Divulgaciones Matemáticas Vol. 7 No. 1 (1999), pp. 87–99

Sobre las Redes de Petri R-difusas

On R-fuzzy Petri Nets

Alirio J. Peña P.
(apena@hydra.math.luz.ve)
Laboratorio de Álgebra Teórica y Computacional (LATyC)
Departamento de Matemática y Computación
Facultad de Ciencias. La Universidad del Zulia.
Apartado Postal 526. Maracaibo 4001. Venezuela

A la memoria del sabio Dr. Humberto Fernández-Morán Villalobos

Resumen

En una reciente prepublicación electrónica Jonathan S. Golan [2] se pregunta por la estructura del R-semimódulo a izquierda formado por todas las redes de Petri R-difusas sobre un par ordenado de conjuntos no vacíos y disjuntos, siendo R un semianillo con elemento identidad y libre de sumas cero. El propósito fundamental de este trabajo es presentar una respuesta a este problema en términos de la teoría de categorías. Además se estudian dos funtores contravariantes definidos ambos sobre la categoría de pares ordenados de conjuntos disjuntos no vacíos y con valores en la categoría de R-semimódulos a izquierda y se prueba que entre ellos existe un isomorfismo natural.
Palabras y frases clave: semianillo, semimódulo, redes de Petri R-difusas, isomorfismo natural de funtores.

Abstract

In a recent electronic preprint Jonathan S. Golan [2] asks about the structure of the left R-semimodule formed by all the R-fuzzy Petri nets over an ordered pair of nonempty disjoint sets, being R a semiring with identity element and free of zero sums. The fundamental purpose of this paper is to present an answer to this problem in terms of category theory. Two contravariant funtors, both defined over the the category of ordered pairs of nonempty disjoint sets and with values in the category of left R-semimodules, are also studied and the existence of a natural isomorphism between them is proved.
Key words and phrases: semiring, semimodule, R-fuzzy Petri nets, natural isomorphism of funtors.

Recibido 1998/11/15. Revisado 1999/03/18. Aceptado 1999/03/22.
MSC (1991): Primary 94D05; Secondary 18B40, 94C99.

Introducción

Las redes de Petri fueron introducidas en la literatura sobre redes abstractas en la tesis doctoral de Carl Adam Petri [10] como una herramienta para simular las propiedades dinámicas de los sistemas complejos mediante modelos gráficos de procesos concurrentes. Desde entonces su estudio y desarrollo han tenido un auge realmente vigoroso debido fundamentalmente a las numerosas aplicaciones que se les ha encontrado, las cuales incluyen diversas áreas del conocimiento y de la técnica, tales como: modelos de redes abstractas, procesamiento paralelo y distribuido, teoría de grafos, problemas de transporte, problemas de decisión y reconocimiento de patrones, entre otras.

Varias generalizaciones de las redes de Petri difusas han sido propuestas en la literatura sobre redes abstractas con el propósito de considerar ciertos problemas concretos vinculados con la representación del conocimiento, razonamiento difuso, teoría de decisión y control de sistemas ([1], [6], [12], [13] y [14]). Desafortunadamente, quizá por lo novedoso de los modelos considerados y lo específico de los problemas a los cuales fueron aplicados, aún no existe un consenso sobre cual de estas nociones es la más eficiente. Un modelo algebraico general de las redes de Petri difusas fue introducido recientemente por Jonathan S. Golan en [2], el cual generaliza los modelos presentados en [9] y [11]. En este trabajo se estudia la estructura algebraica del conjunto formado por todas las redes de Petri R-difusas en el sentido de Golan, siendo R un semianillo con elemento identidad $1 \neq 0$, y se ofrece una respuesta a uno de los problemas planteados en [2], en el lenguaje de la teoría de categorías.

