Divulgaciones Matemáticas Vol. 8 No. 2 (2000), pp. 155–162

La Intersección Arbitraria de una Familia de Subconjuntos Abiertos con la Propiedad α-S-Localmente Finita es α-Semiabierta

The Intersection of an Arbitrary Family of Open Subsets with the α-S-Locally Finite Property is α-Semi-Open

Carlos Carpintero (ccarpi@cumana.sucre.udo.edu.ve)
Ennis Rosas (erosas@cumana.sucre.udo.edu.ve)
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Oriente. Núcleo de Sucre.
Cumaná. Venezuela.

Resumen

En este trabajo buscamos condiciones necesarias y suficientes para que la intersección arbitraria de conjuntos abiertos sea α-semiabierta.
Palabras y frases clave: α-semiabierto, propiedad α-SLF, operador estrella.

Abstract

In this work we look for a necessary and suficient condition in order that the arbitrary intersection of open sets is α-semi-open.
Key words and phrases: α-semi-open, α-SLF property, star operator.

1 Introducción

Después de los trabajos de Levine [4], una gran cantidad de matemáticos centraron su atención en la generalización de conceptos topológicos, considerando conjuntos semiabiertos en lugar de los conjuntos abiertos usuales. La noción de operador fué introducida posteriormente por Kasahara en [1]. Rosas y Vielma en [2] introducen el concepto de conjunto α-semiabierto, el cual generaliza las nociones anteriormente citadas y observaron que la intersección

Recibido 1999/04/06. Revisado 1999/09/17. Aceptado 2000/04/01.
MSC (2000): Primary 54A05; Secondary 54A10, 54D10.

de dos conjuntos α-semiabiertos no es necesariamente α-semiabierta. En este trabajo se plantean ciertas condiciones a un operador α para obtener condiciones necesarias y suficientes para que la intersección (resp. unión) arbitraria de conjuntos abiertos (resp.cerrados) sea α-semiabierta (resp. α-semicerrada).

2 Operadores asociados y conjuntos α-semiabiertos

A continuación daremos una serie de definiciones y teoremas que son necesarios para el desarrollo del trabajo. $P(X)$ denotará la familia de partes del conjunto X.

Definición 1 ([2]). Sea (X, Γ) un espacio topológico. Una función α de $P(X)$ en $P(X)$ se dice que es un *operador asociado con* Γ si satisface la siguiente propiedad: $U \subseteq \alpha(U)$ para todo $U \in \Gamma$.

Observemos que el dominio de un operador es todo $P(X)$ y no solamente los conjuntos abiertos, como originalmente lo define Kasahara en [1].

Ejemplo 1. Sea (X, Γ) un espacio topológico. Entonces $\alpha, \beta : P(X) \to P(X)$ dados por $\alpha(A) = A$, $\beta(A) = cl(A)$ para todo $A \in P(X)$ son operadores asociados a Γ en el sentido de la definición anterior, denominados identidad y clausura respectivamente.

Ejemplo 2. Sean $X = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ y $\alpha : P(X) \to P(X)$ dado por $\alpha(A) = fr(A)^c$ para $A \in P(X)$. Entonces α es un operador asociado a Γ.

Observe que: $\alpha(A) = \begin{cases} X & \text{si } A \in \{\varnothing, X\}, \\ \{a, b\} & \text{si } A \in P(X) - \{\varnothing, X\}. \end{cases}$

Ejemplo 3. Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual, Entonces α:$P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$ dado por:

$$\alpha(A) = \begin{cases} A & \text{si } 0 \in A \\ cl(A) & \text{si } 0 \notin A \neq \varnothing \\ \{1\} & \text{si } A = \varnothing \end{cases}$$

es un operador asociado a la topología usual de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4. Sea (X, Γ) un espacio topológico y α:$P(X) \to P(X)$ un operador asociado a Γ. Si V es un subconjunto de X distinto del vacío, arbitrario pero fijo, entonces $\beta : P(X) \to P(X)$ dado por $\beta(A) = \alpha(A) \cup V$ para todo $A \in P(X)$ es un operador asociado a Γ distinto de α.

