †

Supersensitivity for a Discrete-Time Aggregation Model

Jacques Laforgue
Departamento de Matemáticas. Universidad de Oriente.
Apartado 245, Cumaná 6101A, Venezuela
(`laforgue@sucre.udo.edu.ve`)

Resumen

Se considera un modelo de la Biología de Poblaciones, con tiempo discretizado, que consiste en la composición de un operador lineal integral de dispersión con una función no lineal de crecimiento. En un artículo anterior (Agregación Metaestable en un Modelo con Tiempo Discreto, *Divulgaciones Matemáticas* v. 5, No. 1/2 (1997), 21–27), se mostró que dicho modelo podía generar patrones metaestables de agregación, y en el caso de una sola región de agregación, se obtuvo que ésta ocupaba la mitad del hábitat, después de una evolución exponencialmente lenta. En este trabajo, se introducen en el modelo ciertas perturbaciones exponencialmente pequeñas, cuyos efectos dramáticos son una modificación notable para la velocidad de la frontera de agregación así como un cambio de orden uno para la extensión final de la región de agregación.

Palabras y frases clave: Agregación de poblaciones, Perturbaciones singulares, Supersensibilidad.

Abstract

A discrete-time model from Biology of Populations is considered, which is the composition of a linear integral operator of dispersion with a nonlinear growth function. In a previous

†Recibido 98/05/15. Aceptado 98/11/15.
MSC (1991): 39A12; 92D25.

paper (Metastable Aggregation Within a Discrete-Time Model, *Divulgaciones Matemáticas* v. 5, No. 1/2 (1997), 21–27), it was shown that such a model could generate metastable patterns of aggregation, and in the case of a unique region of aggregation, it was found that it occupied half the habitat, after an exponentially slow evolution. This work introduces in the model certain exponentially small perturbations, whose dramatic effects are a noticeable modification for the speed of the frontier of aggregation, and an order one change in the final extent of the region of aggregation.
Key words and phrases: Aggregating populations, Singular perturbations, Supersensitivity.

1 Introducción

En [2], se estudió una instancia particular de un modelo de la Biología de Poblaciones, propuesto en una forma más general por Kot y Schaffer en [1]. Las escogencias de una función de crecimiento relativo cuadrática (para aportar biestabilidad), y de un operador integral de dispersión basado en la distribución exponencial bilateral de Laplace, permitieron producir un patrón metaestable de agregación: El dominio se dividía naturalmente en una región de saturación demográfica y otra de desertización, y la frontera entre ellas, cualquiera que hubiese sido su ubicación original, se desplazaba con lentitud exponencial hacia la posición central, correspondiente a un estado estacionario consecuente con la simetría presente en el planteamiento del problema.

En el trabajo presentado a continuación, se rompe dicha simetría en forma mínima: Se introducen tanto en la ecuación como en las condiciones de borde ciertas perturbaciones exponencialmente pequeñas que, en contextos más comunes, no tendrían ningún efecto perceptible. Sin embargo, como el "motor" de la metaestabilidad es un seudo autovalor dominante exponencialmente pequeño, basta que alguna perturbación lo supere para que pueda observarse una nueva velocidad para la capa interior de transición, y un nuevo estado estacionario en el cual la región de agregación tiene una extensión mayor o menor, siendo de orden uno la modificación con respecto al caso sin perturbar.

Este fenómeno, observado con la versión estacionaria de la ecuación de Burgers, fue llamado *supersensibilidad* en [3], y fue estudiado, para la ecuación de Burgers en [5] y para ecuaciones de evolución más generales en [4]. Resulta interesante que lo obtenido con estas ecuaciones diferenciales se reproduce aquí de manera análoga con una ecuación en diferencias e integral.

En la sección 2 se describe el modelo perturbado, en la sección 3 se analiza la evolución del patrón de agregación y en la sección 4 se determina cómo la posición estacionaria límite depende de las perturbaciones introducidas.

2 Planteamiento del Problema Perturbado

Utilizamos variables sin dimensión. Así, el parámetro pequeño $\epsilon > 0$ representa la razón del alcance promedio de la dispersión a la dimensión del hábitat; la densidad relativa $u_t(x) \in [0,1]$ es el cociente de la densidad poblacional en el sitio x en el instante t entre la máxima densidad alojable por el ambiente; la función (sin perturbar) de crecimiento absoluto

$$f(u) := \left[1 - r^2(1-u)(1-2u)\right] u \tag{1}$$

(donde $0 < r < 1$) es una aplicación de $[0,1]$ en $[0,1]$; y los procesos de crecimiento y dispersión ocurren en el intervalo normalizado $-1 < x < 1$.

