Divulgaciones Matemáticas Vol. 9 No. 1(2001), pp. 1–23

Algunos Ejemplos de Espacios Orbitales Esféricos de Cohomogeneidad 2

Some Examples of Spherical Orbit Spaces with Cohomogeneity 2

Jill McGowan (jmcgowan@fac.howard.edu)
Department of Mathematics, Howard University
Washington, D.C. 20059, USA.

Catherine Searle (csearle@matcuer.unam.mx)
Instituto de Matemáticas de la UNAM, Unidad Cuernavaca
Avenida Universidad S/N, Colonia Lomas de Chamilpa
Cuernavaca, Morelos 62210, MEXICO.

Resumen

En este artículo se consideran tres ejemplos de espacios orbitales esféricos de acciones de cohomogeneidad 2 que aparecieron en las listas de Hsiang y Lawson [HL] y de Straume [S1]. Se describen los espacios de órbitas en términos de sus interiores y sus fronteras, diferenciando entre aristas y vértices de las mismas. Se encuentran los subgrupos de isotropía principales y no principales, y se calculan los diámetros de estos espacios de órbitas. En otro artículo ([MS], por publicarse) calculamos los diámetros de todos los espacios de órbitas de dimensión 2 que se obtienen de acciones maximales lineales sobre esferas. Aquí, describimos los métodos en detalle.
Palabras y frases claves: espacio de órbitas, cohomogeneidad 2, subgrupo de isotropía, diámetro, métrica, representación.

Abstract

In this paper we consider three examples of spherical orbit spaces under cohomogeneity two actions, which appeared in the lists of Hsiang and Lawson [HL] and Straume [S1]. We describe these orbit spaces in terms of their interiors and boundaries, differentiating between their edges and vertices. We find the principal and not principal isotropy subgroups, and we calculate the diameters of these orbit spaces. In

Recibido 2000/09/18. Aceptado 2001/03/29.
MSC (2000): Primary 53C20.
Work supported in part by CONACYT project number 28491-E.

another article ([MS], to appear), we calculate the diameters of all the orbit spaces that result from maximal linear actions on spheres. Here, we describe our methods in detail.
Key words and phrases: orbit space, cohomogeneity 2, isotropy subgroup, diameter, metric, representation.

1 Introducción

Los geómetras, algebristas y físicos vienen estudiando las esferas desde hace mucho tiempo a causa de su simplicidad y simetría. En particular, una esfera tiene un grupo de transformaciones enorme tales que cada una preserva su métrica, llamadas *isometrías*. El estudio cuidadoso de las isometrías ha llevado al descubrimiento de hipersuperficies y subvariedades minimales en las variedades de Stiefel y variedades de Grassmann.
Ejemplo 1. Supongamos que las matrices de la forma

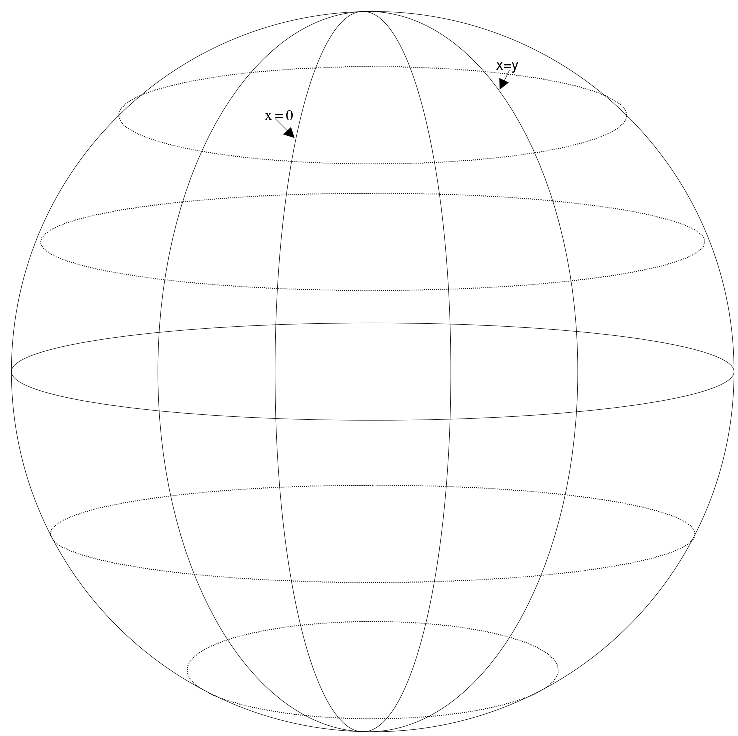
$$g = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

operan a izquierda sobre $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ por la multiplicación de matrices sobre los vectores columna $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$. Esta acción es una rotación de ángulo θ en torno del eje z. Hay un isomorfismo evidente entre este grupo G y el círculo $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$, que nos permite pensar en esta acción como una acción del círculo sobre la esfera. Dado un punto $(x, y, z) \in S^2$, consideremos el conjunto de todas las imágenes de este punto bajo multiplicación por elementos g de $G = S^1$, es decir

$$G((x, y, z)) = \{g\Big(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\Big) \text{ para cualquier } g \in G\}.$$

Este conjunto se llama *la órbita* de (x, y, z). Como ninguna matriz de esta forma cambia el valor de z, la órbita es un círculo contenido en S^2 con centro en el eje z, intersección del plano $z = a$ con la esfera S^2. Las órbitas de los puntos de la esfera S^2 la descomponen en conjuntos disjuntos; ellas determinan una relación de equivalencia sobre S^2. Consideramos estos conjuntos como puntos en un nuevo espacio S^2/G, llamado el *espacio de órbitas*. Esta acción aplica el plano xy en sí mismo, dado que

Figura 1.