En la sección 1 se incluyen las nociones de semianillos y semimódulos que adoptaremos en este trabajo, así como otras nociones y construcciones básicas. En la sección 2 se introduce la noción de red de Petri R-difusa en el sentido dado por Jonathan S. Golan en [2] y se muestra una construcción general que permite deducir el Primer Teorema de Estructura para el semimódulo R-nets(P, T) (Teorema 2.1). En la sección 3 se muestra que el isomorfismo que aparece en el Primer Teorema de Estructura es el inducido por un isomorfismo natural entre dos funtores contravariantes R-nets y Mnd, definidos ambos sobre la categoría PDS de pares ordenados de conjuntos no vacíos y disjuntos y con valores en la categoría R-SemiMod de R-semimódulos a izquierda (Teorema de Isomorfismo Natural 3.1). Estos funtores contravariantes R-nets y Mnd surgen naturalmente del estudio de las redes de Petri R-difusas. En la sección 4 se ofrecen otros dos teoremas de estructura para el R-semimódulo a izquierda R-nets(P, T), los cuales surgen al preguntarnos por la estructura del semimódulo que aparece en el Primer Teorema de Estructura (Corolarios 4.4 y 4.5).

1 Semianillos y semimódulos

Siguiendo a Jonathan S. Golan [2] un *semianillo* es una terna $(R, +, \cdot)$ formada por un conjunto no vacío R junto con un par de operaciones binarias definidas sobre R llamadas *suma* y *multiplicación*, las cuales denotaremos por $+$ y $\cdot$, respectivamente, y que satisfacen los siguientes axiomas:
(1) $(R, +)$ es un monoide conmutativo con elemento identidad 0;
(2) $(R, \cdot)$ es un monoide con elemento identidad 1;
(3) La multiplicación distribuye con la suma a ambos lados;
(5) $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$, para cada $a \in R$;
(6) $1 \neq 0$.

Además, el semianillo $(R, +, \cdot)$ se dice *libre de sumas cero* si y sólo si satisface la siguiente condición:
(7) Si $a, b \in R$ son tales que $a + b = 0$, entonces $a = b = 0$.

Ejemplos:

(a) El semianillo $(N, +, \cdot)$ formado por el conjunto de los números enteros no negativos N, junto con las operaciones usuales de suma y multiplicación.

(b) El *semianillo booleano* $B = \{0, 1\}$, en el cual $1 + 1 = 0$.

(c) El intervalo unitario $I := [0, 1]$, en el cual definimos $a + b := a * b$ siendo $*$ una *norma triangular sobre* I , i.e., $*$ es una operación binaria definida sobre I que satisface los siguientes axiomas:

i) $(I, *)$ es un monoide conmutativo con elemento identidad 1;

ii) Si $a \leq b$ en I, entonces $a * c \leq b * c$ para cada $c \in I$.

En tal caso, es fácil ver que la terna $(I, max, *)$ es un semianillo conmutativo con elemento identidad 1. La noción dual de norma triangular es la de conorma triangular: una *conorma triangular* es una operación binaria $*'$ definida sobre I tal que la terna $(I, min, *')$ es un semianillo conmutativo con elemento identidad 1. Véase [3] para más detalles.

(d) El conjunto $\overline{R} := R \cup \{\infty\}$ de los números reales extendidos sobre el cual definimos las operaciones binarias: $a + b := min\{a, b\}$ y $a \cdot b :=$ suma usual de a y b en $\overline{R}$.

(e) Cualquier retículo distributivo y acotado.

Denotaremos un semianillo $(R, +, \cdot)$ simplemente por R, dejando implícitas las operaciones binarias, y la multiplicación de dos elementos $r, s \in R$ será denotada por yuxtaposición como rs.

