Divulgaciones Matemáticas Vol. 8 No. 1 (2000), pp. 87–95

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia
Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Dedicamos esta entrega de *Problemas y Soluciones* a reseñar la **XIV Olimpíada Iberoamericana de Matemática**, realizada en La Habana, Cuba, durante los días 14 y 15 de septiembre de 1999. En cada uno de los dos días de competencia se propusieron tres problemas, otorgándose a los participantes cuatro horas y media para resolverlos. Cada problema tenía un valor de siete puntos. El país ganador fue Argentina, cuyos representantes obtuvieron tres medallas de oro y una de plata. Los mejores resultados individuales correspondieron a Emerson León (Colombia) y Carlos Villalvazo (México), cada uno de los cuales totalizó 40 puntos y obtuvo una medalla de oro. La delegación venezolana tuvo una participación destacada, obteniendo cuatro medallas de bronce. Estuvo integrada por Kevin Hernández (Caracas), Tomás Kabbabe (Caracas), Homero Martínez (Mérida) y David Seguí (Zulia). Vayan para ellos nuestras más calurosas felicitaciones, al tiempo que invitamos a todos los jóvenes venezolanos a seguir su ejemplo y a prepararse para participar en las Olimpíadas Matemáticas, en primer lugar en las nacionales y eventualmente como representantes de Venezuela en las diversas competencias internacionales. La próxima Olimpíada Iberoamericana se realizará por cierto en Caracas del 16 al 24 de septiembre del presente año.

Los seis problemas de la pasada Olimpíada Iberoamericana aparecen propuestos a continuación (números 20 al 25). Como de costumbre, invitamos a los lectores a enviar sus soluciones, las mejores de las cuales serán publicadas en los próximos números.

1 Problemas propuestos

20. Halle todos los enteros positivos que son menores que 1000 y cumplen con la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

21. Dadas dos circunferencias M y N decimos que M *biseca* a N si la cuerda común es un diámetro de N. Considere dos circunferencias fijas C_1 y C_2 no concéntricas.

    (a) Pruebe que existen infinitas circunferencias B tales que B biseca a C_1 y B biseca a C_2.

    (b) Determine el lugar geométrico de los centros de las circunferencias B.

22. Sean n puntos distintos, P_1, P_2, ... , P_n, sobre una recta del plano ($n \geq 2$). Se consideran las circunferencias de diámetro P_iP_j ($1 \leq i < j \leq n$) y coloreamos cada circunferencia con uno de k colores dados. Llamamos (n,k)-nube a esta configuración.

    Para cada entero positivo k, determine todos los n para los cuales se verifica que toda (n,k)-nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color,

    Nota: Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

23. Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1,3,7,9\}$. Demuestre que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.

24. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

(a) Demuestre que OA es perpendicular a PQ.

(b) Si M es el punto medio de BC, pruebe que $\overline{AP}^2 = 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{OM}$.

25. Sean A y B dos puntos del plano y C un punto de la mediatriz de AB. Se construye una sucesión $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ de la siguiente manera: $C_1 = C$ y para $n \geq 1$, si C_n no pertenece al segmento AB, C_{n+1} es el circuncentro del triángulo ABC_n. Determine todos los puntos C tales que la sucesión $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ está definida para todo n y es periódica a partir de cierto punto.

    Nota: Una sucesión $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ es periódica a partir de un cierto punto si existen enteros positivos k y p tales que $C_n = C_{n+p}$ para todo $n \geq k$.

26. *Propuesto por Ángel Oneto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela* (`aoneto@luz.ve`).

    Probar que existe una y sólo una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se verifica:

    (a) $f(mn) = f(m)f(n)$.

    (b) $m \neq n$ y $m^n = n^m \Longrightarrow f(m) = n$ ó $f(n) = m$.

    (c) $m, n \geq 3$ y $m^n < n^m \Longrightarrow f(n) < f(m)$.

    (este problema es una variación del planteado en el Boletín de la Asociación Matemática Venezolana vol. 1 No. 2 1994.)

2 Soluciones

10. [**4**(1/2) (1996) p. 100] *Propuesto por Ángel Oneto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela* (`aoneto@luz.ve`).

