Divulgaciones Matemáticas Vol. 8 No. 2 (2000), pp. 99–112

Condición de Unicidad para el Problema de Pick

Uniqueness Condition for the Pick Problem

Gladys Cedeño (gcedeno@usb.ve)
Universidad Simón Bolívar
Ap. 89000, Caracas 1080-A, Venezuela.
Mischa Cotlar (mcotlar@euler.ciens.ucv.ve)
Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela
Apartado Postal 1020-A. Caracas. Venezuela.

Resumen

Combinando la Teoría de los Operadores Modelos, formas de Hankel y Teorema de Nehari, se dan condiciones necesarias y suficientes para que el problema de interpolación de Pick tenga solución. Relacionando éstas con una condición de unicidad para las extensiones Hahn-Banach de funcionales, se logra una condición necesaria y suficiente para la unicidad de las soluciones del problema de Pick.
Palabras y frases clave: Operadores modelos, espacio modelo, formas de Hankel, operador de Hankel.

Abstract

Combining Operators Model Theory, Hankel forms and Nehari's Theorem, a necessary and sufficient condition for the existence of solutions in Pick's interpolation problem is given. Relating this with a uniqueness condition for Hahn-Banach extensions of functionals, a necessary and sufficient condition for uniqueness of solutions in Pick's problem is obtained.
Key words and phrases: Model Operators, model space, Hankel form, Hankel operator.

Recibido 1999/12/08. Revisado 2000/06/09. Aceptado 2000/06/15.
MSC (2000): Primary: 43A99; Secondary: 47B35, 32A50.

1 Introducción

Si $M_1, \ldots, M_n$ son n puntos fijados del disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ entonces para toda n-upla de números complejos $w_1, \ldots, w_n$ existe una función $F \in H^\infty(D)$ (es decir, una función holomorfa y acotada en D), tal que $F(M_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$.

Pick planteó (1916) [11] el problema de interpolación:

Fijados $M_1, \ldots, M_n$ de D y números complejos $w_1, \ldots, w_n$ dar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una función $F \in H^\infty(D)$ tal que

$$|F(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D \qquad \text{y} \qquad F(M_j) = w_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

La condición dada por Pick es que sea no negativa la matriz dada por

$$\left(\frac{1 - \overline{M_j} M_k}{1 - \overline{w_j} w_k} \right)_{j,k=1}^{n}.$$

Posteriormente, D. Sarason (1967) [12] enfocó este resultado mediante la Teoría de los Operadores Modelos (ver definición más abajo) y lo relacionó con una desigualdad para operadores probada por V. Neumann en 1951 [14]. Adamjan-Arov-Krein (A-A-K) (1971) [1] estudiaron el problema en forma más completa, enfocándolo mediante la Teoría de formas de Hankel y el Teorema de Nehari. Más recientemente, Cole-Lewis-Wermer [4] extendieron la teoría a Algebras Uniformes.

En este artículo se presenta una exposición nueva de la teoría que combina los enfoques de Sarason y Adamjam-Arov-Krein, que se basa en el Teorema de Nehari, y aclara la relación del último teorema con las extensiones Hahn-Banach de funcionales, lo que permite, usando un criterio general para unicidad de extensiones Hahn-Banach, dar una nueva condición de unicidad para el problema de Pick.

En un artículo posterior, se presentará una generalización de la teoría, antes mencionada, de Cole-Lewis-Wermer, en un marco más general donde en vez de álgebras uniformes se consideran espacios vectoriales uniformes. El criterio de unicidad dado aquí se aplica aún en este marco más general.

2 Espacios y Operadores Modelo

Sea $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Para todo $p \in [0, \infty]$ se define

$$H^p := \{f \in L^p(T) : \hat{f}(m) = 0 \;\text{ si }\; m < 0\}$$

en particular, $H^\infty = H^2 \cap L^\infty(T)$. Para toda $f \in H^p$ existe una única $\widehat{f} \in H^p(D)$ tal que

$$f(e^{it}) = \lim_{r\to 1} \widehat{f}\,(re^{it}) \text{ c.t. } e^{it} \quad (\text{límite no tangencial}) \tag{2.1}$$

y, recíprocamente, dada $\widehat{f} \in H^p(D)$ existe $f \in H^p$ que verifica (2.1).