$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Del mismo modo, ella aplica el eje z en sí mismo. Cuando una acción aplica un subespacio propio y no trivial en sí mismo, ella se llama *reducible*. Si intersectamos la esfera con el semiplano $\{(x, 0, z) : x \geq 0\}$, tenemos exactamente un punto en la esfera para cada órbita. Vemos que el espacio de órbitas es un intervalo, es decir, un semicírculo unitario cerrado (ver Figura 1).

La distancia en el espacio de órbitas se define como la distancia entre órbitas en el espacio original. Como la distancia entre el polo norte y el polo sur en S^2 es π (la longitud del semicírculo en S^2 que los une), π es la longitud del espacio de órbitas. Este semicírculo no es una variedad diferenciable porque es cerrado, sin embargo es una variedad diferenciable con borde (ver la definición de variedad diferenciable en la sección 2).

En otro artículo ([MS], por publicarse) calculamos los diámetros (ver la definición siguiente) de los espacios de órbitas de dimensión 2 que se obtienen de acciones de grupos sobre esferas. En este artículo generalizamos las técnicas que usamos en el ejemplo 1 a varios otros casos y explicamos cómo encontrar estos espacios de órbitas y sus diámetros. Daremos varios ejemplos típicos.

El método para encontrar estos grupos es interesante a causa del conocimiento que da sobre los grupos clásicos y variedades asociadas, que son importantes para físicos y geómetras. Es interesante ver cómo el álgebra lineal elemental nos revela los secretos de la geometría de los espacios de órbitas.

Este artículo está organizado de la siguente manera. En la sección 2 comenzamos con algunas definiciones necesarias. En la sección 3 damos ejemplos de la teoría clásica de acciones de grupos sobre esferas. En la sección 4 describimos en detalle tres acciones sobre esferas que son acciones por los grupos unitarios $U(n)$.

El grupo unitario $U(n)$ es el grupo de matrices complejas de dimensiones $n \times n$ tales que $\overline{A}^T A = I$. El grupo unitario especial $SU(n)$ es el subgrupo de matrices de determinante 1. Las tres representaciones que describimos aquí son $(G, \phi) = (U(2) \times SU(2), [\sigma_1 \times \mu_2 \otimes \mu_2]_{\mathbb{R}} + 1)$, donde σ es la representación compleja del círculo, $\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$, bajo multiplicación, μ_n es la representación clásica de $SU(n)$ y 1 es la representación trivial de dimensión 1; $(G, \phi) = (U(1) \times SU(3) \times U(1), \sigma_1 \otimes \mu_3 \otimes \sigma_1)$; $(G, \phi) = (SU(4), \text{representación adjunta})$. En la sección 5, concluímos con una discusión de posibles direcciones de investigación.

El espacio de órbitas del ejemplo $U(2) \times SU(2)$ no aparece en ningún otro artículo, como es muy fácil de describir si se usa la acción sin la representación trivial. Hsiang y Lawson [HL] describen el espacio de órbitas y el grupo principal de isotropía de esta acción (sin la representación trivial) sobre $\mathbb{R}^8$, que tiene dimensión 2. Describen también el espacio de órbitas y grupo principal de isotropía de la acción de $SU(4)$ sobre $\mathbb{R}^{15}$. Straume [S1] presenta el espacio de órbitas de la acción y grupo principal de isotropía de $U(1) \times SU(3) \times U(1)$ sobre S^{11}. Las descripciones completas de todos los grupos de isotropía aparecen aquí por primera vez, así como la determinación de los diámetros.

2 Definiciones

En la Introducción dimos algunas definiciones aproximadas. Aquí precisamos esas definiciones y agregamos otras. Todas las acciones son acciones sobre esferas, que son variedades diferenciables.

Definición 2.1: Una *variedad diferenciable* de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff equipado con un conjunto de abiertos U_α tales que
(1) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
(2) sobre cualquier abierto U_α, hay un homeomorfismo ϕ_α de U_α en $\mathbb{R}^n$ tal que, cuando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\phi_\alpha \circ {\phi_\beta}^{-1}|_{\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)}$ es un homeomorfismo suave (C^∞) entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Sobre una *variedad diferenciable con borde* cada ϕ_α es un homeomorfismo de U_α en un abierto del medio espacio cerrado $\mathbf{H}^n$, con la misma propiedad de diferenciabilidad.

Un *difeomorfismo* $f : M \to N$ entre dos variedades diferenciables $(M, \phi_\alpha, U_\alpha)$ y (N, τ_β, W_β) es un homeomorfismo entre M y N tal que

$$\tau_\beta \circ f \circ {\phi_\alpha}^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(W_\beta))}$$

es diferenciable (C^∞) donde está definido.

