Divulgaciones Matemáticas Vol. 7 No. 1 (1999), pp. 49–57

Soluciones Acotadas para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden 2

Bounded Solutions for Second Order Ordinary Differential Equations

Raúl Naulin (rnaulin@sucre.udo.edu.ve)
Departamento de Matemáticas
Universidad de Oriente
Apartado 285, Cumaná 6101-A
Venezuela

Resumen

En este trabajo se exponen resultados de existencia de soluciones acotadas para la ecuación $y'' + a(t)y = f(t, y)$. Se demuestra que conociendo ciertas estimaciones de los productos $x_1(t)x_2(s)$, donde x_1 y x_2 constituyen una base de las soluciones de la ecuación lineal $x'' + a(t)x = 0$, es posible elaborar un estudio similar a la teoría de las dicotomías ordinarias y exponenciales para sistemas. El uso del teorema de la aplicación contractiva, aplicado al respectivo operador generado por las dicotomías presentadas en este trabajo, genera soluciones acotadas para una clase de ecuaciones de orden 2.
Palabras y frases clave: Dicotomías escalares, ecuaciones de orden dos, soluciones acotadas.

Abstract

In this paper, some results of existence of bounded solutions for the equation $y'' + a(t)y = f(t, y)$ are obtained. Knowing certain estimates of the products $x_1(t)x_2(s)$, where x_1 and x_2 define a basis of solutions for the linear equation $x'' + a(t)x = 0$, it is shown that it is possible to develop a study similar to that of the exponential and ordinary dichotomies for systems of ordinary differential equations. The application of the fixed point theorem for contractive maps, applied to the operator generated by the dichotomies introduced in this work, gives the existence of bounded solutions for a class of second order equations.
Key words and phrases: Scalar dichotomies, second order equations, bounded solutions.

Recibido 1998/09/25. Aceptado 1998/03/08.
MSC (1991): Primary 34D05, 34A30; Secondary 34C11.

1 Introducción

En esta comunicación trataremos el problema de la existencia de soluciones acotadas para la ecuación diferencial ordinaria de orden 2:

$$y'' + a(t)y = f(t, y), \tag{1}$$

donde la función $a(t)$ está definida para $t \in J = [t_0, \infty)$ y es continua en ese dominio. La función $f(t, x)$ se define en $J \times \mathbf{R}$, es continua y satisface la condición

(L) $$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \gamma(t, \rho)|x - y|, \quad |x| \leq \rho, \quad |y| \leq \rho,$$

donde ρ es un número positivo y $\gamma(t, \rho)$ es una función localmente integrable para cada ρ fijo.

Bajo las condiciones señaladas, el problema de la existencia de soluciones acotadas de la ecuación (1) ha sido intensamente estudiado. En este trabajo deseamos proponer un método de investigación de este problema que se adapta al estudio de la ecuación en condiciones de una información incompleta de las soluciones de la ecuación lineal

$$x'' + a(t)x = 0. \tag{2}$$

Esto significa que admitiremos, solamente, ciertas estimaciones de x_1 y x_2, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (2). Concretamente, supondremos la existencia de funciones positivas y medibles h_1, p_1, h_2 y p_2 tales que

$$\begin{aligned} |x_1(t)x_2(s)| &\leq Kh_1(t)p_1(s), \quad t \geq s, \\ |x_2(t)x_1(s)| &\leq Kh_2(t)p_2(s), \quad s \geq t, \end{aligned} \tag{3}$$

donde K es una constante.

Las estimaciones dadas por (3) recuerdan las definiciones de una una dicotomía débil usadas en [5] para sistemas lineales de ecuaciones, y más cerca de nuestro objetivo, coinciden con las dicotomías de precisión cero introducidas en [4, 6] para ecuaciones escalares.

En este trabajo mostraremos que la información suministrada por las estimaciones (3) es suficiente para deducir resultados de existencia de soluciones acotadas para la ecuación (1). El método que se expone es susceptible de ser generalizado a ecuaciones de orden mayor que dos.