    Sea A un dominio de integridad. Si A no es un cuerpo entonces existe un A-módulo M con submódulos M_1 y M_2 tales que ambos son libres de torsión pero M no lo es, y $M = M_1 + M_2$.

    Solución por el proponente:

    Sea $a \in A$ un elemento no nulo y no inversible. Poniendo

$$M = \frac{A^2}{\langle a(1,1) \rangle}$$

resulta que M es un A-módulo que no es libre de torsión pues $\overline{(1,1)}$ es un elemento no nulo de torsión (de ser $\overline{(1,1)} = \overline{(0,0)}$ se tendría $(1,1) = ba(1,1)$ para algún $b \in A$ y a resultaría inversible).

Los A-submódulos $M_1 = A\overline{(1,0)}$ y $M_2 = A\overline{(0,1)}$ cumplen obviamente que $M = M_1 + M_2$ y son, además, libres de torsión, pues si $c\overline{(1,0)}$ es un elemento de torsión en M_1, existe $d \in A$ no nulo tal que $dc(1,0) = ea(1,1)$ para algún $e \in A$, de donde resulta $e = 0$ y por tanto $c = 0$. De manera similar resulta que M_2 es libre de torsión.

12. [**7**(1) (1999) p. 101] *Propuesto por Ignacio Larrosa Cañestro, A Coruña, España* (`ilarrosa@lander.es`).

Dado un polígono convexo inscripto en una circunferencia, pruebe que la suma de los radios de las circunferencias inscriptas en los triángulos de cualquier triangulación (es decir, descomposiciones del polígono en triángulos, cuyos vértices sean vértices del polígono y que lo recubran completamente sin solapamientos) es la misma.

Solución I por Wilson Pacheco, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela (`wpacheco@luz.ve`).

El enunciado es trivialmente cierto si el polígono es un triángulo. A continuación lo probaremos para cuadriláteros. Para ello sean M, N, O y P los vértices del cuadrilátero, $a = MN$, $b = NO$, $c = OP$ y $d = PM$ los lados del mismo, $e = MO$ y $f = NP$ sus diagonales. Sean r_1, r_2, r_3 y r_4 los inradios y p_1, p_2, p_3 y p_4 los semiperímetros de los triángulos MNO, OPM, NOP y PMN respectivamente. Sea R el radio de la cirunferencia circunscrita al cuadrilátero (que coincide con el circunradio de los triángulos MNO, OPM, NOP y PMN). Sea $p = a+b+c+d$. La validez del enunciado se comprueba al mostrar que $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$, o lo que es equivalente

$$Rr_1 + Rr_2 = Rr_3 + Rr_4. \tag{1}$$

Ahora bien,

$$\begin{array}{ll}
r_1 = \sqrt{\frac{(p_1-a)(p_1-b)(p_1-e)}{p_1}} & R = \frac{abe}{4\sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-b)(p_1-e)}} \\
r_2 = \sqrt{\frac{(p_2-c)(p_2-d)(p_2-e)}{p_2}} & R = \frac{cde}{4\sqrt{p_2(p_2-c)(p_2-d)(p_2-e)}} \\
r_3 = \sqrt{\frac{(p_3-b)(p_3-c)(p_3-f)}{p_3}} & R = \frac{cbf}{4\sqrt{p_3(p_3-b)(p_3-c)(p_3-f)}} \\
r_4 = \sqrt{\frac{(p_4-d)(p_4-a)(p_4-f)}{p_4}} & R = \frac{adf}{4\sqrt{p_4(p_4-d)(p_4-a)(p_4-f)}}
\end{array}$$

Al substituir estos valores en la ecuación (1) la igualdad a probar que se obtiene es

$$e\left(\frac{ab}{4p_1}+\frac{cd}{4p_2}\right)=f\left(\frac{cb}{4p_3}+\frac{ad}{4p_4}\right)$$

que es equivalente a

$$ep_3p_4(p_2ab+p_1cd)=fp_1p_2(p_4cb+p_3ad) \tag{2}$$

La parte izquierda de (2) es:

$$\frac{1}{8}(efp+ef^2+e(ac+bd)+e(ab+cd))(ab(c+d) \\ +cd(a+b)+e(ab+cd)) \tag{3}$$

mientras que la parte derecha es

$$\frac{1}{8}(efp+e^2f+f(ac+bd)+f(bc+da))(ab(c+d) \\ +cd(a+b)+f(bc+da)) \tag{4}$$

