Divulgaciones Matemáticas Vol. 8 No. 1 (2000), pp. 57–68

La Modelización del Espacio y del Tiempo

Modelization of Space and Time

Andrés de la Torre Gómez
(adatorre@matematicas.udea.edu.co)
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

Pedro Pérez Carreras
(pperezc@mat.upv.es)
Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

Resumen

El objeto de este artículo es validar una propuesta metodológica para acercar al alumnado de educación secundaria a la modelización que matemáticos y físicos hacen de nociones como espacio y tiempo, modelización que permite estudiar el fenómeno del movimiento y medir sus bondades en alumnos universitarios como alternativa a la versión tradicional. El estudio, cuyas bases se presentan aquí, está encuadrado en esfuerzos similares hechos con otras nociones básicas del Análisis vía el modelo educativo de van Hiele, como son la noción de continuidad y la existencia de recta tangente.
Palabras y frases clave: modelización, modelo de van Hiele, descriptores y niveles.

Abstract

The goal of this paper is the validation of a methodological proposal whose purpose is to initiate the student in the modelization of space and time as a continuum to allow the mathematical study of motion. The study we present can be framed in van Hiele‘s educational model which has been used to study other basic concepts of Analysis, such as continuity and the existence of a tangent line.
Key words and phrases: Modelization, van Hiele´s model, descriptors and levels.

Recibido 1999/07/07. Revisado 1999/10/22. Aceptado 1999/10/26.
MSC (1991): Primary 00A35.

1 La modelización del espacio y del tiempo

Nuestras intuiciones del espacio y del tiempo sugieren que cualquier longitud o intervalo temporal, por pequeño que sea, puede ser subdividido. La formulación matemática de estos conceptos (espacio y tiempo) toma en consideración esta propiedad: (i) cualquier segmento puede ser bisectado mediante construcciones de regla y compás (ii) cualquier longitud consiste de puntos, cada uno de los cuales no tiene longitud y (iii) estos puntos están relacionados entre sí de las misma forma que los números en el sistema numérico (entre dos números cualesquiera, existe una infinidad de ellos). Similarmente, el concepto matemático de tiempo lo considera formado por instantes, cada uno de los cuales no tiene duración y uno sigue al otro, como lo hacen los números en el sistema numérico.

¿Es la posibilidad de fraccionar el espacio (o el tiempo) en intervalos tan pequeños como queramos una suposición razonable? Para dar respuesta a esta pregunta, debieramos tener una concepción clara de lo que es el espacio y el tiempo. Ante las dificultades filosóficas de dar una definición de estos conceptos, las Matemáticas optan por modelar la realidad tratando estos dos conceptos en un plano de igualdad: como segmentos (finitos o no) de la recta real y, por lo tanto, admitiendo posibilidades como las mencionadas al comienzo. Desde este punto de vista, un segmento matemático es indefinidamente divisible, mientras que un cable material puede que no lo sea. Con la aspiración de construir un modelo deductivo de perfección estética comparable a los Elementos de Euclides, la Física Teórica geometriza el tiempo concibiéndolo como un segmento (o recta): el tiempo viene representado por un número real t y un intervalo de tiempo es un segmento en la recta real, aunque el modelo utilizado contraviene una de las características básicas del tiempo: su irreversibilidad. Así, el segmento matemático es un modelo que permite estudiar la realidad física y no una copia fiel de la realidad. La bondad de este modelo viene garantizada por su utilidad a la hora de estudiar problemas relacionados con cuerpos materiales (cuerdas vibrantes, cuerpos rígidos, ...) y, sobre todo, nos proporciona el modelo del tiempo y del espacio como un continuo. Toda la concepción que tenemos del mundo físico que nos rodea descansa en esta modelización.

Sin embargo esta modelización tiene unas dificultades intrínsecas que, ya en la antigüedad, serían expuestas por Zenón de Elea en un conjunto de paradojas, que anticiparían a Sócrates mediante un modo indirecto de argumentación: comenzando con las premisas del oponente, éstas serían reducidas a un absurdo y que, desde el siglo pasado, pueden ser explicadas satisfactoriamente utilizando las ideas más simples de la Teoría de Conjuntos.