Algunas variedades diferenciables tienen propiedades especiales. Sobre cualquier variedad de Riemann (M), hay varias funciones de la variedad, o del producto de la variedad consigo misma ($M \times M$) en $\mathbb{R}$. Estas funciones incluyen la distancia y la curvatura (K). Por esta razón podemos asociar números a una variedad de Riemann. Por ejemplo, sobre una variedad cuya curvatura es constante (como la esfera), esa constante es un invariante de la variedad (la esfera de radio 1 tiene curvatura constante 1). A veces podemos decidir qué variedad diferenciable es M por medio de sus invariantes. Uno de los invariantes de una variedad diferenciable es el *diámetro*, la distancia entre los dos puntos más alejados (ver las definiciones siguientes). En este artículo encontramos los diámetros de los espacios que estudiamos. Puesto que todas las variedades que estudiamos son esferas estándar (S^n), están inmersas en $\mathbb{R}^{n+1}$. En la definición siguiente supongamos que la variedad diferenciable está inmersa regularmente en el espacio euclidiano, donde la longitud de arco está definida.

Definición 2.2: La *distancia d(x,y)* entre dos puntos x e y de M es el ínfimo de las longitudes de todos los caminos suaves por trozos que unen x e y. Esta definición satisface las propriedades usuales de una métrica:

(1) $d(x, y) \geq 0$
(2) $d(x, y) = d(y, x)$
(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Definición 2.3: El *diámetro* de una variedad diferenciable compacta es el máximo de la función distancia: diámetro $M = \max_{x,y \in M} d(x, y)$.

Por ejemplo, el diámetro de una esfera de radio 1 es π porque los caminos minimales son los círculos máximos de la esfera.

Definición 2.4: Un grupo G *opera* (o *actúa*) sobre una variedad M si
(1) cada elemento g de G define un difeomorfismo de M en sí misma.
(2) la composición de dos de tales transformaciones coincide con la operación del grupo: $g(h(x)) = gh(x)$ para todo $x \in M$ y $g, h \in G$, y
(3) la identidad de G, id, es la tranformación identidad de M.

El grupo G *opera isométricamente* sobre M si cada elemento g de G preserva la función distancia: $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ (un ejemplo típico es el grupo de matrices ortogonales que opera sobre $\mathbb{R}^n$).

Definición 2.5: La *órbita* de un punto x es el conjunto $G(x) = \{y \in M : y = g(x) \text{ para algún } g \in G\}$.

Una acción define una relación de equivalencia sobre M: $x \sim y \Leftrightarrow y \in G(x)$. La existencia de una relación de equivalencia implica que dos órbitas son iguales o disjuntas. En efecto, supongamos que y está en la órbita de x. Luego la órbita de x contiene la órbita de y, dado que $h(y) = h(g(x))$ para cada h en G. Sin embargo, como $g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(y)$, $x = g^{-1}(y)$, y x está también en la órbita de y. Entonces la órbita de y contiene a la órbita de x y ambas son iguales.

Consideramos las órbitas como puntos de un nuevo espacio $M/G = \{G(x) : x \in M\}$ llamado el *espacio de órbitas*. Si M es un espacio métrico, el espacio de órbitas M/G tiene una métrica inducida. La distancia entre dos puntos $G(x)$ y $G(y)$ de M/G se define como la distancia entre los conjuntos $G(x)$ y $G(y)$ en M. Si G es compacto, la distancia es cero sólo cuando las órbitas son iguales.

Definición 2.6: Un grupo G opera por *cohomogeneidad* k sobre una variedad de Riemann M si dim $(M/G) = k$.

En el ejemplo 1, S^1 opera por cohomogeneidad 1 sobre S^2.

Definición 2.7: Una *isometría* es un difeomorfismo $\phi : M \to N$ que preserva la función distancia: $d_N(\phi(x), \phi(y)) = d_M(x, y)$.

Las isometrías de este artículo son de la esfera en sí misma. Resolveremos los dos problemas siguientes: (1) determinar los diámetros de S^n/G, donde G es un de los grupos compactos de isometría de S^n descripto en la sección 4 y (2) hallar los subgrupos de G, definidos más abajo.

Definición 2.8: El *subgrupo de isotropía* de un punto x bajo la acción de un grupo G sobre la variedad M es el subgrupo G_x que fija x, es decir, $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$.

Por definición de la acción de un grupo, G_x siempre contiene la identidad del grupo. Si dos puntos x e y pertenecen a la misma órbita, sus subgrupos de isotropía son conjugados. Si $g(x) = y$, entonces para cualquier $h \in G_y$, $h(g(x)) = h(y) = y$ y $g^{-1}(hg(x)) = g^{-1}(y) = x$, de modo que $g^{-1}hg \in G_x$. Se deduce que $g^{-1}G_y g \subset G_x$. Puesto que $x = g^{-1}(y)$, $gG_x g^{-1} \subset G_y$. Dado que cada conjunto contiene al otro, $gG_x g^{-1} = G_y$. Dos órbitas $G(x)$ y $G(y)$ son del mismo tipo si G_x y G_y son conjugados en G.