Definición 2 ([2]). Sea (X, Γ) un espacio topológico y α un operador asociado con Γ. Un subconjunto A de X es α *-semiabierto* si existe un conjunto abierto $U \in \Gamma$ tal que $U \subseteq A \subseteq \alpha(U)$. Un subconjunto A de X se dice α-*semicerrado* si el complemento de A es un conjunto α-semiabierto. α-$SO(X)$ denotará la colección de todos los conjuntos α-semiabiertos de X.

Definición 3. Sea (X, Γ) un espacio topológico y α un operador asociado con Γ. Decimos que un subconjunto A de X es una α-semivecindad de un punto $x \in X$, si existe $O \in \alpha$-$SO(X)$ tal que $x \in O \subseteq A$.

Observemos que la definición 2 generaliza la noción de conjunto semi abierto dado por Levine en [4], en el sentido que los conjuntos semiabiertos según Levine son conjuntos clausura semiabiertos. Cuando el operador α es la identidad, entonces los conjuntos α semiabiertos son justamente los conjuntos abiertos. Además para un operador α arbitrario todo conjunto abierto es α-semiabierto, esto es, $\Gamma \subseteq \alpha$-$SO(X)$. Observemos también que la definición 3 generaliza la noción usual de vecindad de un punto, ya que cuando α es el operador identidad, la definición anterior coincide con la definición de vecindad. También podemos notar que cuando α es el operador clausura, la definición anterior coincide con la definición dada en [3].

Cabe destacar que en general la intersección arbitraria de una familia de conjuntos α-semiabiertos (resp. abiertos) no necesariamente es α-semiabierta (resp. abierto). Los ejemplos siguientes ilustran ciertas situaciones interesantes.

Ejemplo 5. Anteriormente observamos que $\Gamma \subseteq \alpha$-$SO(X)$. Veremos que en general la inclusión es estricta. Si $X = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ y α es el operador clausura asociado a Γ, entonces $A = \{a, c\}$ es α-semiabierto, pues $\{a\} \subseteq A \subseteq \alpha(\{a\})$, pero $A \notin \Gamma$.

Ejemplo 6. Con respecto al operador descrito en el ejemplo 2, observe que $\alpha(\varnothing) = X$, luego $P(X) = \alpha$-$SO(X)$, en este caso $A = \{a, c\}$ y $B = \{b, c\}$ están en α-$SO(X)$, pero $A \cap B = \{c\} \notin \Gamma$, asi la intersección de conjuntos α semiabiertos no es abierta.

Ejemplo 7. En relación al ejemplo 3, nótese que $\{(-1/n, 1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es una colección de conjuntos abiertos cuya intersección no es α-semiabierto, pues $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n) = \{0\}$ y el único conjunto abierto contenido en $\{0\}$ es el conjunto vacío, luego si $\{0\} \in \alpha$-$SO(\mathbb{R})$ entonces $\varnothing \subseteq \{0\} \subseteq \alpha(\varnothing) = \{1\}$, lo cual es imposible. Así $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n) \notin \alpha$-$SO(\mathbb{R})$.

Ejemplo 8. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y A un subconjunto finito de X. Considérese un operador β definido como en el Ejemplo 4.

Entonces α-$SO(X) \subset \beta$-$SO(X)$. Además la contensión es estricta, pues el conjunto A es β-semiabierto pero no α-semiabierto.

En la siguiente definición se introducen propiedades de un operador asociado a una topología las cuales traen consecuencias muy útiles en este trabajo.

Definición 4. Sea (X, Γ) un espacio topológico y α un operador asociado a Γ. Decimos que α es un operador *estrella* si satisface la siguiente propiedad: para todo par U, V de conjuntos abiertos en Γ se tiene que $\alpha(U) \bigcap V \subseteq \alpha(U \bigcap V)$.

Definición 5. Sea (X, Γ) un espacio topológico y α un operador asociado a una topología Γ. Decimos que α es un operador *monótono* si para todo par U, V de conjuntos abiertos en Γ tales que $U \subseteq V$ ocurre que $\alpha(U) \subseteq \alpha(V)$.