Una función $\theta \in H^\infty$ se dice *interna* si $|\theta(t)| = 1$ *c.t.p.* Las funciones internas más simples son los factores Blaschke

$$\beta(e^{it}) = \frac{e^{it} - M}{1 - \overline{M}e^{it}},$$

donde $M \in D$; la función holomorfa correspondiente $\widehat{\beta}$, se caracteriza por la propiedad $\widehat{\beta}\,(D) = D$ y $|\beta(z)| = 1$ si $z \in T$ y tiene un único cero M en D.

El espacio H^2 es un espacio de Hilbert, por ser subespacio de $L^2\,(T)$, y su complemento ortogonal se designa con $H^2_- = L^2(T) \ominus H^2$. Las proyecciones ortogonales de $L^2(T)$ sobre H^2 y H^2_- son denotadas por P_+ y P_- respectivamente. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los polinomios trigonométricos en T, los subespacios vectoriales $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \cap H^2$ y $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \cap H^2_-$ son densos en H^2 y H^2_- respectivamente.

Sea $e_n(t) = e^{int}$ para cualquier entero n. El operador $S : H^2 \to H^2$ dado por $Sf := e_1\, f$, para $f \in H^2$, se llama *Shift* de H^2 o *Shift unilateral* y su adjunto $S^* : H^2 \to H^2$ está dado por $S^*f = P_+(e_{-1}f)$ para $f \in H^2$. Los espacios S-invariantes están caracterizados en los siguientes Teoremas de Beurling [2, 6, 7, 10, 13].

Recordamos que un subespacio $E \subset H^2$ es S-invariante cuando $S(E) \subset E$.

Teorema 2.1. *El subespacio $E \subset H^2$ es S-invariante si y sólo si existe una función interna $\theta \in H^\infty$ tal que $E = \theta H^2 := \{\theta f : f \in H^2\}$.*

Teorema 2.2. *$E \subset H^2$ es S-invariante y tiene codimensión finita menor o igual que n si y sólo si existe un producto finito de Blaschke $\beta = \beta_1 \dots \beta_k$, donde $k \leq n$, tal que $E = \beta H^2$.*

Sea $E = \theta H^2$ un espacio S-invariante, $E_\theta = H^2 \ominus E$ de manera que $H^2 = E \oplus E_\theta$ y sea $P_\theta : H^2 \to E_\theta$ la proyección ortogonal de H^2 sobre E_θ. Los espacios E_θ se llaman *Espacios Modelos* y los operadores $T_\theta : E_\theta \to E_\theta$, dados por $T_\theta := P_\theta S_{|_{E_\theta}}$ son compresiones de S a E_θ, que sustituyen al shift en E_θ, y se llaman *Operadores Modelo.* Para su operador adjunto tenemos: $T^*_\theta = S^*_{|_{E\theta}}$.

Proposición 2.1. *Sea $\theta \in H^\infty$ un función interna. Entonces, para cada $f \in H^2$, $P_\theta f = \theta P_- \bar{\theta} f$.*

Cuando
$$\theta(t) = \beta(t) = \frac{e^{it} - M_1}{1 - \overline{M_1} e^{it}} \cdots \frac{e^{it} - M_n}{1 - \overline{M_n} e^{it}}$$
es un producto finito de Blaschke con ceros simples $M_1, \ldots, M_n$ resulta, usando el Teorema 2.2, que el espacio modelo E_β tiene dimensión finita n.

Para cada $G \in H^\infty$ sean $G(T_\beta) : E_\beta \to E_\beta$, $G(T_\beta^*) : E_\beta \to E_\beta$ dados por

$$\begin{aligned} G(T_\beta) f &= P_\beta G f, \\ G(T_\beta^*) f &= P_+ \bar{G}^t f, \quad \text{donde} \quad G^t(z) = \overline{G(\bar{z})}. \end{aligned}$$

Proposición 2.2. *(Cálculo funcional para T_β):*

a) $G(T_\beta)$, $G(T_\beta^*) \in L(E_\beta)$ *para cada* $G \in H^\infty$.

b) *Si* $Q(e^{it}) = a_0 + a_1 e^{it} + \cdots + a_m e^{imt}$ *entonces*
$$\begin{aligned} Q(T_\beta) &= a_0 I + a_1 T_\beta + \cdots + a_m T_\beta^m, \\ Q(T_\beta^*) &= a_0 I + a_1 T_\beta^* + \cdots + a_m T_\beta^{*m}. \end{aligned}$$

c) *Si* $G \in H^\infty$, $\{Q_m\}_{m \geq 1} \subset \mathcal{P}_1$ *y* $Q_m \to G$ *en la norma de* L^2, *entonces* $Q_m(T_\beta) \to G(T_\beta)$, $Q_m(T_\beta^*) \to G(T_\beta^*)$ *fuertemente en* $E_\beta \cap H^\infty$.

d) $G(T_\beta)^* = P_+ \bar{G} = G^t(T_\beta^*)$.