2 Soluciones acotadas

Definamos el siguiente operador

$$\mathcal{D}(f)(t) = \int_{t_0}^{t} x_1(t)x_2(s)f(s)ds - \int_{t}^{\infty} x_2(t)x_1(s)f(s)ds.$$

Buscaremos condiciones bajo las cuales este operador actúa sobre $BC(J)$, el espacio de las funciones continuas y acotadas sobre J, premunido de la norma

$$|f|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in J\}.$$

La definición de $\mathcal{D}$ permite la estimación

$$|\mathcal{D}(f)|(t) \leq \int_{t_0}^{t} h_1(t)p_1(s)|f(s)|ds + \int_{t}^{\infty} h_2(t)p_2(s)|f(s)|ds.$$

Esta estimación muestra que $\mathcal{D} : BC(J) \to BC(J)$, si para alguna constante positiva M y todo $t \geq 0$ se cumple

$$\int_{t_0}^{t} h_1(t)p_1(s)ds + \int_{t}^{\infty} h_2(t)p_2(s)ds \leq M. \tag{4}$$

Nótese que $\mathcal{D}(f)$ es una solución de la ecuación no homogénea

$$y'' + a(t)y = f(t). \tag{5}$$

Esto implica el siguiente

Teorema 1. *Si (3) y (4) son válidas, entonces para cualquier función continua y acotada f la ecuación (5) admite una solución acotada y una de estas soluciones acotadas está dada por $\mathcal{D}(f)$.*

Este resultado recuerda el Teorema 5.1 en [2]. En general el Teorema 1 no admite recíproco. Sin embargo vale el siguiente resultado, cuya demostración sigue el mismo curso del Teorema 5.1

Teorema 2. *Para cualquier función continua y acotada f, la ecuación (5) admite una solución acotada si y sólo si existe una constante M tal que*

$$\int_{t_0}^{t} |x_1(t)x_2(s)|ds + \int_{t}^{\infty} |x_2(t)x_1(s)|ds \leq M, \quad \forall t \geq t_0.$$

3 Ecuaciones no lineales

Usando el operador $\mathcal{D}$ podemos definir el siguiente operador

$$\mathcal{T}(y)(t) = \int_{t_0}^{t} x_1(t)x_2(s)f(s,y(s))ds - \int_{t}^{\infty} x_2(t)x_1(s)f(s,y(s))ds. \qquad (6)$$

En lo que sigue vamos a suponer que existe una constante positiva $\sigma(t_0)$ tal que

$$\int_{t_0}^{t} h_1(t)p_1(s)|f(s,0)|ds + \int_{t}^{\infty} h_2(t)p_2(s)|f(s,0)|ds \leq \sigma(t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

La condición **(L)** produce la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(z)|(t) &\leq \int_{t_0}^{t} h_1(t)p_1(s)\gamma(s,\rho)|y(s)-z(s)|ds \\ &+ \int_{t}^{\infty} h_2(t)p_2(s)\gamma(s,\rho)|y(s)-z(s)|ds, \end{aligned}$$

que implica

$$|\mathcal{T}(y)|_\infty \leq \sigma(t_0) + K\left(\int_{t_0}^{t} h_1(t)p_1(s) + \int_{t}^{\infty} h_2(t)p_2(s)\right)\gamma(s,\rho)ds|y|_\infty \qquad (7)$$

y

$$|\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(z)|_\infty \leq K\left(\int_{t_0}^{t} h_1(t)p_1(s) + \int_{t}^{\infty} h_2(t)p_2(s)\right)\gamma(s,\rho)ds|y-z|_\infty. \qquad (8)$$

De (7) vemos que $\mathcal{T}$ tendrá la propiedad

$$\mathcal{T} : B[0,\rho] \to B[0,\rho],$$

donde

$$B[0,\rho] = \{x \in BC(J) : |x|_\infty \leq \rho\},$$

si y sólo si se cumple

$$\sigma(t_0) + K\left(\int_{t_0}^{t} h_1(t)p_1(s)\gamma(s,\rho)ds + \int_{t}^{\infty} h_2(t)p_2(s)\gamma(s,\rho)ds\right)\rho \leq \rho. \qquad (9)$$