Ejemplo 9. En relación con el ejemplo 4, observe que si el operador α es monótono (resp. estrella) entonces el operador β es monótono (resp. estrella). Los operadores: identidad y clausura son monótonos y estrella, mientras que el operador α definido por $\alpha(V) = fr(V)^c$, para $V \in \Gamma$, donde $fr(V)$ es la frontera de V, es estrella y no es monótono.

Ejemplo 10. Sea $X = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ y β el operador definido como sigue:

$$\beta(A) = \begin{cases} A & \text{si } b \notin A \\ cl(A) & \text{si } b \in A \end{cases}$$

Observe que β es un operador monótono, el cual no es estrella, ya que si tomamos $V = \{a, b\}$ y $U = \{a, c\}$, entonces $\beta(U \cap V) = \beta(\{a\}) = \{a\}$ y $\beta(V) \cap U = X \cap \{a, c\} = \{a, c\}$

Observe que según lo visto en estos dos últimos ejemplos, la noción de operador estrella y de operador monótono son nociones disímiles.

En [2] se estudian y caracterizan los operadores monótonos y se prueba que si un operador α es monótono entonces la unión de conjuntos α-semiabiertos es α-semiabierta. Usando este hecho podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea (X, Γ) un espacio topológico y α un operador monótono asociado con Γ. Un subconjunto H de X es α semiabierto si y solo si H es una α-semivecindad de cada uno de sus puntos.*

Demostración. Supóngase que H es una α-semivecindad de cada punto $x \in H$. Esto significa que para cada $x \in H$ existe $O_x \in \alpha$-$SO(X)$ tal que $x \in O_x \subset H$. Por lo tanto, como α es monótono, $H = \bigcup_{x \in H} O_x$ es α-semiabierto. El siguiente teorema caracteriza a los conjuntos α-semiabiertos, cuando el operador es monótono. $\square$

Teorema 2. *Sea* (X, Γ) *un espacio topológico y* α *un operador monótono asociado con* Γ. *Un subconjunto* A *de* X *es* α *semiabierto si y sólo si* $A \subseteq \alpha(int(A))$.

Demostración. Supongamos que A es un conjunto α-semiabierto, entonces existe $U \in \Gamma$ tal que $U \subset A \subset \alpha(U)$, esto implica que $A \subseteq \alpha(int(A))$.

Recíprocamente, si $A \subseteq \alpha(int(A))$, entonces tomando $U = int(A)$ obtenemos que $U \subset A \subset \alpha(U)$ y así A es un conjunto α-semiabierto. □

Teorema 3. *Sean* (X, Γ) *un espacio topológico,* α *un operador monótono asociado con* Γ *y* A *un subconjunto* α*-semiabierto de* X. *Si* B *es un subconjunto de* X *tal que* $A \subseteq B \subseteq \alpha(int(A))$, *entonces* B *es un conjunto* α*-semiabierto.*

Demostración. Como $A \subseteq B$, entonces $\alpha(int(A)) \subseteq \alpha(int(B))$, luego $B \subseteq \alpha(int(B))$, ahora usando el teorema anterior el resultado sigue. □

Definición 6. Sea (X, Γ) un espacio topológico y α un operador asociado con Γ. Decimos que α es un operador *idempotente* si $\alpha^2 = \alpha$.

Ejemplo 11. Sea $X = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ y β el operador definido por:

$$\beta(A) = \begin{cases} A & \text{si } b \in A \\ cl(A) & \text{si } b \notin A \end{cases}$$

Es fácil observar que β es un operador idempotente.

El siguiente teorema nos da una relación estrecha entre operadores monótonos, operadores idempotentes y conjuntos α-semiabiertos.

Teorema 4. *Sean* (X, Γ) *un espacio topológico,* α *un operador monótono e idempotente asociado con* Γ *y* A *un conjunto* α*-semiabierto. Si* B *es un subconjunto de* X *tal que* $A \subseteq B \subseteq \alpha(A)$, *entonces* B *es un conjunto* α*-semiabierto.*

Demostración. Supongamos que $A \subseteq B \subseteq \alpha(A)$. Luego $int(A) \subseteq int(B)$ y como α es monótono, se tiene que $\alpha(int(A)) \subseteq \alpha(int(B))$. Ahora usando el hecho de que A es un conjunto α-semiabierto, obtenemos que $A \subseteq \alpha(int(A)) \subseteq \alpha(int(B))$, pero α es idempotente, así $\alpha(A) \subseteq \alpha(int(B))$. Luego $B \subseteq \alpha(int(B))$ y asíB es un conjunto α-semiabierto. □