Sea ρ un número positivo fijo. Introducimos perturbaciones de orden $O(e^{-\rho/\epsilon})$ tanto en las condiciones de borde

$$u_t(x) = \begin{cases} p_- e^{-\rho/\epsilon}, & x \in (-\infty, -1] \\ \\ 1 - p_+ e^{-\rho/\epsilon}, & x \in [1, \infty) \end{cases} \tag{2}$$

como en la función de crecimiento absoluto

$$\tilde{f}(u) := f(u) + p(u) e^{-\rho/\epsilon}. \tag{3}$$

Los números p_- y p_+ son nonegativos, y la función p es integrable con valores de signo cualquiera.

La dinámica se rige por la ecuación

$$u_{t+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\epsilon} \exp\left(-\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) \tilde{f}\left(u_t(y)\right) dy, \qquad x \in (-1,1), \tag{4}$$

y tomamos como origen $t = 0$ un tiempo tal que la agregación se haya ya producido, con una frontera ubicada en un punto dado $x_0^\epsilon \in (-1,1)$. Es decir

$$u_t(x) \sim \varphi\left(\frac{x - x_t^\epsilon}{\epsilon}\right) \qquad \text{para} \quad t = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{5}$$

donde, según lo desarrollado en [2], la estructura de la frontera viene dada por $\varphi(\eta) = (1 + e^{-r\eta})^{-1}$, y x_t^ϵ es el punto lentamente móvil donde $u_t(x_t^\epsilon) = 1/2$.

3 Desplazamiento de la Frontera de Agregación

De manera más precisa, escribimos la solución del problema (2)(4) en la forma

$$u_t(x) = \varphi(\eta_t) + v_t(\eta_t) \tag{6}$$

donde la variable espacial ampliada $\eta_t := (x - x_t^\epsilon)/\epsilon$ queda centrada en la frontera de agregación, así minimizando la corrección v_t. Entonces (4) se transforma en una ecuación de función incógnita v_t:

$$\begin{aligned} v_{t+1}(\eta_{t+1}) \quad = \quad & -\varphi(\eta_{t+1}) + \tfrac{1}{2}\int_{\eta_t^-}^{\eta_t^+} \exp\bigl(-|\eta_t - \theta_t|\bigr) f\bigl((\varphi + v_t)(\theta_t)\bigr) d\theta_t \\ & + \tfrac{1}{2} f(p_- e^{-\rho/\epsilon})\, e^{\eta_t^- - \eta_t} + \tfrac{1}{2} f(1 - p_+ e^{-\rho/\epsilon})\, e^{\eta_t - \eta_t^+} \\ & + \tfrac{1}{2} e^{-\rho/\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigl(-|\eta_t - \theta_t|\bigr)\, p\bigl((\varphi + v_t)(\theta_t)\bigr) d\theta_t, \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\eta_t^\pm := \pm(1 \mp x_t^\epsilon)/\epsilon$. Ahora despreciamos $v_{t+1}(\eta_{t+1}) - v_t(\eta_t)$ frente a $v_t(\eta_t)$, v_t frente a φ y los términos $O(e^{-2\rho/\epsilon})$ frente a los $O(e^{-\rho/\epsilon})$. Resulta

$$\begin{aligned} v_t(\eta_t) \quad \simeq \quad & -\varphi(\eta_{t+1}) + \tfrac{1}{2}\int_{\eta_t^-}^{\eta_t^+} \exp(-|\eta_t - \theta_t|)\, f(\varphi(\theta_t))\, d\theta_t \\ & + \tfrac{1}{2} e^{\eta_t - \eta_t^+} + \tfrac{1}{2} e^{-\rho/\epsilon} \Bigl[(1 - r^2)(p_- e^{\eta_t^- - \eta_t} - p_+ e^{\eta_t - \eta_t^+}) \\ & \qquad + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\eta_t - \theta_t|)\, p(\varphi(\theta_t))\, d\theta_t \Bigr]. \end{aligned} \tag{8}$$