Si R es un semianillo, entonces un monoide aditivo conmutativo $(M, +)$ con elemento identidad 0_M se dice un *R-semimódulo a izquierda* si y sólo si existe una función $\cdot : R \times M \longrightarrow M$, denotada por $(r, m) \longmapsto r \cdot m$ y llamada *multiplicación escalar*, que satisface los siguientes axiomas:

(1) $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$;
(2) $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$;
(3) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$;
(4) $1_R \cdot m = m$;
(5) $r \cdot 0_M = 0_M = 0_R \cdot m$

para cada $r, s \in R$ y $m, m' \in M$. Tal y como hicimos con los semianillos, un R-semimódulo a izquierda $(M, +, \cdot)$ será denotado por M, dejando implícitas las operaciones algebraicas. Un tratamiento similar le daremos a los monoides y sólo en algunos casos se indicarán explícitamente las operaciones algebraicas correspondientes a tales estructuras. Ahora, un R-semimódulo a izquierda M se dice *libre de sumas cero* si y sólo si cada vez que $m + m' = 0_M$ en M, se tiene que $m = m' = 0_M$. Si M y N son R-semimódulos a izquierda, llamaremos *homomorfismo de R-semimódulos a izquierda* de M en N a toda función $\varphi : M \longrightarrow N$ que satisfaga:

$$(m + m')\varphi = (m)\varphi + (m')\varphi \quad \text{y} \quad (r \cdot m)\varphi = r \cdot (m)\varphi,$$

para cada $m, m' \in M$ y $r \in R$. Es claro que los R-semimódulos a izquierda, junto con los homomorfismos de R-semimódulos a izquierda y la composición usual de funciones, forman una categoría concreta, la cual denotaremos por R-SemiMod. Por otro lado, denotaremos por Monoid la categoría de monoides junto con los morfismos de monoides (que preservan el elemento identidad) y la composición usual de funciones. Tal y como lo sugiere la notación anterior, los morfismos en las categorías R-SemiMod y Monoid actuarán del lado derecho (y por tanto la composición de morfismos se entenderá de izquierda a derecha). Para cada par de monoides M y N, denotaremos por Monoid(M, N) el conjunto formado por todos los morfismos de monoides que tienen dominio M y codominio N. Notar que si $(G, \cdot)$ es un monoide multiplicativo y M es un R-semimódulo a izquierda, entonces, considerando a M sólo con su estructura aditiva de monoide conmutativo, tenemos que el conjunto Monoid(G, M) tiene una estructura natural de R-semimódulo a izquierda, con las siguientes operaciones:

$$(x)(f + g) := (x)f + (x)g \quad \text{y} \quad (x)(r \cdot f) := r(x)f,$$

para cada $f, g \in \text{Monoid}(G, M)$, $x \in M$ y $r \in R$. Además, si X es un conjunto no vacío, denotaremos por M^X el conjunto formado por todas las funciones $f : X \longrightarrow M$ con dominio X y codominio M. Ahora, dada $f \in M^X$, llamaremos *soporte* de f al subconjunto de X

$$\text{Supp}(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0_M\}.$$

Además, denotaremos por $M^{(X)}$ el conjunto formado por todas las funciones en M^X que tienen soporte finito. Es claro que si $+$ y $\cdot$ denotan las operaciones binarias usuales de suma y multiplicación escalar definidas sobre M^X, respectivamente, a saber:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (r \cdot f)(x) := rf(x),$$

para cada $f, g \in M^X$ y $x \in X$, entonces las ternas $(M^X, +, \cdot)$ y $(M^{(X)}, +, \cdot)$ son R-semimódulos a izquierda. En particular, si el semianillo R es considerado con su estructura natural de R-semimódulo a izquierda, entonces R^X, junto con las operaciones usuales de suma y multiplicación de funciones con valores en R, es también un semianillo con elemento identidad $c(1)$ (la función constante igual a 1) para el cual el conjunto $R^{(X)}$ es un ideal (en el mismo sentido de la teoría de anillos). Asimismo, cada vez que consideremos a los R-semimódulos a izquierda M^X y $M^{(X)}$ como monoides supondremos que su estructura es la aditiva.