2 Propósito

Nuestra idea es desarrollar una investigación que permita validar una estrategia docente que, partiendo de las premisas más simples, (a) permita al alumno de secundaria alcanzar la idea de la modelización anteriormente expuesta, proporcionando, además, una respuesta satisfactoria a las paradojas de Zenón y prepararle, de este modo, para un estudio posterior de los fundamentos del Análisis y (b) proporcionar una alternativa de presentación de estas ideas delicadas a alumnos universitarios.

La investigación está encuadrada metodológicamente en esfuerzos similares hechos en la aplicación del modelo de van Hiele al estudio de nociones básicas del Análisis, como puedan ser la noción de recta tangente, [1] o el concepto de continuidad, en la versión de A. Cauchy-K. Weierstrass, [2]. En este primer trabajo pretendemos exponer el planteamiento utilizado, los métodos de estudio empleados y una descripción de la metodología seguida, dejando para un segundo artículo la versión detallada del estudio, del tratamiento estadístico de datos acumulados y de la propuesta metodológica que proponemos.

3 El modelo de van Hiele

El *modelo de van Hiele* proporciona una descripción del proceso de **aprendizaje** postulando la existencia de niveles de pensamiento, que no se identifican con niveles de habilidad computacional y que podríamos clasificar como: Nivel 0 (predescriptivo), Nivel I (de reconocimiento visual), Nivel II (de análisis), Nivel III (de clasificación y relación) y Nivel IV (de deducción formal), aunque sobre éste último, se tiene la propia afirmación de los van Hiele como difícilmente detectable y sólo de interés teórico. Así, la aplicación de este tipo de modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados que permita la detección de los mismos, por lo que parece razonable asignar un conjunto de condiciones a los niveles diseñados para que puedan ser considerados dentro del modelo de van Hiele: (i) los niveles deben ser jerárquicos, recursivos y secuenciales (ii) deben ser formulados detectando un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual (iii) los tests (de cualquier tipo) que se diseñen para su detección deben recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos y (iv) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

Las raíces de este modelo hay que buscarlas en la obra de Piaget, aunque con diferencias relevantes: admitiendo la existencia de varios niveles de pensamiento, (i) Piaget piensa que el paso de un nivel de pensamiento a otro es función del desarrollo, van Hiele del aprendizaje. La preocupación de van Hiele estriba en cómo estimular el progreso de un nivel al siguiente (ii) Piaget no veía la existencia de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio de un nivel inferior. En el modelo de van Hiele sólo se alcanza el nivel superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura (iii) Piaget no da importancia al lenguaje en el paso de un nivel al otro. En van Hiele, cada nivel desarrolla su propio lenguaje característico de ese nivel.

4 Condicionantes previos

Dado que nuestro objetivo es implantar en el aprendiz la modelización que las Matemáticas hacen de espacio y tiempo y ayudarle a superar las dificultades que tal modelización proporciona cuando es confrontado con versiones de lo que nuestra intuición sugiere al mencionar o utilizar estos conceptos y dado que, en primera instancia, queremos efectuar esta labor con alumnos con una terminología matemática simple y sin madurez algebraica, nuestro lenguaje debe ser necesariamente coloquial, evitando términos que puedan sugerir ideas no deseadas y evitando cualquier manipulación algebraica. Así, nos moveremos en un contexto visual haciendo un uso moderado de hechos geométricos muy simples, como es la idea de proyectar.

5 Diseño

Nuestro primer objetivo es el diseño de una **entrevista socrática** que reproduzca el proceso de razonamiento deseado desde premisas elementales hasta la consecución de nuestro objetivo, intentando captar la gradación de niveles de razonamiento que se van produciendo en su discurrir y sabiendo describir aquellas características que indiquen un fluir por un determinado nivel de razonamiento (**descriptores**), que muchas veces nos vendrá indicado por el tipo de lenguaje empleado por el alumno y dónde se producen las rupturas hacia un **nivel de razonamiento** más elevado, cuantificando últimamente hasta qué nivel de razonamiento ha progresado el entrevistado durante nuestro experimento educativo. Dado que el lenguaje empleado por el entrevistado es crucial en nuestro modelo educativo para la detección de niveles y dado que nuestra entrevista discurre en dos bloques conceptuales distintos (un primero de carácter geométrico, que prepara la modelización deseada, y un segundo de geometrización de percepciones y fenómenos físicos), nuestro lenguaje de entrevistadores deberá ser muy cuidadoso en la elección de los vocablos, utilizando términos de carácter estrictamente geométricos en el primero y coloquiales en el segundo.