Como el cuadrilátero es inscriptible se tienen las siguientes relaciones (Teorema de Ptolomeo):

$$\begin{aligned}&ac+bd=ef\\&e(ab+cd)=f(bc+da)\end{aligned}$$

que al ser substituidas en (3) nos dan (4), y el caso del cuadrilátero queda cubierto.

Para concluir la demostración supongamos que el enunciado es cierto para todo polígono incriptible con menos de n lados y probemos inductivamente que el mismo es cierto para los polígonos de n lados. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ los vértices consecutivos del polígono. Todas las triangulaciones posibles se dividen en dos clases: las que contienen al triángulo $A_1A_2A_3$ y las que no lo contienen. Las de la primera clase nos dan también una triangulación para el polígono $A_1A_3....A_n$. Por la hipótesis inductiva, la suma de los inradios de los triángulos pertenecientes a cualquier triangulación de este polígono es constante, lo que sumado al inradio del triángulo $A_1A_2A_3$ nos da una constante para todas las triangulaciones de la primera clase.

Si la triangulación no contiene al triángulo $A_1A_2A_3$, entonces debe contener un triángulo $A_1A_2A_k$, con $k > 3$. La diagonal A_2A_k divide al polígono en otros dos: $A_2A_3...A_k$ y $A_k...A_1A_2$, que quedan triangulados por la triangulación del poligono inicial. Como la suma de los inradios de los triángulos correspondientes al polígono $A_2A_3...A_k$ es constante, la triangulación de dicho polígono puede ser sustituida, de ser necesario, por otra que contenga el triángulo $A_2A_3A_k$. Así, toda triangulación que no contenga al triángulo $A_1A_2A_3$ es equivalentes a una triangulación donde aparecen los triángulos $A_1A_2A_k$ y $A_2A_3A_k$ para algún $k > 3$. Por lo visto para cuadriláteros podemos ahora sustituir estos triángulos por $A_1A_2A_3$ y $A_1A_3A_k$ y la suma es igual a la constante de las triangulaciones de la primera clase.

Solución II por José H. Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela (`jhnieto@luz.ve`).

Utilizaremos el siguiente lema, atribuído a Carnot:

Lema: Si O es el circuncentro de un triángulo, R el circunradio y r el inradio, entonces la suma algebraica de las distancias de O a los lados del triángulo es igual a $R + r$ (las distancias se consideran positivas si O está en el mismo semiplano, respecto a un lado, que el vértice no perteneciente a ese lado, y negativas en caso contrario).

Demostración del Lema: La suma algebraica de las distancias es $D = R(\cos A + \cos B + \cos C)$. Despejando los cosenos del teorema del coseno y sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned} D &= \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} + \frac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{2ac} + \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab} \\ &= \frac{R}{2abc}(a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)) \\ &= \frac{R}{2abc}((a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) + 2abc) \\ &= R + \frac{4R(p - a)(p - b)(p - c)}{abc}, \end{aligned}$$

siendo $p = (a + b + c)/2$. Usando ahora las fórmulas $R = abc/(4S)$, donde S es el área del triángulo, $r = S/p$ y $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$ (Heron), la última expresión obtenida se reduce a $R + r$.

Solución del problema: Dada una triangulación calculemos la suma algebraica de las distancias de O a los lados de cada triángulo. Si sumamos todos los resultados, los términos correspondientes a lados internos (diagonales del polígono) se cancelan, ya que cada una de estas distancias aparece dos veces pero con signos diferentes. Por el lema, esta cantidad es igual a $(n-2)R$ más la suma de los inradios de los triángulos. Por lo tanto la suma de los inradios es igual a (suma de distancias de O a los lados del polígono) $-(n-2)R$, que evidentemente es independiente de la triangulación.

Comentario: El presente problema es un *sangaku*, problemas que según una antigua tradición japonesa se inscribían en tablillas de madera y se colgaban en los templos en honor a los dioses.