Definición 2.9: Un *subgrupo principal de isotropía* (que es el más pequeño en términos de dimensión) es un subgrupo de isotropía H de G tal que para cada subgrupo de isotropía K de G, $K \supseteq gHg^{-1}$, para algún g en G.

Este grupo (todos los subgrupos principales de isotropía son isomorfos) está asociado a una clase especial de órbitas.

Definición 2.10: Una órbita que tiene un conjugado de H como su subgrupo de isotropía se llama *órbita principal*.

Las órbitas principales forman un conjunto abierto y denso en M llamado la *parte regular* de M [MSY].

Definición 2.11: Una órbita cuyo subgrupo de isotropía tiene una dimensión estrictamente mayor que la dimensión de H se llama *órbita singular*.

En el ejemplo 1, el subgrupo principal de isotropía es la identidad, porque sólo el subgrupo trivial fija cualquier punto en S^2 sin coordenadas nulas. Es decir, si $x \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

implica que $\cos\theta = 1$. Sin embargo, en los puntos $(0, 0, \pm 1)$ el subgrupo de isotropía es S^1, porque todo el círculo fija estos puntos. Por eso, estos puntos son las órbitas singulares, y su subgrupo asociado es S^1. Aquí $M/G = I$; las órbitas principales corresponden a los puntos interiores y las órbitas singulares a los puntos extremos.

A causa de nuestro interés en calcular los diámetros de los espacios M/G, queremos dividir estas acciones entre acciones reducibles y acciones irreducibles. Sea G un grupo compacto de Lie y sea V un espacio vectorial de dimensión n.

Definición 2.12: Una *representación* del grupo G sobre el espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho : G \to GL(V)$ de G en el grupo de todas las transformaciones lineales inversibles de V.

Queremos estudiar las representaciones $\rho : G \to GL(\mathbb{R}^{n+1})$ donde $\rho(G)$ actúa sobre S^n. Para abreviar, escribimos frecuentemente $g(v)$ en vez de $\rho(g)(v)$ cuando ρ es evidente por el contexto.

Definición 2.13: Una representación de G sobre V se llama *reducible* si hay un subespacio propio y no trivial de V que es G-invariante. En el caso contrario, se llama *irreducible.*

Cualquier acción reducible G fija también el espacio normal a su subespacio G-invariante. Como la distancia en el espacio de órbitas se define como la distancia entre las órbitas dentro de la variedad de Riemann, el diámetro de un espacio de órbitas bajo una acción reducible sobre una esfera unitaria es, por lo menos, tan grande como la distancia entre órbitas en los subespacios normales, es decir, por lo menos $\pi/2$.

Por ejemplo, el ecuador sobre S^2, donde $z = 0$, y el conjunto de los polos norte y sur $\{(0, 0, \pm 1)\}$, son intersecciones de subespacios normales entre sí en $\mathbb{R}^3$ con S^2. Si están en órbitas diferentes (como en el ejemplo 1), la distancia entre las órbitas será $\pi/2$, como en la variedad original. Los números π y $\pi/2$ son los dos diámetros posibles bajo acciones reducibles.

3 Consideraciones preliminares y ejemplos

Definición 3.1: Un *grupo de Lie* es un grupo que es también una variedad diferenciable, sobre la cual la operación del grupo y su inversa definen transformaciones diferenciables. Es decir, $\mu : G \times G \to G$, $\mu(g, h) = gh$ es una transformación diferenciable, así como $\tau : G \to G$, $\tau(g) = g^{-1}$.

Por ejemplo el círculo es un grupo de Lie bajo la multiplicación $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$.

Supongamos que G es un grupo de Lie compacto y conexo que opera isométricamente sobre S^n, la esfera clásica en $\mathbb{R}^{n+1}$ de radio 1.

Como dijimos anteriormente, en el ejemplo 1, tenemos una acción de cohomogeneidad 1 (puesto que el espacio de órbitas es un intervalo). Si todo el grupo $SO(n+1)$ opera sobre S^n, hay solamente una órbita, porque cada punto $x \in S^n$ es imagen del punto $(1, 0, \ldots, 0)$ bajo multiplicación por una matriz con el vector x en la primera columna. Esta es una acción de cohomogeneidad 0, también llamada *homogénea.*

Ejemplo 2. Un ejemplo clásico de una acción de cohomogeneidad 2 de un grupo sobre una esfera es la acción de Hopf, donde S^1 opera sobre S^3. Esta acción se representa como

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} re^{i\alpha} \\ se^{i\beta} \end{bmatrix},$$

donde r y s son números positivos reales con $r^2 + s^2 = 1$. Esta es una acción reducible que fija los círculos descriptos por $\left[\begin{smallmatrix} e^{i\alpha} \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ e^{i\beta} \end{smallmatrix}\right]$. Escogiendo $\theta = -\alpha$, vemos que una órbita típica contiene un punto del tipo $(r, se^{i\phi})$; por eso, el espacio de órbitas tiene una dimensión menos que S^3: es de dimensión 2. La identidad sólo fija un punto de ese tipo, supuesto que el grupo principal de isotropía es trivial. No hay órbitas singulares, luego no hay aristas o vértices.

Definición 3.2: Una *geodésica* sobre la variedad M es una curva parametrizada c cuya aceleración c'' es siempre perpendicular a M.