En este trabajo supondremos que el lector está familiarizado con las nociones y resultados básicos de la teoría de semimódulos sobre un semianillo con elemento identidad (véanse [2] y [4]), así como con la teoría de categorías y funtores (véanse [7] y [8]). Además, en todo lo que sigue R denotará un semianillo con elemento identidad $1 \neq 0$ (no necesariamente libre de sumas cero); y por un *semimódulo* entenderemos un R-semimódulo a izquierda unitario. Para cada conjunto X, denotaremos por X^2 el producto cartesiano $X \times X$ del conjunto X consigo mismo. En particular, si S es un semimódulo (monoide), denotaremos por S^2 el semimódulo (monoide) producto directo $S \times S$.

2 Redes de Petri R-difusas

Dado un par ordenado (P, T) de conjuntos no vacíos y disjuntos, llamaremos *red de Petri R-difusa sobre* (P, T) a todo par de funciones $\mu \in R^{(P \times T)}$ y $\upsilon \in R^{(T \times P)}$. Es decir, $(\mu, \upsilon) \in R^{(P \times T)} \times R^{(T \times P)}$. Denotaremos por R-nets(P, T) el conjunto formado por todas las redes de Petri R-difusas sobre (P, T). Este conjunto es denotado por $N(P, T)$ en [2]. Así, R-nets$(P, T) =$

$R^{(P\times T)} \times R^{(T\times P)}$ es un semimódulo con las operaciones usuales de suma y multiplicación escalar (coordenada a coordenada).

Ejemplos:

(a) Si $R = N$, obtenemos las *redes de Petri* en el sentido dado en [9] y [11].

(b) Si $R = BP \times \prod_{i\in\Sigma} R_i$ para algún conjunto finito Σ, obtenemos las *redes de Petri coloreadas* en el sentido de Kurt Jensen [5] . Aquí, Σ es el conjunto de tipos (o conjunto de colores) y $(BP, \wedge, \vee)$ es el semianillo de los predicados booleanos cuyas variables tienen tipo perteneciente al conjunto Σ.

(c) Si $R = I$, obtenemos las *redes de Petri difusas*. Notar que en este caso podemos elegir la estructura de semianillo sobre R de acuerdo a la elección de una norma (o conorma) triangular sobre R.

(d) Si $R = \overline{R}$, obtenemos las *redes de Petri dobladas*. Este tipo de redes de Petri no ha sido estudiado suficientemente en la literatura.

La siguiente construcción general es la clave para los resultados principales del presente trabajo. Sean $(\mu, \upsilon) \in R$-nets(P, T) y $(T^*, *)$ el *monoide libre generado por* T (i.e., T^* es el conjunto formado por todas las sucesiones finitas de elementos de T, junto con la sucesión vacía que denotaremos por λ, y donde $*$ es la operación binaria de concatenación definida sobre T^*). Para cada $t \in T$, definamos las siguientes funciones en $R^{(P)}$:

$$\mu_t : p \longmapsto \mu(p, t) \quad \text{y} \quad \upsilon_t : p \longmapsto \upsilon(t, p)$$

para cada $p \in P$. Ahora, si $\omega = t_1 t_2 \dots t_n \in T^*$, definamos las funciones en $R^{(P)}$:

$$\mu_\omega := \sum_{j=1}^{n} \mu_{t_j} \quad \text{y} \quad \upsilon_\omega := \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{t_j}.$$

Además, definamos $\mu_\lambda := \upsilon_\lambda := c(0)$ (siendo $c(0)$ la función constante e igual a 0 en $R^{(P)}$). Así, pues, cada red de Petri R-difusa (μ, υ) induce las aplicaciones

$$\overline{\mu}, \overline{\upsilon} : T^* \longrightarrow R^{(P)}$$

definidas por:

$$(\omega)\overline{\mu} := \mu_\omega \quad \text{y} \quad (\omega)\overline{\upsilon} := \upsilon_\omega$$

para cada $\omega \in T^*$, respectivamente. Es fácil ver que $\overline{\mu}$ y $\overline{\upsilon}$ son morfismos de monoides y así, podemos considerar la función