Proposición 2.3. *Existe una base de E_β, $V = \{e_1, \ldots, e_n\}$, formada por vectores propios de T_β^* tal que*

a) *Cada e_k satisface $e_k(t) = \dfrac{1}{1 - \overline{M_k} e^{it}}$ con valor propio $\overline{M_k}$ cero de β para cada $k = 1, \ldots, n$. Los productos escalares satisfacen: $\langle e_k, e_j \rangle = \dfrac{1}{1 - \overline{M_k} M_j}$ para cada $k, j = 1, \ldots, n$.*

b) *Para cada $G \in H^\infty, G(T_\beta^*)$ es un operador de multiplicación con multiplicadores $G(\overline{M_1}), \ldots, G(\overline{M_n})$.*

c) *Para cada $G \in H^\infty$, $G(T_\beta)$ es una contracción (es decir $\|G(T_\beta)\| \leq 1$) si y sólo si es positiva semidefinida (p.s.d) la matriz*
$$\left(\frac{1 - \overline{G(M_j)} G(M_k)}{1 - \overline{M_j} M_k} \right)_{j,k=1}^{n}.$$

d) Para $k = 1, \dots, n$ *las funciones* $g_k(t) = \beta(t)\dfrac{1}{e^{it} - M_k}$ *verifican:*

1. $g_k \in E_\beta$,
2. $T_\beta g_k = M_k g_k$,
3. $\langle g_k, e_j \rangle = 0$ *si* $k \neq j$,
4. $\langle g_k, e_k \rangle = C_k \neq 0$.

Poniendo $g'_k = \dfrac{1}{c_k} g_k$, $k = 1, \dots, n$, resulta que $V' = \{g'_1, \dots, g'_n\}$ es una base biortogonal a V.

Las demostraciones de estas proposiciones pueden verse en [3].

3 Formas de Hankel, el Teorema de Nehari y extensión Hahn–Banach

Una *forma de Hankel* es una forma sesquilineal $B : H^2 \times H^2_- \to \mathbb{C}$ tal que

$$B(e_1 f, g) = B(f, e_{-1} g), \quad \forall (f, g) \in H^2 \times H^2_-.$$

B es, por definición, *acotada* si:

$$\|B\| := \sup \left\{ \frac{|B(f,g)|}{\|f\|_2 \|g\|_2} : (f,g) \in (H^2 - \{0\}) \times (H^2_- - \{0\}) \right\} < \infty$$

y se tiene $|B(f,g)| \leq \|B\| \, \|f\|_2 \, \|g\|_2$, $\forall (f,g) \in H^2 \times H^2_-$.

Si B es acotada, está asociada a un único operador acotado $\Gamma : H^2 \to H^2_-$ que verifica:

$$\langle \Gamma f, g \rangle = B(f,g) \text{ para toda } f \in H^2, g \in H^2_- \tag{3.1}$$

y

$$\|\Gamma\| = \|B\|. \tag{3.2}$$

Por ser B de Hankel, Γ verifica

$$\Gamma e_1 f = P_- e_1 \Gamma f, \quad \forall f \in H^2. \tag{3.3}$$

Recíprocamente, si $\Gamma : H^2 \to H^2_-$ es un operador acotado que verifica (3.3) entonces su forma sesquilineal asociada B, dada por (3.1) y que verifica (3.2), es de Hankel. Por esta razón a los operadores que verifican (3.3) se les llama *operadores de Hankel*. Un estudio de estos operadores puede verse en [10] y [13].

Por ser $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ denso en $H^2 \times H^2_-$, una forma de Hankel acotada queda determinada por su restricción a $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$. Si ϕ es una función tal que $\int_T f\bar{g}\phi\, dt$ existe para todo $(f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ entonces $B_\phi : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{C}$ dada por

$$B_\phi(f,g) := \int\limits_T f\bar{g}\phi\, dt$$

es una forma de Hankel.

A la función ϕ se le llama *símbolo* de la forma de Hankel y a B_ϕ forma de Hankel asociada a ϕ. Las siguientes propiedades son inmediatas.

1. $B_\phi(f,g) = 0 \quad \forall (f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ si y sólo si $\hat{\phi}(n) = 0 \quad \forall n < 0$ o equivalentemente si y sólo si $P_-\phi = 0$.