El diámetro del espacio de órbitas es $\pi/2$ puesto que $\{(r, se^{i\theta}) : r = \cos\omega,\ \ s = \operatorname{sen}\omega\}$ define una geodésica sobre el espacio de órbitas. Esta geodésica es cerrada cuando $\omega = \pi$, porque $(r, se^{i\theta})$ está identificado a $(-r, se^{i\theta})$. (Esta curva es una geodésica en el espacio de órbitas, porque es una geodésica en S^3 perpendicular a las órbitas.) Se sabe que el espacio de órbitas S^3/S^1 es una esfera S^2 de dimensión 2 y de radio 1/2.

En los ejemplos de este artículo, hallaremos los subgrupos de isotropía asociados a estas acciones por medio de los resultados siguientes:
(1) Las matrices constantes (es decir, kI_n, donde k es un escalar y I_n es la identidad en $GL(n, V)$, $V = \mathbb{R}$ o $V = \mathbb{C}$) están en el centro de $GL(n, V)$. La multiplicación por la izquierda o por la derecha por una matriz constante multiplica cada entrada por el escalar.
(2) Sobre un cuerpo conmutativo como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, las únicas matrices que conmutan con matrices diagonales cuyas entradas no son iguales entre sí son otras matrices diagonales. Es fácil ver que dos matrices diagonales conmutan, dado que la multiplicación se realiza componente por componente. La matriz A que conmuta con una matriz diagonal cuyas entradas no son iguales entre sí satisface

$$A \begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} A.$$

A la izquierda, el producto tiene como primera columna la primera columna de A multiplicada por a; como segunda columna, la segunda columna de A multiplicada por b; como tercera columna, la tercera columna de A multiplicada por c; etcétera. A la derecha, el producto es una matriz cuyo primer

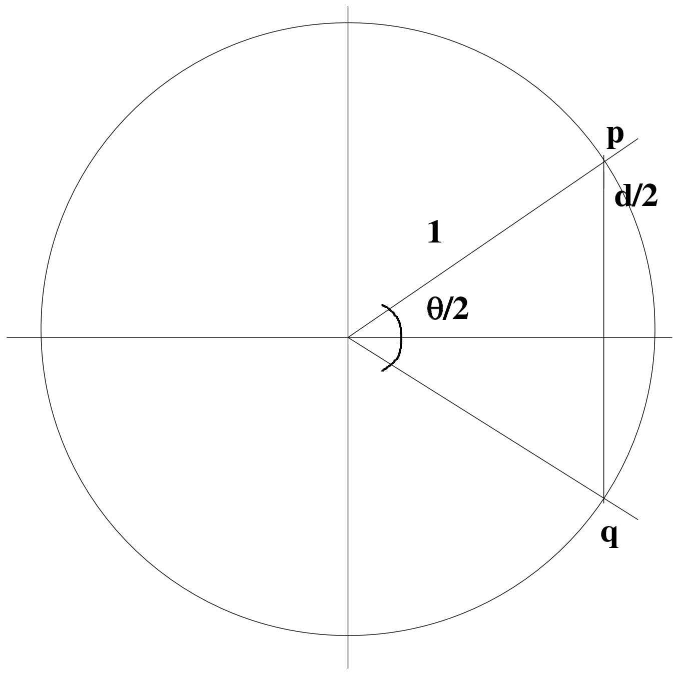


Figura 2

renglón es el primer renglón de A multiplicado por a; cuyo segundo renglón es el segundo renglón de A multiplicado por b; etcétera. Si la matriz de la izquierda es igual a la matriz de la derecha, cada entrada a la izquierda es igual a la entrada correspondiente a la derecha. Como a, b, c,...no son iguales entre sí, concluímos que A es diagonal.

Para calcular el diámetro de los espacios de órbitas, la relación siguiente es muy útil. En el círculo unitario, la distancia euclidiana d y la distancia en la esfera θ satisfacen la ecuación $d/2 = \operatorname{sen}(\theta/2)$, como vemos en la Figura 2.

Un método de determinar la descomposición de órbitas de una acción dada por G de cohomogeneidad 2 usa la clasificación de las acciones de cohomogeneidad 1 (cf. [HL], [S1], [S2], [S3], [GH], y [U]). Notamos que cuando $S^n/G = D^2$, las órbitas singulares forman el borde del disco y los subgrupos singulares de isotropía de estos puntos operan sobre el espacio unitario normal a sus órbitas por cohomogeneidad 1. Puesto que las acciones de cohomogeneidad 1 han sido clasificadas, basta encontrar subgrupos singulares de isotropía K, con $H \subset K \subset G$, que operen sobre el subespacio normal por cohomogeneidad 1.