La realización en número suficiente de entrevistas clínicas permitirá inequívocamente la localización de niveles y descriptores, lo que permitirá la confección de un test de respuesta múltiple, para luego proceder a su pase a un número amplio de estudiantes de secundaria, lo que nos llevará a un tratamiento estadístico robusto de los datos almacenados. Las conclusiones obtenidas permitirán la elaboración fiable de un propuesta metodológica.

6 La entrevista (análisis sucinto)

El diseño de la entrevista es la parte más delicada de la investigación, tanto por su estructura como por la influencia innegable que el entrevistador produce sobre el entrevistado, sobre todo en el lenguaje empleado.

La gestación del diseño de la entrevista es larga, pues requiere de numerosos ensayos a partir de un primer diseño y su continua modificación a lo largo de más de treinta entrevistas, hasta conseguir un diseño fluido que vaya señalando con precisión detectable los puntos de ruptura indicativos de un paso a un nivel más fino de razonamiento por parte del entrevistado. Una vez conseguido el diseño adecuado, nuestra entrevista tiene varias partes bien diferenciadas: (i) la puesta a punto del entrevistado en nociones geométricas básicas, su manipulación vía la idea de proyección y la necesidad de establecer un mecanismo de comparación de segmentos, (ii) el estudio de la modelización de espacio y tiempo y (iii) la modelización del fenómeno del movimiento.

(i) Comenzamos con un intento de averiguar cómo concibe el entrevistado los conceptos geométricos básicos de **punto**, **segmento** y **longitud** del mismo y si esa concepción coincide con la asignada por las Matemáticas, procupándonos esencialmente de la concepción finitista versus continua de un segmento. Así, nuestra puesta en marcha consiste en confrontar al entrevisado con colecciones finitas de puntos que, en número suficiente y agrupados, sugieran la idea de un segmento geométrico. El siguiente paso consiste en convencer al entrevistado que concebir un segmento como agregación de un número finito de puntos (indivisibles) puede traerle dificultades al impedirle hacer construcciones simples como proceder a la bisección del segmento mediante regla no marcada y compás o comparar dos segmentos de diferente longitud formados por agregación finita de puntos mediante la idea proyectar uno sobre otro desde un punto exterior a ambos.

Nuestro siguiente bloque de preguntas tiene que ver con la relación que pueda existir entre la longitud de un segmento y la "cantidad" de puntos que lo constituyen, lo que construiremos a base de pedirle que busque la posibilidad de proyectar entre sí parejas de figuras simples: segmento y arco curvilíneo, circunferencias entre sí, segmento y recta indefinida y parejas de figuras tridimensionales. El grado de dificultad irá creciendo moderadamente y buscamos implantar en el entrevistado que la técnica de proyección puede ser el instrumento de comparación de dos conjuntos infinitos de puntos.

Una vez pasada esta fase, someteremos al entrevistado a proyecciones concretas sobre algunas de las figuras tratadas anteriormente que sugieran que una de las figuras pueda tener el doble de puntos que la otra, cuando antes parecía haber llegado a la conclusión de que tenían la misma cantidad de puntos. Buscamos sugerirle que la forma de proceder para decidir si dos figuras tienen la misma cantidad de puntos no es, dada un proyección concreta, decidir afirmativamente la cuestión, sino que el problema reside, en dadas dos figuras, hallar aquella proyección que señale que podemos afirmar que tienen la misma cantidad de puntos.

(ii) Ya armado de la técnica de Cantor de comparación de agregados de puntos (en nuestro caso, segmentos), plantearemos la modelización del espacio como un continuo, deseando que se implante la asociación posición/punto, desplazamiento/segmento y distancia/longitud) y la del tiempo (es decir, la identificación instante/punto, periodo temporal/segmento y duración/longitud).