$$\eta_{(P,T)} : R\text{-nets}(P,T) \longrightarrow \text{Monoid}(T^*, R^{(P)})^2$$

definida por:

$$(\mu, \upsilon) \longmapsto (\overline{\mu}, \overline{\upsilon})$$

para cada par $(\mu, \upsilon) \in R$-nets(P,T). Es claro que $\eta_{(P,T)}$ es un morfismo de monoides aditivos. Más aún, $\eta_{(P,T)}$ es también un isomorfismo de semimódulos. En efecto, es mera rutina verificar que el morfismo inverso de $\eta_{(P,T)}$ está definido por:

$$\rho_{(P,T)} : \text{Monoid}(T^*, R^{(P)})^2 \longrightarrow R\text{-nets}(P,T)$$

$$(f, g) \longmapsto ((f)u, (g)v)$$

para cada par $(f,g) \in \text{Monoid}(T^*, R^{(P)})^2$ y donde

$$(f)u : (p,t) \longmapsto f(t)(p) \quad \text{y} \quad (g)v : (t,p) \longmapsto g(t)(p)$$

para cada par $(p,t) \in P \times T$.

Observación: Podemos considerar a u y v como aplicaciones

$$u : \text{Monoid}(T^*, R^{(P)}) \longrightarrow R^{(P\times T)} \quad \text{y} \quad v : \text{Monoid}(T^*, R^{(P)}) \longrightarrow R^{(T\times P)}.$$

Se puede probar que estas dos últimas aplicaciones, las *funciones coordenadas* de $\rho_{(P,T)}$, son también isomorfismos naturales de semimódulos.

En resumen, tenemos el siguiente

Teorema 2.1 (Primer Teorema de Estructura). *Sean R un semianillo, (P,T) un par ordenado de conjuntos no vacíos y disjuntos, y consideremos a R-nets(P,T) y Monoid$(T^*, R^{(P)})$ con sus respectivas estructuras de semimódulos. Entonces, tenemos un isomorfismo en R-SemiMod*

$$\eta_{(P,T)} : R\text{-}nets(P,T) \longrightarrow Monoid(T^*, R^{(P)})^2$$

definido por:

$$(\mu, \upsilon) \longmapsto (\overline{\mu}, \overline{\upsilon})$$

para cada par $(\mu, \upsilon) \in R$*-nets*(P,T)*, donde* $\overline{\mu}, \overline{\upsilon} : T^* \longrightarrow R^{(P)}$ *están definidas por:*

$$(\omega)\overline{\mu} := \mu_\omega = \sum_{j=1}^{n} \mu_{t_j} \quad y \quad (\omega)\overline{\upsilon} := \upsilon_\omega = \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{t_j}$$

para cada $\omega = t_1 t_2 \ldots t_n \in T^*$*, respectivamente, y donde* $\mu_\lambda := \upsilon_\lambda := c(0)$.

Notar que si R es un semianillo libre de sumas cero entonces R-nets(P,T) es un semimódulo libre de sumas cero para cada objeto (P,T) en PDS.

3 El Teorema de Isomorfismo Natural

En esta sección probaremos que el isomorfismo de semimódulos

$$\eta_{(P,T)} : R\text{-nets}(P,T) \longrightarrow \text{Monoid}(T^*, R^{(P)})^2$$

dado en el Primer Teorema de Estructura 2.1 es, de hecho, un isomorfismo natural en el sentido categórico. Recordemos que dos funtores contravariantes $F, G : \Re \longrightarrow \Im$ se dicen *naturalmente isomorfos* si y sólo si para cada objeto $A \in \Re$, existe un isomorfismo $\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ en la categoría $\Im$ de tal manera que se satisface la siguiente propiedad universal: para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en la categoría $\Re$, se tiene que $\eta_B \circ G(f) = F(f) \circ \eta_A$ en la categoría $\Im$, donde $F(f)$ y $G(f)$ son los morfismos en $\Im$ que resultan de aplicar los funtores F y G al morfismo f, respectivamente, y la composición de morfismos se entiende de izquierda a derecha. En tal caso, se dice que η es un *isomorfismo natural* entre los funtores F y G, y se denota por $\eta : F \approx G$.