2. Si $\phi_1, \phi_2 \in L^2$ entonces $B_{\phi_1} = B_{\phi_2}$ si y sólo si $\phi_1 - \phi_2 = h \in H^2$ si y sólo si $P_-\phi_1 = P_-\phi_2$.

   (a) Si $\phi \in L^2$ y $\phi_- = P_-\phi$ entonces $B_\phi = B_{\phi_-}$.

   (b) Si $\phi \in L^2$ y $\phi_- = P_-\phi$ entonces, para toda $h \in H^2$, $B_\phi = B_{\phi+h} = B_{\phi_-}$.

3. Si $\phi \in L^\infty$ entonces B_ϕ es acotada y $\|B_\phi\| \le \|\phi\|_\infty$.

   (a) Si $\phi \in L^\infty$, $\|B_\phi\| \le \operatorname{dist}(\phi, H^\infty) := \inf\{\|\phi - h\|_\infty : h \in H^\infty\}$.

   (b) Si $\phi_1, \phi_2 \in L^\infty$ y $B_{\phi_1} = B_{\phi_2}$ entonces $\operatorname{dist}(\phi_1, H^\infty) = \operatorname{dist}(\phi_2, H^\infty)$.

Si $B : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{C}$ es una forma de Hankel acotada, definimos el funcional $I_0 : e_1\mathcal{P}_1 \to \mathbb{C}$ mediante $I_0(e_1 f) := B(f, e_{-1})$. Este funcional verifica $I_0(f\bar{g}) = B(f,g) \quad \forall (f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ I_0 es, por definición, el funcional asociado a B, se tiene:

$$|I_0(e_1 f)| = |B(f, e_{-1})| \le \|B\| \cdot \|e_1 f\|_2.$$

Luego, I_0 es acotado en la norma de L^2 y $\|I_0\| \le \|B\|$. Por el teorema de Hahn-Banach I_0 se extiende a un funcional acotado en L^2 y por lo tanto existe $\phi_0 \in L^2$ tal que

$$B(f,g) = I_0(f\bar{g}) = \int f\bar{g}\phi_0\, dt$$

para toda $f \in \mathcal{P}_1$, $g \in \mathcal{P}_2$ y $\|\phi_0\| = \|I_0\| \leq \|B\|$. Designando con $\overline{\mathcal{P}}_i \;\; i = 1, 2$ a la clausura de $\mathcal{P}_i$ en la norma $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in T\}$ y suponiendo normalizada la medida de Lebesgue, se obtiene:

$$|I_0(f\bar{g})| = |B(f,g)| \leq \|B\| \, \|f\|_\infty \, \|g\|_\infty,$$

y B puede extenderse a $\overline{\mathcal{P}}_1 \times \overline{\mathcal{P}}_2 \subset L^2 \times L^2$ preservando la norma. A la extensión la seguimos denotando B.

Con las condiciones anteriores se prueba:

Lema 3.1. $\sup \left\{ \dfrac{|I_0(f)|}{\|f\|_1} : f \in e_1\mathcal{P}_1 \right\} = \|B\|.$

La demostración puede verse en [3]

Teorema 3.1 (Nehari [9]). *Si $B : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{C}$ es una forma de Hankel acotada. Entonces existe $\phi \in L^\infty$ tal que $\|\phi\|_\infty = \|B\|$ y*

$$B(f,g) = B_\phi(f,g) = \int f\bar{g}\phi \, dt \quad \forall (f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2.$$

Demostración. Si B es acotada entonces por el Lema 3.1 el funcional asociado I_0 es acotado en $e_1\mathcal{P}_1 \subset L^1$ respecto de la norma de L^1. Por el teorema de Hahn-Banach I_0 se extiende a un funcional continuo en L^1 preservando su norma y por lo tanto existe $\phi \in L^\infty$ tal que

$$\|\phi\|_\infty = \|I_0\| \leq \|B\| \quad \text{y} \quad B(f,g) = I_0(f\bar{g}) = \int f\bar{g}\phi \, dt$$

para todo $f \in \mathcal{P}_1$, $g \in \mathcal{P}_2$. Como $B = B_\phi$ también $\|B\| = \|B_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$. Luego $\|B\| = \|\phi\|_\infty$. □

Corolario 3.1. *Si $B = B_\phi$ con $\phi \in L^\infty$ entonces* $\|B\| = \operatorname{dist}(\phi, H^\infty)$.

Recordamos que para toda $f \in L^2$, $f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, la serie converge a f en L^2 y $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$.