Con estas hipótesis de trabajo, le someteremos a la paradoja de Aquiles y la tortuga, ambos colocados en dos pistas circulares de carrera como en un estadio moderno y en la siguiente versión:

"*En cada instante durante la carrera A y T se encuentran en algún punto de sus recorridos y ninguno de ellos se encuentra dos veces en el mismo punto. Como la carrera termina cuando A alcance a T y como ambos corren el mismo número de instantes, T corre el mismo número de puntos distintos que A. Por otro lado, si A debe alcanzar T, entonces deberá recorrer más puntos que T, pues debe viajar una distancia más larga. Así, A nunca alcanzará a T*".

Estudiaremos su capacidad para (1) geometrizar este problema y (2) deshacer la aparente paradoja a la luz de la modelización aceptada y la técnica de comparación de segmentos. Conseguida la geometrización del problema, pretendemos llevarle a admitir que la primera parte del razonamiento es correcto (pues desde el comienzo de la carrera debemos admitir que T pasa por el mismo número de puntos que A, puesto que, en cada instante, cada uno ocupa exactamente una posición y, así, hay una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto infinito de puntos recorridos por T y el conjunto infinito de puntos recorrido por A). Sin embargo, deseamos que reaccione positivamente a la argumentación de que la suposición de que, puesto que A debe correr una distancia más larga para ganar la carrera que T, A debe recorrer "más" puntos que T en el segmento es incorrecta, pues ya debe haber llegado a la conclusión de que la cantidad de puntos que tiene un segmento (o arco circular) nada tiene que ver con su longitud y admitir, así, que Aquiles alcanza a la tortuga.

(iii) Admitida por el entrevistado la misma modelización de conceptos dispares como espacio y tiempo, iniciamos la modelización del movimiento como una correspondencia entre segmentos, pues la modelización que hemos implantado permite asociar instantes con posiciones y periodos temporales con segmentos. Como forma de validación de los logros que podamos haber conseguido, el entrevistado será sometido a la paradoja de la flecha:

"*Considera una flecha en vuelo. En cada instante se encuentra en una posición definida. Al instante siguiente, se encuentra en otra posición. ¿Cuándo consigue la flecha desplazarse de una posición a la otra?*"

Nuestra modelización del tiempo debe permitirle afirmar que el argumento es inválido, pues no existe un instante siguiente. El recibir una contestación así sería indicativo de la madurez adquirida por el entrevistado, pero esta afirmación no resuelve satisfactoriamente la paradoja, pues intercambia una dificultad por otra: antes de que la flecha pueda llegar a una posición desde otra cercana, deberá pasar por un número infinito de posiciones intermedias ¿cómo consigue llegar si debe pasar por una infinidad de posiciones intermedias? La respuesta debe estar, una vez más, en la correspondencia entre la infinidad de posiciones y la infinidad de instantes temporales.

Resuelto este problema, seguimos ahondando en el tema, pero ahora con la modelización del movimiento como objetivo:

"*si, en cada instante de su vuelo, la punta de la flecha ocupa una posición definida, en cada instante la flecha no puede moverse, pues un instante no tiene duración en nuestro modelo. Así, la flecha está en reposo en cada instante; como ésto es cierto en cada instante, la flecha en movimiento está siempre en reposo".*

Dado que nuestro modelo identifica el movimiento con un conjunto de reposos compararemos, finalmente, esta modelización con el fenómeno físico del movimiento, trayendo a colación la imagen de cómo crear la ilusión del movimiento a base de reposos, como la idea de una película cinemátográfica.

7 Niveles y Descriptores

Fruto de las investigaciones realizadas en el diseño de la entrevista, conseguimos los siguientes niveles y descriptores

- **Nivel 0** (predescriptivo)

0.1 El entrevistado reconoce de manera intuitiva que el segmento se compone de puntos. Cada segmento tiene una longitud, que es la medida de su extensión. Dados dos segmentos, el ojo discrimina cuál de ellos tiene longitud mayor.
0.2 Percibe que el espacio se compone de posiciones. Se percata de que los objetos físicos que ocupan el espacio no pueden ser fraccionados tantas veces como queramos.
0.3 Percibe que el tiempo se compone de instantes. Se percata de que no es posible empíricamente obtener fracciones de tiempo tan pequeñas como queramos.