16. [**7**(2) (1999) p. 194]

Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla '+'.

7	8	9	
4	5	6	+
1	2	3	

Dos jugadores A y B juegan de la manera siguiente: A enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla +. Pasa la calculadora a B, que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por A que no sea la misma que la última pulsada por A; a continuación pulsa + y le devuelve la calculadora a A, que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es ésta?

Solución por Wilson Pacheco, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela (`wpacheco@luz.ve`).

Existe una estrategia ganadora para el jugador A, quien debe comenzar jugando el 9. A continuación se detallan las posibilidades de desarrollo del juego.

Si B juega 7, la suma llega a 16 y A jugará 9 nuevamente llevando la suma a 25, lo que obliga a B a jugar 3 (pues de lo contrario perdería en este momento), llegando la suma a 28, A juega el 2, llevando la suma a 30 y B perderá en su próxima jugada.

Si B juega 8, la suma llega a 17 y A jugará 9 llevando la suma a 26, lo que obliga a B a jugar 3 (pues otra jugada lo haría perder) llegando la suma a 29; A juega el 1, llevando la suma a 30 y B perderá en su próxima jugada.

Si B juega 6 la suma llega a 15 y A jugará 5 llevando la suma a 20; si B juega 2, 4, 6 u 8, A jugará 8,6,4 o 2 respectivamente, llevando la suma total a 30, con lo que B perderá en su próxima jugada.

Si B juega 3, la suma llega a 12 y A jugará 6 llevando la suma a 18. Aquí hay dos opciones para B;

En la primera, si B juega 3 o 9, A jugará 9 o 3 respectivamente, llevando la suma total a 30 con lo que B perderá en su próxima jugada.

En la segunda, si B juega 4 o 5 , A jugará en cualquier caso 6, llevando la suma a 28 y 29 respectivamente. La menor jugada para B en este momento es 3, que suma con los resultados anteriores 31 o 32 perdiendo B nuevamente.

19. [**7**(2) (1999) p. 194.]

Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S esté en S. Encuentre el número máximo de elementos de S.

Solución por Julio Subocz, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela (`jsubocz@luz.ve`).

El conjunto $S = \{500, 501, 502, \dots, 1000\}$ tiene la propiedad pedida y su cardinal es 501. Probaremos que éste es el máximo buscado.

Sea S un conjunto que satisfaga la condición del problema y sean $A_1 = \{1, 2, 3, \dots, 499\}$, $A_2 = \{500, 501, 502, \dots, 1000\}$, $S_1 = S \cap A_1$, $S_2 = S \cap A_2$ y $k = |S_1|$.

Si $k = 0$ entonces obviamente $|S| \leq 501$. Supongamos entonces que $k \geq 1$. Si $S_2 = \varnothing$ entonces $|S| \leq 499$. Si en cambio $S_2 \neq \varnothing$ sea s el mínimo elemento en S_2.

Sea $B = \{1001, 1002, \dots, 1499\}$. Si $a \in S_2$, claramente el trasladado $a + S_1 \subseteq A_2 \cup B$.

Si $s \geq 501$ entonces $|B \cap (s + S_1)| \leq s - 501$, luego $|A_2 \cap (s + S_1)| \geq |s + S_1| - s + 501 = k - s + 501$.

Ahora $A_2 \cap (s+S_1) \subseteq A_2 \setminus S_2$ y $\{500, \ldots, s-1\} \subseteq A_2 \setminus S_2$, y se deduce que $|A_2 \setminus S_2| \geq (s-500)+(k-s+501) = k+1$. Luego $|S_2| \leq 501-k-1$, y $|S| = |S_1| + |S_2| \leq 500$.

Si $s = 500$ entonces $|A_2 \setminus S_2| \geq |500+S_1| = k$, $|S_2| \leq 501-k$ y $|S| \leq 501$.

Comentario del editor: Más en general se puede probar que si S es un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes de S está en S, entonces S tiene como máximo $n+1$ elementos. Más aún, si $n > 2$ entonces el máximo se alcanza solamente para $S = \{n, n+1, \ldots, 2n\}$.