Las proyecciones P_+f, P_-f y la conjugada $\tilde{f}$ están dada por:

$$P_+f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int}, \tag{3.4}$$

$$P_-f = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{int}, \tag{3.5}$$

$$\tilde{f} = -i\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{int} + i\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{int}. \tag{3.6}$$

Como consecuencia inmediata de (3.4), (3.5) y (3.6) se obtiene

$$P_-f = \frac{1}{2i}(if - ic_o + \tilde{f}). \tag{3.7}$$

El conjunto

$$L^\infty + \tilde{L}^\infty := \{u + \tilde{v} : u, v \in L^\infty\}$$

es la clase BMO. Dos funciones f, g de esta clase se dicen equivalentes si difieren en una constante. El espacio BMO es la clase BMO módulo las funciones constantes. Un estudio del espacio BMO puede verse en [6] y [13].

Corolario 3.2. *Si $\phi \in L^2, B_\phi$ es acotada si y sólo si $\phi_- = P_-\phi \in BMO$.*

Para una forma de Hankel acotada B fija, la función $\phi \in L^\infty$ del teorema de Nehari no es en general única. Un famoso teorema de Adamjan-Arov-Krein (A-A-K) establece que tal ϕ es única si y sólo si $\phi \in H^\infty + C(T)$ (donde C(T) es el espacio de las funciones continuas en T).

A continuación daremos otra condición de unicidad. Esto será ampliado más adelante.

Consideremos el funcional I_0 asociado a B. Como se sabe,

$$|I_0(f)| \le C\|f\|_1, \quad \forall f \in e_1\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow ReI_0(f) \le C\|f\|_1, \quad \forall f \in e_1\mathcal{P}_1,$$
$$I_0(f) = ReI_0(f) - iReI_0(if), \quad \forall f \in e_1\mathcal{P}_1.$$

Poniendo $I_1(f) = ReI_0(f)$, resulta que I_1 es el funcional lineal real asociado a B. El lema 3.1 dice que B es acotada si y sólo si I_1 es acotado en $e_1\mathcal{P}_1$ respecto de la norma de L^1 y, por el teorema Hahn-Banach esto equivale a que exista un funcional real I_1' en L^1 que verifica $I_1'(f) \le C\|f\|_1$, $\forall f \in L^1$ y extiende a I_1, lo que equivale a $|I_1'(f)| \le C\|f\|_1$, $f \in L^1$, o sea, $I_1'(f) = \int f\phi\, dt$ con $\phi \in L^\infty$ y $\|\phi\|_\infty \le C$. Así pues, las ϕ de la tesis del teorema de Nehari están en correspondencia biunívoca con las extensiones Hahn-Banach de I_1 a L^1. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.3. *Dada la forma de Hankel acotada B, la ϕ del Teorema de Nehari es única si y sólo si el funcional lineal real $I_1(f) = ReI_0(f) \quad f \in e_1\mathcal{P}_1$ asociado a B, tiene una única extensión I_1' a L^1 que verifica $I_1'(f) \le C\|f\|_1$.*

Teorema 3.2 (Nehari, [9], [10]). *$\Gamma : H^2 \to H^2_-$ es un operador de Hankel acotado si y sólo si existe $\phi \in L^\infty$ tal que $\|\phi\|_\infty = \|\Gamma\|$ y $\Gamma f = P_-\phi f$, $\forall f \in H^2$.*

A la función ϕ también se le llama *símbolo* del operador de Hankel Γ y se denota por Γ_ϕ al operador dado por $\Gamma f = P_-\phi f$, $\forall f \in H^2$. Del Teorema 2.2 se caracterizan los Γ_ϕ de rango finito en el:

Teorema 3.3 (Kronecker). *El operador de Hankel $\Gamma_\phi f = P_-\phi f, f \in H^2$ tiene rango finito n si y sólo si $\phi = \bar{\beta}G$ con $G \in H^\infty$ y β un producto finito de Blaschke con n ceros.*

La demostración puede verse en [3], [7], [10], [13].

Tenemos entonces, para los operadores Hankel $\Gamma_{\bar{\beta}G}$ de rango finito n, la descomposición $H^2 = \beta H^2 \oplus E_\beta$ con el espacio modelo $E_\beta = (\operatorname{Ker}\Gamma_{\bar{\beta}G})^\perp$ de dimensión finita n. Teniendo en cuenta la proposición 2.1 y la definición del operador $G(T_\beta)$ dada en la sección anterior se obtiene:

$$\forall f \in H^2 = \beta H^2 \oplus E_\beta,\ f = f_1 + f_2,\ f_1 \in \beta H^2,\ f_2 \in E_\beta,$$

$$\Gamma_{\bar{\beta}G}(f_1 + f_2) = \Gamma_{\bar{\beta}G} f_2 = P_-\bar{\beta}G f_2 = \bar{\beta}\beta P_-\bar{\beta}G f_2 = \bar{\beta}P_\beta G f_2 = \bar{\beta}G(T_\beta) f_2.$$

O sea $\Gamma_{\bar{\beta}G}(f) = \bar{\beta}G(T_\beta)(P_\beta f)$, $\forall f \in H^2$.