La estimación (8) dice que $\mathcal{T}$ es una contracción sobre $B[0,\rho]$ si se cumple

$$K\left(\int_{t_0}^{t} h_1(t)p_1(s) + \int_{t}^{\infty} h_2(t)p_2(s)\right)\gamma(s,\rho)ds \leq M < 1,\ \forall t \geq t_0. \qquad (10)$$

Válidas las condiciones (9) y (10), por un cálculo directo se demuestra que el único punto fijo del operador $\mathcal{T}$ en la bola $B[0,\rho]$ es una solución de la ecuación (1). La condición (10) se cumplirá, por ejemplo, para el caso exponencial

$$h_1(t) = p_2(t) = \exp\{-\alpha t\} = h_2(t)^{-1} = p_1(t)^{-1},$$

y una función $\gamma(t,\rho)$ acotada. Veamos esto en el siguiente ejemplo

$$y'' - \alpha^2 y = \gamma y^2 + f(t),\ \gamma = \text{ constante},\ \alpha > 0,$$

donde f es una función acotada. En este ejemplo tenemos $\sigma(t_0) = \frac{2}{\alpha}|f|_\infty$. Las condiciones (9) y (10) se cumplirán si

$$\frac{2}{\alpha}|f|_\infty + \frac{4}{\alpha}\gamma\rho^2 \leq \rho, \quad \frac{4}{\alpha}\gamma\rho < 1.$$

Bajo estas relaciones de compromiso entre las constante $|f|_\infty$, α y ρ se obtiene una solución acotada en la bola $B[0,\rho]$. Este es un hecho conocido en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, pues la ecuación lineal

$$x'' - \alpha x = 0,$$

escrita como un sistema de dos dimensiones, admite una dicotomía exponencial. Consideremos un problema no autónomo más general.

$$y'' - (1 + \phi(t))y = f(t,y). \qquad (11)$$

Respecto a esta ecuación, usaremos el siguiente resultado debido a Hartman [1, 2]:

Teorema A *Si la función real continua $\phi(t)$ satisface*

$$\int^{\infty} \phi(t)^2 dt < \infty,$$

entonces la ecuación

$$x'' - (1 + \phi(t))x = 0 \qquad (12)$$

posee dos soluciones linealmente independientes x_1 *y* x_2 *con las siguientes fórmulas asintóticas*

$$x_1(t) = \exp(-t - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \phi(\tau)d\tau + o(1)),$$

$$x_2(t) = \exp(t + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \phi(\tau)d\tau + o(1)),$$

donde $o(1)$ *denota una función con la propiedad* $\lim_{t\to\infty} o(1) = 0$.

Para la ecuación (11) las condiciones (3) se cumplen y tienen la forma

$$|x_1(t)x_2(s)| \leq K \exp(-(t-s) - \tfrac{1}{2}\textstyle\int_s^t \phi(\tau)d\tau), \quad t \geq s \geq t_0,$$

$$|x_2(t)x_1(s)| \leq K \exp((t-s) + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_s^t \phi(\tau)d\tau), \quad s \geq t \geq t_0,$$

Cálculos sencillos muestran que en este caso la condición de integrabilidad (10) se cumple para una función acotada γ de norma $|\gamma|_\infty$ pequeña. Calculemos cuan pequeña debe ser esta norma en el caso particular

$$y'' - (1 + t^{-1})y = f(t, y), \quad t \geq 1. \tag{13}$$

De la condición (10) obtenemos que la contracción del operador (6) se obtiene para $2K|\gamma|_\infty < 1$.

El problema de existencia de soluciones acotadas para la ecuación (13) se podría resolver de una manera más sencilla, si escribiéramos esta ecuación en la forma

$$y'' - y = \frac{y}{t} + f(t, x), \quad t \geq 1,$$

cuya parte derecha satisface **(L)**, con constante de Lipschitz igual a $\gamma = 1 + |\gamma|_\infty$. En este caso para satisfacer (10) necesitamos pedir $2K(1+|\gamma|_\infty) < 1$, condición que es mucho más exigente que la anterior.