- **Nivel I** (de reconocimiento visual)

1.1 Relaciona posición con punto, así como desplazamiento entre dos posiciones con segmento.
1.2 Relaciona instante con punto y periodo temporal con segmento.
1.3 Admite que el segmento está compuesto de una cantidad indefinida de puntos, cada uno de los cuales no tiene magnitud.
1.4 Para pasar del nivel I al II, el entrevistado deberá abandonar la apelación a la longitud como criterio para decidir cuál de dos segmentos dados está constituido por mayor cantidad de puntos.
1.5 Admite que es imposible que dos segmentos de longitudes diferentes estén constituidos por cantidades finitas distintas de puntos.

- **Nivel II** (análisis)

2.1 Analiza la relación entre desplazamiento y segmento: el alambre material no puede ser fraccionado tantas veces como queramos, en cambio el segmento sí.
2.2 Analiza la relación entre periodo temporal y segmento: mientras el segmento puede ser bisectado tantas veces como se quiera, es imposible obtener empíricamente fracciones de tiempo arbitrariamente pequeñas.

2.3 Admite que dos segmentos dados de longitudes diferentes están constituidos por la misma cantidad indefinida de puntos.

2.4 Dada una proyección concreta con la cual se establezca una correspondencia punto a punto entre dos figuras geométricas, el entrevistado afirma que están constituidas por la misma cantidad de puntos

2.5 La técnica de la proyección de una figura geométrica sobre otra puede sugerir en el entrevistado conclusiones contradictorias con respecto a cuál de ellas tiene más puntos, dependiendo del punto a partir del cual se haga la proyección. El entrevistado requiere un criterio preciso para decidir si dos figuras están constituidas por la misma cantidad de puntos.

- **Nivel III** (de relación y clasificación)

3.1 El entrevistado define adecuadamente cuándo dos figuras geométricas están constituidas por la misma cantidad de puntos: dadas las figuras, debe encontrar una proyección sobre ellas que las ponga en correspondencia punto a punto.

3.2 Reconoce que Aquiles puede ocupar la misma cantidad de posiciones distintas que la tortuga, aunque las distancias recorridas sean distintas.

3.3 Reconoce que dos periodos temporales están constituidos por la misma cantidad de instantes, aunque sus duraciones sean distintas.

3.4 Asocia instante con posición, así como periodo con desplazamiento.

3.5 Interpreta el movimiento como una correspondencia punto a punto entre dos segmentos.

3.6 Modeliza el movimiento como una función.

3.7 Considera el movimiento como constituido por una cantidad indefinida de reposos, lo que le permite distinguir entre movimiento y la ilusión del mismo.

8 Validación

8.1 Procedimiento

Nuestros intentos de corroboración de la bondad del diseño efectuado en apartados anteriores discurren en dos frentes: (1) Producimos un **test** de respuesta múltiple relativo a la parte (i) de nuestra entrevista (aquella en la que queremos abordar el problema de qué significa que dos figuras geométricas estén constituidas por la misma cantidad de puntos) dirigido a alumnos de enseñanza secundaria y primer año de universidad, con la intención de estudiar una muestra amplia de aprendices y un tratamiento estadístico que valide nuestras elecciones de niveles de razonamiento, descriptores de los mismos y adecuación del lenguaje empleado con aprendices de esas edades y (2) Debido a lo sutiles que son las ideas manejadas en el análisis de las paradojas de Zenón, preferimos los métodos cualitativos (es decir, más **entrevistas** clínicas) para validar nuestra propuesta en los temas tratados en las partes (ii) y (iii) de la entrevista.

Muestras empleadas: alumnos de enseñanza secundaria de la ciudad de Medellín, alumnos de Segundo Semestre de Ingeniería de Sistemas de la Universidad EAFIT (Medellín), alumnos de Primer Curso de Ingeniería Industrial de la Universidad Politécnica de Valencia (España) y alumnos de cursos superiores de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Antioquia (Medellín).