Esto relaciona los operadores de Hankel con los operadores modelo.

Como $\Gamma_{\bar{\beta}G} f = \Gamma_{\bar{\beta}G}(P_\beta f)$ entonces

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{\bar{\beta}G} f\|_2 &\le \|\Gamma_{\bar{\beta}G}|_{E_\beta}\|\,\|P_\beta f\|_2 \le \|\Gamma_{\bar{\beta}G}|_{E_\beta}\|\,\|f\|_2 \\ &= \|\bar{\beta}G(T_\beta)\|\,\|f\|_2 = \|G(T_\beta)\|\,\|f\|_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si los ceros de β son $M_1, \ldots, M_n$ entonces vale:

Proposición 3.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

a) $\|\Gamma_{\bar{\beta}G}\| \le 1$,

b) $\|G(T_\beta)\| \le 1$,

c) $\|G(T_\beta)^*\| \le 1$,

d) La matriz $\left(\dfrac{1 - \overline{G(M_k)}G(M_j)}{1 - \overline{M}_k M_j}\right)_{k,j=1}^{n}$ *es positiva semidefinida.*

4 El problema clásico de Pick

Tal como se dijo en la introducción el problema de interpolación de Pick es:

Fijados $M_1, \ldots, M_n \in D$ y dados $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ hallar $F \in H^\infty(D)$ tal que

$$F(M_j) = w_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

$$\|F\|_\infty \leq 1. \tag{4.2}$$

En 1916 G. Pick resolvió el siguiente problema más fácil, que se llamará *problema de Pick*:

Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que el problema de interpolación tenga solución.

Siempre existen funciones $G \in H^\infty(D)$ que satisfacen (4.1), por ejemplo:

$$G(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k \frac{1}{\widehat{\beta}'\ (M_k)} . \frac{\widehat{\beta}\ (z)}{z - M_k}$$

donde $\widehat{\beta}\ (z)$ es el producto de Blaschke con ceros $M_k, k = 1, \ldots, n$. De manera que el problema puede plantearse en los siguientes términos:

Fijados $M_1, \ldots, M_n \in D$ y dada $G \in H^\infty\ (D)$ hallar $F\in H^\infty(D)$ tal que $F(M_k) = G(M_k)$ para $k = 1, \ldots, n$ y $\|F\|_\infty \leq 1$.

Si el problema tiene solución F, entonces la función

$$H(z) = \frac{F(z) - G(z)}{\widehat{\beta}\ (z)} \in H^\infty(D)$$

(donde $\widehat{\beta}\ (z)$ es el producto de Blaschke de los ceros M_k) $F(z) = \widehat{\beta}\ (z)H(z) + G(z)$ haciendo $z \to e^{it}$ se obtiene $f = \beta h + g \in H^\infty$. Luego $\overline{\beta} f = \overline{\beta} g + h$ con $h \in H^\infty$, por lo tanto $\overline{\beta} f, \overline{\beta} g \in L^\infty$ determinan la misma forma de Hankel $B_{\overline{\beta} g} = B_{\overline{\beta} f}$ y $\|B_{\overline{\beta} g}\| = \|B_{\overline{\beta} f}\| \leq \|F\|_\infty \leq 1$. Luego, si el problema tiene solución, entonces la forma de Hankel $B_{\overline{\beta} g}$ verifica $\|B_{\overline{\beta} g}\| \leq 1$, donde $G = \widehat{g} \in H^\infty(D)$ es la función dada y β es el producto de Blaschke de los ceros $M_1, \ldots, M_n$.