En este ejemplo el punto no es discutir la bondad de las estimaciones obtenidas para obtener una contracción. Se ha obtenido la existencia de estas soluciones acotadas sin reducir la ecuación a un sistema de ecuaciones de dos dimensiones. Si lo hiciéramos, las estimaciones de x_1 y x_2 indicadas en el Teorema A no serían suficientes para definir una dicotomía exponencial (con más precisión, una (μ_1, μ_2)-dicotomía [3]) para la ecuación (12).

4 Dicotomías no exponenciales

La condición (10) se podría cumplir en condiciones más débiles que una relación (3) generada por el caso exponencial, considerado en la sección anterior. Examinemos el ejemplo

$$y'' = f(t, y). \tag{14}$$

Para la ecuación

$$x'' = 0$$

podemos señalar las siguientes soluciones linealmente independientes

$$x_1(t) = 1,\ x_2(t) = t,$$

que cumplen las condiciones (3):

$$|x_1(t)x_2(s)| \leq Ks, \quad t \geq s,$$

$$|x_2(t)x_1(s)| \leq Ks, \quad s \geq t.$$

Veamos el ejemplo

$$y'' = b(t)y^2 + f(t). \tag{15}$$

En este caso

$$\sigma(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} s|f(s)|ds.$$

La inecuación (9) tiene la forma

$$\sigma(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} s|b(s)|ds\,\rho^2 \leq \rho,$$

y la condición de contracción (10) es

$$2\int_{t_0}^{\infty} s|b(s)|ds\,\rho < 1.$$

Bajo estas condiciones obtenemos la existencia de soluciones acotadas para la ecuación (15).

Un ejercicio interesante resulta al aplicar la transformación de Ghizzetti para reducir la ecuación (15) a un sistema de orden dos, con matriz diagonal en su componente lineal (ver [2], página 91). Realizados dichos cálculos, el lector apreciará la versatilidad del método expuesto en esta sección.

5 Comentarios finales

Consideremos la ecuación

$$M[x] = 0, \tag{16}$$

donde

$$M[x](t) = x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)x(t).$$

Sean $\mathcal{H}^-$, $\mathcal{H}^+$, $\mathcal{P}^-$ y $\mathcal{P}^+$ colecciones de $m+1$ funciones positivas y continuas. En el artículo [6] se introduce la siguiente

Definición 1. Diremos que la ecuación (16) admite una dicotomía escalar de tipo $([\mathcal{H}^-, \mathcal{P}^-], [\mathcal{H}^+, \mathcal{P}^+])$ y orden m, $0 \leq m \leq n-1$, si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ de (16) tal que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ y

$$x_i \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow \left| x_i^{(r)}(t)\tfrac{W_i(s)}{W(s)} \right| \leq K h_r^-(t) p_r^-(s), \quad t \geq s, \quad 0 \leq r \leq m,$$

$$x_i \in \mathcal{B}_2 \Rightarrow \left| x_i^{(r)}(t)\tfrac{W_i(s)}{W(s)} \right| \leq K h_r^+(t) p_r^+(s), \quad t \leq s, \quad 0 \leq r \leq m.$$

La definición anterior puede ser introducida en lugar de (3) para estudiar el problema de existencia de soluciones acotadas para la ecuación no lineal

$$M[y](t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)),\ y(t) \in \mathbf{R}.$$

La noción de dicotomía escalar ha sido usada en problemas de integración asintótica [4, 6].

6 Agradecimientos

El autor agradece el apoyo parcial de la Comisión de Investigación de la Universidad de Oriente por el apoyo brindado a través del Proyecto CI-5-025-00730/95.

Referencias

[1] Bellman, R., *Stability Theory of Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1953.

[2] Coppel, W.A. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.

[3] Muldowney J. S. *Dichotomies and Asymptotic Behavior for Linear Differential Systems*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 283, 2, 465–484 (1984).

[4] Naulin, R., Urbina, J. *Asymptotic Integration of Linear Ordinary Differential Equations of Order n*, Acta Math. Hungar. Vol. 80 (1–2) (1998).

[5] Naulin R., *Weak Dichotomies and Asymptotic Integration of Nonlinear Differential Systems*, *Nonlinear Studies*, **5** (2), 201–218 (1998).

[6] Naulin, R., *Dichotomies and Asymptotic Equivalence of Scalar Ordinary Differential Equations*, preprint (1998).