Otro método de estudiar estas acciones requiere examinar la representación de G en el grupo de matrices unitarias $U(n)$. Tomamos un vector "típico" en S^n y tratamos de determinar cómo G identifica ese vector con otros. Tratamos de reducir la dimensión del $(n+1)$-vector reemplazando tantas entradas como sea posible con ceros, quedando en la misma órbita. Para encontrar cuál subgrupo de G lo fija, usamos este vector simplificado. De este modo, encontramos el subgrupo principal de isotropía. Para hallar otros subgrupos posibles de isotropía, estudiamos vectores menos típicos: vectores con más ceros, quizá, o con más identificaciones entre las entradas. Estos cálculos dan una descripción explícita del espacio de órbitas en términos de su interior y su frontera, diferenciando entre aristas y vértices de la misma. Podemos dibujar el espacio de órbitas y encontrar la distancia máxima entre dos puntos. A veces es difícil escribir la descripción de la representación matricial y por eso necesitamos los dos métodos.

4 Tres Acciones Sobre Esferas

4.1 $U(2) \times SU(2)$

El grupo $U(2) \times SU(2)$ opera sobre la esfera unitaria de dimensión 7 por la representación $\phi = (\sigma_1 \times \mu_2) \otimes \mu_2$. El espacio de órbitas tiene dimensión 1. Cuando aumentamos la representación por una representación trivial de dimension 1, la acción deviene una acción de cohomogeneidad 2 sobre la esfera de dimensión 8. Representamos la esfera de dimensión 8 como (A, t), donde A es una matriz compleja de dimensiones 2×2 (sobre $\mathbb{C}$), t es un número real y $\mathrm{tr}(\overline{A}^T A) + t^2 = 1$. Entonces la representación ϕ se realiza multiplicando A por la izquierda con una matriz de $U(2)$ y multiplicándola por la derecha con una matriz de $SU(2)$ con la acción de la identidad sobre t. Esta multiplicación puede diagonalizar la matriz A. Así, cada órbita tiene una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

donde a^2 y b^2 son valores propios de $\overline{A}^T A$. Puesto que $\overline{A}^T A$ es hermítica, a^2 y b^2 son reales, y a y b son reales o imaginarios. Si $a = \|a\| i$, la multiplicación por $\left[\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ hace que la primera entrada sea real y positiva. Análogamente, podemos hacer ambas entradas reales y positivas. Dado que la conjugación con $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ permuta a y b, podemos suponer que $a \geq b$. El espacio de órbitas es isométrico al conjunto $\{(a,b,t) \in S^2 : a \geq b \geq 0\}$, gajo de S^2 entre los planos $y = 0$ y $x = y$, que contiene los puntos $(0,0,\pm 1)$ porque ϕ fija la última coordenada.

El subgrupo de isotropía principal es S^1 en una forma conjugada a

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{bmatrix},$$

porque matrices diagonales conmutan con otras matrices diagonales y todas las matrices diagonales de $SU(2)$ son de la forma antes mencionada. Todo el grupo $U(2) \times SU(2)$ fija los puntos $(0,0,\pm 1)$, porque no opera sobre la última coordenada. Sobre el plano $y = 0$, el subgrupo de isotropía es T^2. Tenemos

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sobre el plano $x = y$, el subgrupo de isotropía es $SU(2)$, dado que todo el grupo conmuta con la matriz escalar:

$$A \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

El diámetro es π. Ver la Figura 3.

4.2 $U(1) \times SU(3) \times U(1)$

El grupo $U(1) \times SU(3) \times U(1)$ opera sobre la esfera de dimensión 11. Podemos pensar en un punto de la esfera como un par de vectores complejos $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$. La representación ϕ está dada por

$$\phi(e^{i\alpha}, A, e^{i\beta})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (A\mathbf{v}_1 e^{-i\alpha}, A\mathbf{v}_2 e^{-i\beta}).$$

Escogemos A tal que el primer renglón sea paralelo a $\overline{\mathbf{v}}_1$ y los dos primeros renglones den el mismo plano de $\overline{\mathbf{v}}_1$ y $\overline{\mathbf{v}}_2$. Entonces $A\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ tiene a lo sumo una entrada r no nula que es real. $A\mathbf{v}_2$ tiene a lo sumo dos entradas no nulas. Podemos hacerlas ambas reales también. Supongamos que $A\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} se^{i\theta} \\ te^{i\rho} \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Operamos sobre $(A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2)$ por

$$(e^{i\alpha}, B, e^{i\beta}) = (1, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{i(\theta-\rho)} & \\ & & e^{i(\rho-\theta)} \end{bmatrix}, e^{i\theta}).$$

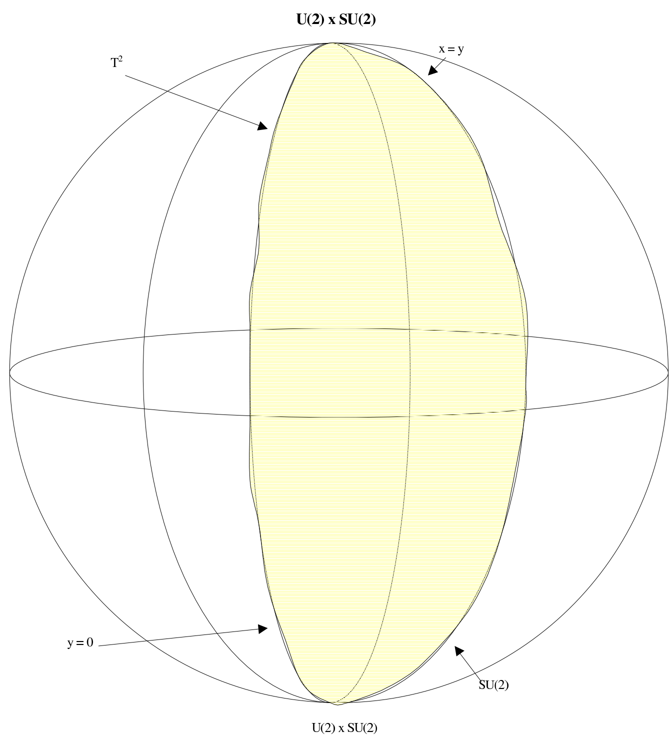


Figura 3.