Se prueba fácilmente que esta condición es también suficiente. Así, pues, tenemos la siguiente respuesta al problema:

El problema de Pick tiene solución si y sólo si la forma de Hankel $B_{\overline{\beta} G}$ verifica $\|B_{\overline{\beta} G}\| \leq 1$, donde $G = \widehat{g} \in H^\infty(D)$ es la dada y β es el producto de Blaschke con ceros $M_1, \ldots, M_n$. Considerando lo antes expuesto y usando la misma notación, tenemos:

Teorema 4.1. *Fijados $M_1, \ldots, M_n \in D$ y dada $G \in H^\infty(D)$ son equivalentes:*

a) Existe $F \in H^\infty(D)$ tal que $\|F\|_\infty \le 1$ y $F(M_k) = G(M_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

b) $\|B_{\overline{\beta}G}\| \le 1$.

c) $\|\Gamma_{\overline{\beta}G}\| \le 1$.

d) $\|G(T_\beta)\| \le 1$.

e) $\|G(T_\beta)^*\| \le 1$.

f) La matriz

$$\left(\frac{1 - \overline{G(M_k)}G(M_j)}{1 - \overline{M}_k M_j} \right)_{j,k=1}^{n}$$

es positiva semidefinida.

La equivalencia de *a)* y *f)* es el teorema de Pick.

Corolario 4.1. *Si $M_1, \ldots, M_n \in D$ y si $Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ es tal que $|Q(z)| \le 1$, $\forall z \in \overline{D}$, entonces la matriz*

$$\left(\frac{1 - \overline{Q(M_k)}\, Q(M_j)}{1 - \overline{M_k} M_j} \right)_{k,j=1}^{n}$$

es positiva semidefinida.

Corolario 4.2. *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión finita n y sea $T \in L(H)$ tal que $\|T\| \le 1$ con n autovalores en D. Sea $Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ un polinomio cualquiera. Si $|Q(z)| \le 1$, $\forall z \in \overline{D}$, entonces $\|Q(T)\| \le 1$.*

Corolario 4.3 (Desigualdad de Von Neumann, [14]). *Si H es un espacio de Hilbert separable, $T \in L(H)$, $\|T\| \le 1$ y $Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$, donde $|Q(z)| \le 1$, $\forall z \in \bar{D}$, entonces $\|Q(T)\| \le 1$.*

Las demostraciones pueden verse en [3].

5 Criterio de unicidad para extensión de funcionales.

Sea E un espacio seminormado con seminorma p, $L_0 \subset E$ un subespacio vectorial e $I_1 : L_0 \to \mathbb{R}$ un funcional lineal real tal que $I_1(f) \leq p(f)$, $\forall f \in L_0$.

Sean

$$F(I_1, p) := \{I : E \to: \mathbb{R} \text{ lineal}, \; I(f) \leq p(f) \; f \in E, I/_{L0} = I_1\}$$

$$\widetilde{p}(f) := \inf\{I_1(g) + p(f-g) : g \in L_0\} \text{ para } f \in E.$$

Se satifacen:

a) $\widetilde{p}(f_1 + f_2) \leq \widetilde{p}(f_1) + \widetilde{p}(f_2)$ y $\widetilde{p}(\alpha f) = \alpha \widetilde{p}(f)$ si $\alpha \geq 0$,

b) $\widetilde{p}(f) \geq -\widetilde{p}(-f)$, $\widetilde{p}(f) \leq p(f)$.

Si $I \in F(I_1, p)$ entonces, para toda $g \in L_0$, $f \in E$,

$$I(f) = I(f-g) + I_1(g) \leq I_1(g) + p(f-g),$$

por lo tanto $I(f) \leq \widetilde{p}(f)$ para toda $f \in E$.

Lema 5.1. *Dado $e \in E$ existen I, $I' \in F(I_1,p)$ tales que $I(e) = \widetilde{p}(e)$ y $I'(e) = -\tilde{p}(-e)$.*

Proposición 5.1. *Existe una única $I \in F(I_1, p)$ si y sólo si $\widetilde{p}(e) = -\widetilde{p}(-e)$ para todo $e \in E$ si y sólo si $\widetilde{p}$ es lineal. En tal caso $I = \widetilde{p}$.*

Observemos que no sólo se da un criterio de unicidad sino que, además, se prueba que si la extensión es única entonces se puede escribir explícitamente cómo es esta extensión. Se tiene, además, que si $e_1, e_2 \in E$ verifican $\tilde{p}(e_1) = -\tilde{p}(-e_1)$ y $\tilde{p}(e_2) = -\tilde{p}(-e_2)$ entonces $\tilde{p}\underline{(e_1 + e_2) = -\tilde{p}}(-(e_1 + e_2))$. Luego, si $e_0, e_1, \ldots \in E$ son tales que $E = L_0 + \overline{Lin}\{e_0, e_1, \ldots\}$, donde $Lin\{e_0, e_1, \ldots\}$ es la cápsula lineal real generada por $e_0, e_1 \ldots$, entonces $I \in F(I_1, p)$ es único si y sólo si $\tilde{p}(e_n) = -\tilde{p}(-e_n)$ para todo $n = 0, 1, \ldots$.