Sea PDS la categoría definida por los siguientes datos: los *objetos* son todos los pares ordenados de conjuntos no vacíos y disjuntos, los *morfismos* entre dos tales objetos son pares ordenados de funciones y la *composición* es la composición usual de funciones coordenada a coordenada. Es claro que la categoría PDS es un contexto natural para el estudio de las redes de Petri R-difusas. Ahora consideremos también los funtores contravariantes

$$R\text{-nets y Mnd} : PDS \longrightarrow R\text{-SemiMod}$$

definidos así:

Objetos: Si (P,T) es un objeto en PDS, definamos

$$R\text{-nets} : (P,T) \longmapsto R\text{-nets}(P,T)$$

y

$$\mathrm{Mnd} : (P, T) \longmapsto \mathrm{Monoid}(T^*, R^{(P)})^2.$$

Morfismos: Si $(f, g) : (P, T) \longrightarrow (P_1, T_1)$ es un morfismo en PDS, definamos:

$$R\text{-nets}(f, g) : R\text{-nets}(P_1, T_1) \longrightarrow R\text{-nets}(P, T)$$

por:

$$(\mu_1, \upsilon_1) \longrightarrow (\mu, \upsilon)$$

donde

$$\mu(p, t) := \mu_1(f(p), g(t)) \quad \text{y} \quad \upsilon(t, p) := \upsilon_1(g(t), f(p))$$

para cada par $(p, t) \in P \times T$. Por otro lado, usando el Primer Teorema de Estructura 2.1 definamos

$$\mathrm{Mnd}(f, g) : \mathrm{Monoid}(T_1^*, R^{(P_1)})^2 \longrightarrow \mathrm{Monoid}(T^*, R^{(P)})^2$$

por:

$$(\overline{\mu_1}, \overline{\upsilon_1}) \longmapsto (\overline{\mu}, \overline{\upsilon})$$

donde $(\mu_1, \upsilon_1) \in R\text{-nets}(P, T)$ tal que

$$R\text{-nets}(\mu_1, \upsilon_1)(f, g) = (\mu, \upsilon).$$

Es mera rutina verificar que R-nets(f, g) y Mnd(f, g) son morfismos de semimódulos y que, en efecto, R-nets y Mnd son funtores contravariantes naturalmente equivalentes bajo el isomorfismo natural de funtores $\eta : R\text{-nets} \approx \mathrm{Mnd}$ definido por:

$$\eta_{(P,T)} : R\text{-nets}(P, T) \longrightarrow \mathrm{Monoid}(T^*, R^{(P)})^2$$

para cada objeto (P, T) en la categoría PDS. Por tanto, tenemos el siguiente

Teorema 3.1 (Teorema de Isomorfismo Natural). *Existe un isomorfismo natural entre los funtores contravariantes R-nets y Mnd.*

4 Otros Teoremas de Estructura

El Primer Teorema de Estructura 2.1 sugiere el estudio de la estructura del semimódulo Monoid$(T^*, R^{(P)})$. Este es precisamente el objetivo principal de esta última sección.

Lema 4.1. *Sean $(G, \cdot)$ un monoide multiplicativo, $(M, +, \cdot)$ un semimódulo y X un conjunto no vacío arbitrario. Entonces, considerando a M como un monoide aditivo, se tiene un isomorfismo Monoid$(G, M^{(X)}) \simeq$ Monoid$(G, M)^{(X)}$ de semimódulos, donde Monoid$(G, M)^{(X)}$ y $M^{(X)}$ son considerados con sus respectivas estructuras de semimódulo.*