Entonces vemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{i(\theta-\rho)} & \\ & & e^{i(\rho-\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{i(\theta-\rho)} & \\ & & e^{i(\rho-\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} se^{i\theta} \\ te^{i\rho} \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\theta} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La acción no cambia la longitud de $\mathbf{v}_1$ o $\mathbf{v}_2$; $r^2 + s^2 + t^2 = 1$. En cada órbita tenemos no más de un punto con a lo sumo tres entradas no nulas. Este punto es de la forma $\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, con todas las entradas reales y positivas. No podemos cambiar el orden de las entradas; x es la longitud de $\mathbf{v}_1$, $xy = \|\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle\|$ y $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{y^2 + z^2}$. Querríamos decir que el espacio de órbitas es isométrico al subconjunto de S^2 dado por $\{(x, y, z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. No es así porque todos los puntos del tipo $(0, y, z)$ se identifican al punto $(0, 1, 0)$. Tenemos, en vez de dicho espacio, un gajo de la esfera S^2 de radio $1/2$.

Consideremos la familia de geodésicas $(\cos\theta, y \operatorname{sen}\theta, z \operatorname{sen}\theta)$. Todas las geodésicas sobre S^2 que contienen (1,0,0) pueden ser escritas de esta manera. Hasta $\theta = \pi/2$, hay un punto por órbita para cada valor de θ. Cuando $\theta = \pi/2$, la geodésica pasa por la órbita $(0, y, z) \sim (0, 1, 0)$. Por esto, vemos que (1,0,0) y (0,1,0) son antípodas en el espacio de órbitas. La distancia entre estos puntos es $\pi/2$. Vemos que el espacio de órbitas es un gajo de la esfera S^2 de radio $1/2$. El ángulo en cada vértice es $\pi/2$, que es igual al ángulo entre los planos $y = 0$ y $z = 0$.

El subgrupo de isotropía principal es isomorfo a S^1 porque los elementos de la forma

$$(e^{i\alpha}, A, e^{i\beta}) = (e^{i\alpha}, \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & & \\ & 1 & \\ & & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}, e^{i\alpha})$$

fijan vectores cuya última entrada es 0. Las órbitas donde el rango de la matriz $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ es 1 y $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ contienen uno de los dos elementos

$$(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \quad \text{o} \quad (\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}).$$

Estas órbitas coinciden con los vértices. Tienen subgrupo de isotropía conjugado a $S(U(2) \times U(1)) \times U(1)$, de la forma

$$(e^{i\alpha}, A, e^{i\beta}) = (e^{i\alpha}, \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & \\ & B \end{bmatrix}, e^{i\beta}),$$

donde B está en $U(2)$ y tiene determinante $e^{-i\alpha}$.

Si el rango de la matriz $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ es 1 y $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \neq 0$, la órbita tiene un elemento de la forma $(\left[\begin{smallmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right])$. Como ninguno de los dos vectores es nulo, ambos elementos de $U(1)$ deben ser iguales a la primera entrada de A, elemento de $SU(3)$. El subgrupo de isotropía de esta órbita es $S(U(2) \times U(1))$, conjugado a

$$(e^{i\alpha}, A, e^{i\beta}) = (e^{i\alpha}, \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & \\ & B \end{bmatrix}, e^{i\alpha}),$$

donde B está en $U(2)$ con determinante $e^{-i\alpha}$.

Si el rango de la matriz $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ es 2 y $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, la órbita tiene un elemento de la forma $(\left[\begin{smallmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{smallmatrix}\right])$. El subgrupo de isotropía es isomorfo a T^2 y conjugado a

$$(e^{i\alpha}, A, e^{i\beta}) = (e^{i\alpha}, \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & & \\ & e^{i\beta} & \\ & & e^{-i(\alpha+\beta)} \end{bmatrix}, e^{i\beta});$$

este subgrupo conjuga r por $e^{i\alpha}$ y s por $e^{i\beta}$.

El espacio de órbitas tiene dos vértices y dos aristas. Es un cuarto de la esfera S^2 de radio $1/2$. Tiene diámetro $\pi/2$. Ver la figura 4.

4.3 $SU(4)$

El grupo $SU(4)$ opera sobre la esfera de dimensión 14 por la representación adjunta. Bajo la representación adjunta, $SU(4)$ opera por conjugación sobre su álgebra de Lie que es el conjunto de matrices complejas antihermíticas de traza nula. Pensamos en los puntos de la esfera como dichas matrices con norma 1. La métrica es $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(\overline{A}^T A)$.