Utilizando la identidad $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \exp\bigl(-|\eta - \theta|\bigr) f\bigl(\varphi(\theta)\bigr) d\theta = \varphi(\eta)$ y evaluando asintóticamente las integrales fuera del intervalo (η_t^-, η_t^+), obtenemos

$$\begin{aligned} v_t(\eta_t) \quad \simeq \quad & \varphi(\eta_t) - \varphi(\eta_{t+1}) + \tfrac{1-r}{2}\left(e^{\eta_t - (1+r)\eta_t^+} - e^{(1+r)\eta_t^- - \eta_t}\right) \\ & + \tfrac{e^{-\rho/\epsilon}}{2} \Bigl[(1 - r^2)(p_- e^{\eta_t^- - \eta_t} - p_+ e^{\eta_t - \eta_t^+}) \\ & \qquad + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\eta_t - \theta_t|)\, p(\varphi(\theta_t))\, d\theta_t \Bigr]. \end{aligned} \tag{9}$$

Como la condición $u_t(x_t^\epsilon) = 1/2$ centra la frontera en $\eta_t = 0$, y $\varphi(0) = 1/2$, debemos tener $v_t(0) = 0$ al evaluar (9) en $x = x_t^\epsilon$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x_t^\epsilon - x_{t+1}^\epsilon}{\epsilon}\right) \simeq \varphi(0) + \frac{1-r}{2} \Bigl\{ & e^{-(1+r)\eta_t^+} - e^{(1+r)\eta_t^-} \\ & + e^{-\rho/\epsilon}\left[(1+r)\left(p_- e^{\eta_t^-} - p_+ e^{-\eta_t^+}\right) + \mathcal{I}p\right]\Bigr\}, \end{aligned} \tag{10}$$

donde $\mathcal{I}p := (1-r)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-|\theta|)\,p(\varphi(\theta))\,d\theta$. Obtenemos finalmente la estimación siguiente para la velocidad exponencialmente pequeña de la frontera de agregación:

$$(11)\quad x_{t+1}^{\epsilon}-x_t^{\epsilon}\simeq 2\epsilon(\frac{1}{r}-1)\Big\{e^{-(1+r)(1+x_t^{\epsilon})/\epsilon}-e^{-(1+r)(1-x_t^{\epsilon})/\epsilon}$$
$$+\,e^{-\rho/\epsilon}\Big[(1+r)(p_+e^{-(1-x_t^{\epsilon})/\epsilon}-p_-e^{-(1+x_t^{\epsilon})/\epsilon})-\mathcal{I}p\Big]\Big\}.$$

4 Estado Estacionario Límite

En (11) observamos que si $\mathcal{I}p\neq 0$, la perturbación introducida en la función de crecimiento $f(u)$ domina las perturbaciones introducidas en las condiciones de borde. Entonces, reescribimos (11) como

(12)
$$x_{t+1}^{\epsilon}-x_t^{\epsilon}\simeq 2\epsilon(r^{-1}-1)e^{-(1+r)/\epsilon}\left(e^{-(1+r)x_t^{\epsilon}/\epsilon}-e^{(1+r)x_t^{\epsilon}/\epsilon}-\mathcal{I}p\,e^{(1+r-\rho)/\epsilon}\right).$$

Por lo tanto, si $\rho>1+r$, las perturbaciones son demasiado pequeñas y la posición de equilibrio es exponencialmente pequeña:

$$(13)\qquad x_{\infty}^{\epsilon}\simeq -\frac{\epsilon\,\mathcal{I}p}{2(1+r)}\,e^{-(\rho-1-r)/\epsilon}\qquad \text{si}\quad \rho>1+r,$$

una diferencia insensible con respecto a $x_{\infty}^{\epsilon}=0$ del caso sin perturbar. Si $\rho=1+r$, la diferencia con el caso sin perturbar es de orden ϵ :

$$(14)\qquad x_{\infty}^{\epsilon}\simeq\frac{\epsilon}{1+r}\,\ln\left(\frac{\sqrt{(\mathcal{I}p)^2+4}-\mathcal{I}p}{2}\right)\qquad \text{si}\quad \rho=1+r.$$