Es de observar que, en general, la intersección de un conjunto abierto con un conjunto α-semiabierto no es un conjunto α-semiabierto, como lo indica el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales dotado de la topología usual, y definamos α como sigue:

$$\alpha(A) = \begin{cases} cl(A) & \text{si } 0 \in A, \\ A & \text{si } 0 \notin A. \end{cases}$$

Nótese que el intervalo $[-1, 1]$ es un conjunto α-semiabierto y $(0, 2)$ es un conjunto abierto, luego $[-1, 1] \cap (0, 2) = (0, 1]$ no es un conjunto α-semiabierto.

Estamos interesados en buscar condiciones para las cuales se cumpla que la intersección de un conjunto abierto con un conjunto α-semiabierto sea α-semiabierto. Observe que el operador definido en el ejemplo anterior es distinto del operador clausura como también del operador iidentidad, además, este operador no es un operador estrella. El siguiente teorema nos da una condición necesaria que debe satisfacer el operador α para que la intersección de un conjunto abierto con un conjunto α-semiabierto sea α-semiabierto. Es de observar que dicho teorema generaliza el resultado dado en [3].

Teorema 5. *Sea* (X,Γ) *un espacio topológico y* α *un operador estrella asociado con* Γ*. Si* $A \in \Gamma$ *y* $O \in \alpha\text{-}SO(X)$*, entonces* $O \cap A \in \alpha\text{-}SO(X)$*.*

Demostración. Por hipótesis $O \in \alpha\text{-}SO(X)$, entonces existe $U \in \Gamma$ tal que $U \subseteq O \subseteq \alpha(U)$, luego $U \cap A \subseteq O \cap A \subseteq \alpha(U) \cap A \subseteq \alpha(U \cap A)$ ya que α es un operador estrella, pero $U \cap A \in \Gamma$. Esto nos indica que $O \cap A \in \alpha\text{-}SO(X)$. $\square$

En la siguiente sección estudiamos una generalización de la propiedad de la intersección finita, considerando conjuntos α-semiabiertos, la cual jugará un papel importante para obtener el resultado buscado en este trabajo.

3 Propiedad α-s-localmente finita

Definición 7. Sea (X, Γ) un espacio topológico y α un operador asociado con Γ. Decimos que una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad α-S-*localmente finita*, denotada por α-SLF, si para cada $x \in X$ existe una α-semivecindad O_x de x tal que $O_x \cap A_i = \varnothing$ para todo $i \in I$ excepto un número finito.

Como comentario a la definición anterior podemos decir que una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ tiene la propiedad α-SLF en x, si existe una α-semivecindad O_x de x y un subconjunto finito Ω_0 de I, tal que $O_x \subset \bigcap_{i \in I - \Omega_0} A_i^c$.

Observe que cuando α es el operador identidad la propiedad α-SLF es equivalente a la propiedad localmente finita estudiada en topología general y cuando α es el operador clausura, la propiedad α-SLF es equivalente a la dada por Caldas.

Definición 8. Sea (X, Γ) un espacio topólogico y α un operador asociado con Γ. Una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad α-S-*localmente finita* relativa a un subconjunto T de X si esta familia tiene la propiedad α-SLF en cada punto de T.

El siguiente teorema da una condición de equivalencia para que la intersección de conjuntos abiertos sea α-semiabierto en términos de la propiedad α-SLF.

Teorema 6. *Sea* (X, Γ) *un espacio topólogico y* α *un operador estrella y monótono asociado con* Γ. *Una condición necesaria y suficiente para que la intersección de una familia* $\{A_i\}_{i\in I}$ *de subconjuntos abiertos sea* α*-semiabierta es que la familia* $\{A_i^c\}_{i\in I}$ *tenga la propiedad* α*-SLF relativa al subconjunto* $A = \bigcap_{i\in I} A_i$.