8.2 Test

Conseguimos una prueba escrita de 28 preguntas que reproduce con la mayor fidelidad posible la entrevista, con cuatro opciones de respuesta cerradas, que habían sido escogidas de entre las respuestas más representativas de la entrevista. Dejamos una opción de respuesta "e", abierta para los comentarios en el caso de que las otras cuatro opciones no se correspondieran con el pensamiento del alumno y, siendo la elección de esta última opción, nuestra única posibilidad de indagar sobre el lenguaje empleado por el entrevistado, aspecto éste que nos venía dado de forma natural en la entrevista.

8.3 Algoritmo

Se nos planteó la dificultad de asignar un nivel de razonamiento respecto al concepto que investigamos a cada una de las entrevistas, para lo que utilizamos un algoritmo de K-medias con la asistencia del Programa SPSS©. En dicho algoritmo, los casos se asignan a su vez al centro de conglomerado más próximo. La localización del centro, en el caso de que hayamos seleccionado utilizar las medias actualizadas, se actualiza después de añadir cada dato. Se asignan todos los datos y el proceso se van repitiendo hasta que la solución converja. Entonces se clasifican todos los casos, asignándoles el centro de conglomerado más próximo.

Antes de comenzar el análisis de conglomerados con el algoritmo de K-medias, nos planteamos elegir el número de conglomerados, que según nuestra clasificación de niveles, debería de ser de tres. Pasamos, en una segunda fase, a buscar unos centros iniciales, para lo que hicimos una preclasificación de las pruebas a las que claramente podíamos asignarle un nivel, que no sería definitiva, sino útil para encontrar los centros iniciales (para arrancar con el algoritmo) y que irían cambiando a medida que avanzamos. Para poder realizar esta preclasificación, agrupamos las preguntas de la prueba escrita (que no incluimos por razones de extensión) en tres bloques y elegimos un criterio de clasificación "del experto" (Criterio A). Calculamos los porcentajes de aciertos de cada pregunta, según el nivel de razonamiento asignado a la entrevista, utilizando estos porcentajes como centros iniciales ya que, de no introducir unos centros iniciales, el algoritmo no tiene capacidad para encontrar una clasificación coherente, debido a la diversidad de las respuestas. Consideramos otro criterio distinto de clasificación (Criterio B), pero también acorde con nuestros resultados experimentales previos y con la opinión del experto. El algoritmo arroja también una clasificación en tres centros, que coincide esencialmente con la obtenida con el criterio del experto (Criterio A), lo que confirma la estabilidad del análisis estadístico. Resumiendo, el tratamiento estadístico empleado confirma la existencia de tres esquemas bien diferenciados de respuestas (correspondientes a los niveles cuya existencia queríamos demostrar), confirma que los descriptores propuestos son los adecuados a la descripción de cada nivel y confirma que su detección es también posible mediante el test de respuesta múltiple.

El algoritmo nos ofreció una clasificación de las entrevistas realizadas que concordaba con nuestra experiencia previa vía la entrevista: pocos alumnos de enseñanza secundaria en un nivel III y una cantidad similar mayor en niveles I y II y mejores resultados en Nivel III en alumnos de primer curso universitario. Observándolos por grupos, pudimos ver las diferencias entre alumnos universitarios y alumnos no universitarios, además de poder afirmar que los niveles no se corresponden con niveles educativos: existen alumnos universitarios con un nivel bajo de razonamiento, aunque encontramos entre éstos más porcentaje de alumnos con un nivel de razonamiento más alto. Como era de esperar, los análisis cualitativos llevados a cabo con alumnos de la carrera de Ciencias Matemáticas vía la entrevista produjo resultados de amplia participación en el Nivel III, así como la bondad de la entrevista como procedimiento para, en el tiempo de duración de la entrevista, alcanzar ese nivel de razonamiento.

Referencias

[1] Llorens, J. L., Pérez Carreras, P. *An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **28**(5) (1997), 713–726.

[2] Campillo Herrero, P., Pérez Carreras, P. *La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele*, Divulgaciones Matemáticas, **6**(1) (1998), 69–80.