Si $\rho<1+r$, de (12) obtenemos el resultado supersensible $|x_{\infty}^{0}|=1-\rho/(1+r)$, es decir la perturbación exponencialmente pequeña de $f(u)$ provoca un cambio de orden uno para la extensión final de la región de agregación. Específicamente, el signo de x_{∞}^{ϵ} es el opuesto del de $\mathcal{I}p$ y tenemos

$$(15)\qquad x_{\infty}^{\epsilon}\simeq\begin{cases}-1+\frac{\rho}{1+r}-\frac{\epsilon}{1+r}\ln(\mathcal{I}p) & \text{si}\quad \rho<1+r\quad \text{e}\quad \mathcal{I}p>0,\\[2ex] 1-\frac{\rho}{1+r}+\frac{\epsilon}{1+r}\ln(-\mathcal{I}p) & \text{si}\quad \rho<1+r\quad \text{e}\quad \mathcal{I}p<0.\end{cases}$$

Analicemos ahora el caso $\mathcal{I}p=0$, el cual ocurre en particular cuando no se perturbe la función de crecimiento o cuando p sea simétrica: $p(1-u)=$

$-p(u), \quad \forall u \in [0,1]$. En este caso, reescribimos (11) como

$$(16) \quad x_{t+1}^{\epsilon} - x_t^{\epsilon} \simeq 2\epsilon(r^{-1}-1)e^{-(1+r)/\epsilon}\Big[e^{-(1+r)x_t^{\epsilon}/\epsilon} - e^{(1+r)x_t^{\epsilon}/\epsilon} + (1+r)e^{(r-\rho)/\epsilon}\Big(p_+ e^{x_t^{\epsilon}/\epsilon} - p_- e^{-x_t^{\epsilon}/\epsilon}\Big)\Big].$$

Por lo tanto, si $\rho > r$, las perturbaciones son demasiado pequeñas y la posición de equilibrio es exponencialmente pequeña:

$$(17) \qquad x_{\infty}^{\epsilon} \simeq \frac{\epsilon(p_+ - p_-)}{2}\, e^{-(\rho - r)/\epsilon} \qquad \text{si} \quad \mathcal{I}p = 0 \quad \text{y} \quad \rho > r.$$

Si $\rho = r$, tenemos $x_{\infty}^{\epsilon} = O(\epsilon)$. Finalmente, si $\rho < r$, de (16) obtenemos el resultado supersensible $|x_{\infty}^{0}| = 1 - \rho/r$, es decir las perturbaciones exponencialmente pequeñas de las condiciones de borde tienen un efecto de orden uno sobre la extensión final de la región de agregación. Específicamente, existen dos posiciones de equilibrio asintóticamente estables, y la posición última de la frontera de agregación depende del signo de su posición inicial:

$$(18) \quad x_{\infty}^{\epsilon} \simeq \begin{cases} 1 - \frac{\rho}{r} + \frac{\epsilon}{r}\ln[(1+r)p_+] & \text{si} \quad \mathcal{I}p = 0, \quad \rho < r \quad \text{y} \quad x_0^{\epsilon} > 0, \\ -1 + \frac{\rho}{r} - \frac{\epsilon}{r}\ln[(1+r)p_-] & \text{si} \quad \mathcal{I}p = 0, \quad \rho < r \quad \text{y} \quad x_0^{\epsilon} < 0. \end{cases}$$

(Si $x_0^{\epsilon} = 0$, deducimos de (16) que x_{∞}^{ϵ} es la posición de equilibrio del mismo signo que $p_+ - p_-$.)

5 Agradecimiento

El autor agradece al *Consejo de Investigación de la Universidad De Oriente* la ayuda económica recibida para poder asistir a la XLVI Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, realizada en Barquisimeto del 17 al 22 de Noviembre de 1996, donde fue presentada una versión preliminar de este trabajo.

Referencias

[1] Kot, M., Schaffer, W.M., *Discrete-time growth-dispersal models*, Math. Biosc. **80**(1986), 109–136.

[2] Laforgue, J., *Agregación metaestable en un modelo con tiempo discreto*, Divulg. Mat. v. 5, No. 1/2 (1997), 21–27.

[3] Laforgue, J.G., O'Malley, Jr., R.E., *Supersensitive boundary value problems*, Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters, editado por H.G. Kaper y M. Garbey, Kluwer, Dordrecht, 1993, 215–223.

[4] Laforgue, J.G.L., O'Malley, Jr., R.E., *On the motion of viscous shocks and the supersensitivity of their steady-state limits*, Methods and Applic. of Anal. **1**(1994), 465–487.

[5] Laforgue, J.G.L., O'Malley, Jr., R.E., *Shock layer movement for Burgers' equation*, SIAM J. Appl. Math. **55**(1995), 332–347.