Prueba: Sea $M' = \text{Monoid}(G, M^{(X)})$ y definamos

$$\Phi : M' \longrightarrow \text{Monoid}(G, M)^{(X)} \text{ por:}$$

$$(f : G \longrightarrow M^{(X)}) \longmapsto \Phi_f$$

donde $\Phi_f : X \longrightarrow \text{Monoid}(G, M)$ está definida por:

$$x \longmapsto \Phi_f(x) := \Phi_{f,x} \quad y \quad (y)\Phi_{f,x} := ((y)f)(x)$$

para cada $x \in X$, $y \in G$. Entonces, Φ es un isomorfismo en la categoría R-SemiMod. En efecto, Φ está bien definida, pues $(y)f \in M^{(X)}$ para cada $f \in M'$ e $y \in G$. Ahora, veamos lo siguiente:

(i) Φ es un morfismo en R-SemiMod: Es fácil ver que Φ es una función aditiva. Ahora, notar que

$$(y)\Phi_{r\cdot f,x} = ((y)(r \cdot f))(x) = (r(y)f)(x) = r((y)f(x)) = (y)(r \cdot \Phi_{f,x})$$

para cada $r \in R$, $f \in M'$, $x \in X$ e $y \in G$. Así, $(r \cdot f)\Phi = r \cdot \Phi_f$.

(ii) Φ es un monomorfismo en R-SemiMod: Si $(f)\Phi = (g)\Phi$ con $f, g \in M'$, entonces $f = g$, pues para cada $y \in G$ y $x \in X$ se tiene

$$((y)f)(x) = (y)\Phi_{f,x} = (y)(\Phi_f(x)) = (y)(\Phi_g(x)) = (y)\Phi_{g,x} = ((y)g)(x).$$

(iii) Φ es un epimorfismo en R-SemiMod: Sea $g \in \text{Monoid}(G, M)^{(X)}$ y supongamos que $\text{Supp}(g) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Definamos la función

$$f : G \longrightarrow M^{(X)}$$

por:

$$((y)f)(x) := \begin{cases} 0, \text{ si } x = x_j \text{ para algún } j : 1 \le j \le n, \\ (y)(g(x)), \text{ si } x \ne x_j \text{ para cada } j : 1 \le j \le n. \end{cases}$$

para cada $y \in G$, $x \in X$. Entonces, es fácil ver que $f \in M'$ para el cual $\Phi_f = g$. Por tanto, Φ es un isomorfismo de semimódulos. $\square$

Corolario 4.2. *Si (P, T) es un par ordenado de conjuntos no vacíos y disjuntos, entonces se tienen los siguientes isomorfismos de semimódulos:*
(1) Monoid$(T^*, R^{(P)}) \simeq$ Monoid$(T^*, R)^{(P)}$.
(2) R-nets$(P, T) \simeq [$Monoid$(T^*, R)^{(P)}]^2$.

Si A y B son conjuntos no vacíos, denotaremos por $A + B$ a la unión disjunta de A y B. En particular, denotaremos por $2A$ al conjunto $A + A$. Supondremos siempre que los conjuntos A y B están ambos contenidos en el conjunto $A + B$.

Proposición 4.3. *Sea M un semimódulo. Si A y B son conjuntos no vacíos, entonces tenemos un isomorfismo de semimódulos:*

$$\Psi : M^{(A)} \times M^{(B)} \longrightarrow M^{(A+B)} \text{ definido por:}$$

$$(f, g) \longmapsto (f, g)\Psi$$

donde

$$(f, g)\Psi(x) := \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in A \\ g(x), \text{ si } x \in B \end{cases}$$

para cada $f \in M^{(A)}, g \in M^{(B)}$ y $x \in A + B$. En particular, $M^{(A)} \times M^{(A)} \simeq M^{(2A)}$ en la categoría R-SemiMod.