Demostración. (Suficiencia) Supóngase que la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad α-SLF relativa al subconjunto $A = \bigcap_{i\in I} A_i$, donde $A_i \in \Gamma$. Consideremos $x \in A$. Por hipótesis existe un subconjunto finito Ω_0 de I y una α-semivecindad O_x de x tal que $O_x \subset \bigcap_{i\in I-\Omega_0} A_i$. Luego $U = O_x \cap (\bigcap_{i\in\Omega_0} A_i) \subset (\bigcap_{i\in I-\Omega_0} A_i) \cap (\bigcap_{i\in\Omega_0} A_i) = A$.

Observe que $\bigcap_{i\in\Omega_0} A_i \in \Gamma$ y $O_x \in \alpha\text{-}SO(X)$. Como α es un operador estrella, concluimos que U es α-semiabierto y así A es una α-semivecindad de cada $x \in A$; pero α es monótono, así que A es α-semiabierto.

(Necesidad) Supóngase que $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ es α-semiabierto, entonces $A^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ es α-semicerrado. Sea $V = A$, entonces V es una α-semivecindad de cada uno de sus puntos tal que $V \cap A^c = \varnothing$. Como $V \cap A^c = V \cap (\bigcup_{i\in\Omega} A_i^c) = \bigcup_{i\in\Omega}(V \cap A_i^c)$ obtenemos que $V \cap A_i^c = \varnothing$ para todo $i \in I$, esto nos dice que la familia $\{A_i^c\}_{i\in I}$ satisface la propiedad α-SLF en cada punto de A. $\square$

Ejemplo 13. Nótese que $\{(-1/n, 1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es una colección de conjuntos abiertos en la topología usual de $\mathbb{R}$ cuya intersección es un conjunto cerrado, puesto que $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n) = \{0\}$. Si α es definido por $\alpha(V) = fr(V)^c$, para V abierto en la topología real, donde $fr(V)$ denota la frontera de V, se observa que el único conjunto abierto contenido en $\{0\}$ es el conjunto vacío, luego $\varnothing \subseteq \{0\} \subseteq \alpha(\varnothing) = \mathbb{R}$ y así $\{0\} \in \alpha\text{-}SO(\mathbb{R})$, además esta colección no satisface la propiedad α-SLF.

Corolario 1. *Sea* (X, Γ) *un espacio topólogico y* α *un operador estrella y monótono asociado con* Γ. *Una condición necesaria y suficiente para que la* *unión de una familia* $\{A_i\}_{i\in I}$ *de subconjuntos cerrados sea* α*-semicerrada es que la familia* $\{A_i^c\}_{i\in I}$ *tenga la propiedad* α*-SLF relativa al subconjunto* $D = (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$.

Demostración. Aplique el teorema anterior. □

Observe que la condición de que α sea un operador monótono no puede ser omitida en los dos últimos resultados, porque exactamente es ésta la condición que se necesita para asegurar que la unión arbitraria de conjuntos α-semiabiertos sea α-semiabierta.

Finalmente daremos un ejemplo de un operador estrella y monótono diferente de los operadores identidad y clausura. Observe que el operador α definido por $\alpha(V) = fr(V)^c$ es un operador estrella pero no es monótono. Ahora consideremos un espacio topológico de Hausdorff X y sea A un subconjunto finito de X. El operador α definido por $\alpha(V) = A \cup Cl(V)$ para V abierto en X, donde $Cl(V)$ denota la clausura de V, es un operador monótono y estrella. $SO(X) \subset \alpha\text{-}SO(X)$, A es un conjunto α-semiabierto pero no es semiabierto.

Referencias

[1] Kasahara, S. *Operations-Compact Spaces*, Mathematica Japonica **24** (1979), 97–105.

[2] Rosas, E., Vielma, J., Carpintero, C., *α-Semi Connected and Locally α-Semi Connected Properties in Topological Spaces*, submitted.

[3] Caldas C., M. *La Intersección Arbitraria de una Familia de Subconjuntos Abiertos con la propiedad S Localmente Finita es Semi-Abierta*, PRO MATHEMATICA, Vol X Nos. 19-20 (1996), 35–42.

[4] Levine, N. *Semi-Open Sets and Semi-Continuity in Topological Spaces*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 36–41.