Las ideas relacionadas con el procedimiento anterior se encuentran en [5] (Cf. Cap. III Teorema 1.2.3 y 1.2.2) y [8]. Las demostraciones en [3].

Aplicando este criterio, y con la misma notación, tenemos en los casos del teorema de Nehari y el problema de Pick: $E = L^1(T)$, $\quad L_0 = e^{it}\mathcal{P}_1$,

$$\{e_0, e_1, \ldots\} = \{e_0(t), e_1(t), \ldots\} \cup \{ie_0(t), ie_1(t), \ldots\}$$

(con $e_n(t) = e^{-int}$, $n \geq 0$),

$p(f) = ||B||\,||f||_1$ y podemos suponer $||B|| = 1$, así

$$p(f) = ||f||_1, \quad \tilde{p}(f) = \inf\{I_1(f) + ||f-g||_1 : g \in e^{it}\mathcal{P}_1\}.$$

Corolario 5.1. *Si B es una forma de Hankel acotada, I_0 el funcional asociado a B definido en $e^{it}\mathcal{P}_1$*

$$I_1(f) = ReI_0(f) = Re\int_T f\phi dt \quad para\ \phi \in L^2,$$

entonces la función $\phi \in L^\infty$ del teorema de Nehari es única si y sólo si para todo $n \geq 0$

a) $\inf\{||g_1 - e_n||_1 + ||g_2 + e_n||_1 + I_1(g_1 + g_2) : g_1, g_2 \in e^{it}\mathcal{P}_1\} \leq 0,$

b) $\inf\{||g_1 - e_n||_1 + ||g_2 + e_n||_1 + I_1(ig_1 + ig_2) : g_1, g_2 \in e^{it}\mathcal{P}_1\} \leq 0.$

Corolario 5.2. *El problema de Pick tiene solución única si y sólo si, para todo $n \geq 0$*

a) $\inf\{||g_1 - e_n||_1 + ||g_2 + e_n||_1 + I_1(g_1 + g_2) : g_1, g_2 \in e^{it}\mathcal{P}_1\} \leq 0,$

b) $\inf\{||g_1 - e_n||_1 + ||g_2 + e_n||_1 + I_1(ig_1 + ig_2) : g_1, g_2 \in e^{it}\mathcal{P}_1\} \leq 0$*, donde* $I_1(f) = Re\, B_{\bar{\beta}G}(f, e^{-it})$.

Referencias

[1] Adamjan, V. M., Arov, D. Z., Krein, M. G. *Analytic properties of Schmidt pairs for Hankel operators and the generalized Schur-Takagi Problem*, Math. USSR Sbornik **15** (1971), 31–73.

[2] Beurling, A. *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239–255.

[3] Cedeño, G. *Tesis de Maestría*, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1995.

[4] Cole, B., Lewis, K., Wermer, J. *Pick conditions on a uniform algebra and von Neuman inequalities*, J. Anal. **107**(2) (1992), 234–244.

[5] Cotlar, M., Cignoli, R. *An Introduction to Functional* Analysis, North-Holland Publishing Company, 1974.

[6] Garnett, J. *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, San Diego, 1981.

[7] Giménez, J. *El Teorema de aproximación de Adamjan-Arov-Krein y aproximaciones por funciones analíticas*, en Cotlar et al. *Extensión y representación de formas invariantes en la teoría de interpolación, predicción y dilatación*, Tercera Escuela Venezolana de Matemática, Mérida, 1990.

[8] König, H. *Über das Von Neumannsche Theoreme*, Arch. Math. Vol. 19 (1968), 482–487.

[9] Nehari, Z. *On bounded bilinear forms,* Ann. of Math. **65** (1957), 153–162.

[10] Nikol'skii, N. *Treatise on the Shift operator*, Springer-Verlag, 1986.

[11] Pick, G. *Über die Bescharänkungen analytische Funktionen, welche durch vorgegebene Fuktionswerte bewirkt werden*, Math. Ann. **77** (1916), 7–23.

[12] Sarason, D. *Generalized interpolation in* H^∞, Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 179–203.

[13] Sarason, D. *Function theory on the unit circle*, Virginia Poly. Inst. and State Univ., Blackburg, Virginia, 1979.

[14] Von Neumann, J. *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes*, Math. Nachr. **4** (1951), 258–281.