Prueba: Es claro que Ψ está bien definida y es un monomorfismo de semimódulos. Ahora, si $\alpha \in M^{(A+B)}$, entonces es fácil ver que las funciones restricción f y g de α sobre los conjuntos A y B, respectivamente, satisfacen las siguientes condiciones: $f \in M^{(A)}$, $g \in M^{(B)}$ y $(f, g)\Psi = \alpha$. Por tanto, Ψ es un isomorfismo de semimódulos. $\square$

Corolario 4.4 (Segundo Teorema de Estructura). *Si (P, T) es un par ordenado de conjuntos no vacíos y disjuntos, entonces existe un isomorfismo de semimódulos R-nets$(P, T) \simeq$ Monoid$(T^*, R)^{(2P)}$.*

En virtud del Corolario 4.4 el estudio de la estructura del semimódulo Monoid(T^*, R) es de fundamental importancia para reconocer la estructura de semimódulo de las redes de Petri R-difusas con conjunto de transiciones T. Es claro que todo morfismo de monoides $f : T^* \longrightarrow R$ está completamente determinado por su función restricción sobre el conjunto T. Así, pues, es suficiente conocer la estructura del semimódulo R^T para determinar la estructura de R-nets(P,T) requerida por Jonathan S. Golan en [2] . Por tanto, para finalizar, tenemos el siguiente

Corolario 4.5 (Tercer Teorema de Estructura). *Si* (P,T) *es un par ordenado de conjuntos no vacíos y disjuntos, entonces existe un isomorfismo de semimódulos* R*-nets*$(P,T) \simeq (R^T)^{(2P)}$.

En particular, si el conjunto P es infinito, entonces existe un isomorfismo de semimódulos R-nets$(P,T) \simeq (R^T)^{(P)}$.

Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento al profesor Luis Carlos Ospina Romero, por el estimulante apoyo brindado tanto en las discusiones de trabajo como en la orientación en cuanto a la búsqueda de información en Internet. Asimismo el autor agradece a los árbitros todas las observaciones formuladas, las cuales permitieron mejorar la presentación final del trabajo.

Referencias

[1] Garg, M.L., Ahsan, S.I., Gupta, P.V. *A Fuzzy Petri Net for Knowledge Representation and Reasoning*, Inform. Process. Letters **39**(1991), 165–171.

[2] Golan, J. S. *A Framework for Consideration of Fuzzy Petri Nets*, Proceedings of FUZZY'97 International Conference on Fuzzy Logic and Applications, Zikhon Yaakov, 1997 (`http://mathcs3.haifa.ac.il/math/golan-preprints.html`).

[3] Golan, J. S. *Norms, Semirings, and Power Algebras*, prepublicación, 1996 (`http://mathcs3.haifa.ac.il/math/golan-preprints.html`).

[4] Golan, J. S. *The Theory of Semirings, with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

[5] Jensen, K. *Coloured Petri Nets* (two volumes), Springer-Verlag, Berlin, 1992, 1995.

[6] Looney, C. G. *Fuzzy Petri Nets and Applications in Fuzzy Reasoning in Information, Decision, and Control Systems* (Tzafastas, S.G., Venetsanopoulos, A.N., eds.), Kluwer, Dordrecht, 1994, 511–527.

[7] MacLane, S. *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1971.

[8] Pareigis, B. *Categories and Functors*, Academic Press, New York, 1970.

[9] Peterson, J. L. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

[10] Petri, C. A. *Kommunikation mit Automaten*, Schrift. RhenishWeswtfälisken Instituts für Instrumentelle Mathematik an der Universität Bonn, **2** (1962).

[11] Reisig, W. *Petri Nets*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[12] Scalpelli, H., Gomide, F. *A High Level Net Approach for Discovering Potential Inconsistencies in Fuzzy Knowledge Bases*, Fuzzy Sets and Systems **64** (1994), 175–193.

[13] Scalpelli, H., Gomide, F., Pedrycz W. *Modeling Fuzzy Reasoning Using High Level Petri Nets*, Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems, **4** (1996), 61–85.

[14] Sheng Ke Yu *Knowledge Representation and Reasoning Using Fuzzy PT Net Systems*, Fuzzy Sets and Systems **75** (1995), 33–45.