Si A es una matriz antihermítica, entonces $A^* = \overline{A}^T = -A$. En ese caso, iA es hermítica, porque $(iA)^* = -i\overline{A}^T = -i(-A) = iA$. Una matriz hermítica puede ser diagonalizada por conjugación con matrices unitarias. Es decir, hay

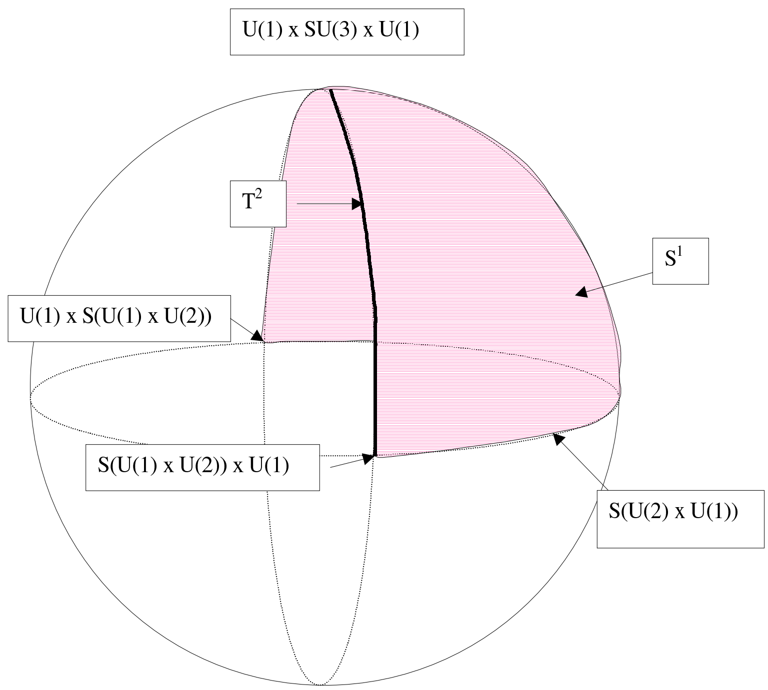


Figura 4.

una matriz unitaria U tal que

$$U(iA)U^{-1} = \begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{bmatrix},$$

donde a, b, c y d son los valores propios de iA. Pero entonces

$$-iU(iA)U^{-1} = UAU^{-1} = \begin{bmatrix} -ia & & & \\ & -ib & & \\ & & -ic & \\ & & & -id \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de una matriz hermítica son reales. Por esta razón, $-ia$, $-ib$, $-ic$ y $-id$ son imaginarios. Dado que la conjugación con un bloque de la forma $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ permuta dos entradas en la diagonal, podemos suponer que $a \geq b \geq c \geq d$. No podemos hacer más identificaciones, porque en cualquier matriz diagonalizada B tal que $B = UAU^{-1}$, sus entradas en la diagonal son los valores propios de A. Puesto que UAU^{-1} es similar a A, $\mathrm{tr}(B) = 0$ y $\mathrm{tr}(\overline{B}^T B) = 1$. Es decir, $a+b+c+d = 0$ y $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. El espacio de órbitas es isométrico a la intersección de S^3 con el plano $a+b+c+d = 0$ que yace entre los planos $a = b$, $b = c$ y $c = d$. Es isométrico al triángulo en S^2 donde $x \geq y \geq |z|$. Tiene diámetro $2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{3}}$. La isometría f está dada por $f(a, b, c, d) = (a+b, a+c, b+c)$. Es una isometría porque $d = -a-b-c$, y $a^2+b^2+c^2+d^2 = a^2+b^2+c^2+(-a-b-c)^2 = 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac+2bc = (a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$.

El subgrupo principal de isotropía es isomorfo a T^3 porque una matriz del tipo

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & & & \\ & e^{i\beta} & & \\ & & e^{i\gamma} & \\ & & & e^{-i(\alpha+\beta+\gamma)} \end{bmatrix}$$

conmuta con todas las matrices diagonales, y solamente matrices diagonales conmutan con matrices diagonales con entradas no iguales entre sí.

Sobre la arista $x = y$ en S^2 que corresponde a la arista $b = c$ en S^3, el subgrupo de isotropía es $S(U(1) \times U(2) \times U(1))$:

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha} & & \\ & B & \\ & & e^{i\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ia & & & \\ & -ib & & \\ & & -ib & \\ & & & -id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & & \\ & B^{-1} & \\ & & e^{-i\beta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -ia & & & \\ & -ib & & \\ & & -ib & \\ & & & -id \end{bmatrix},$$

donde $B \in U(2)$ y tiene determinante $e^{-i(\alpha+\beta)}$. La matriz constante ibI_2 conmuta con todas la matrices en $U(2)$.

Análogamente, el subgrupo de isotropía sobre la arista $y = z$ en S^2 que corresponde a la arista $a = b$ en S^3 es $S(U(2) \times U(1) \times U(1))$. La arista $y = -z$ en S^2 corresponde a la arista $c = d$ en S^3. El subgrupo de isotropía sobre esta arista es $S(U(1) \times U(1) \times U(2))$.

Los vértices son (1,0,0), $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ en S^2. En S^3 son $(1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$, $(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$.

Recordemos que las matrices constantes están en el centro del grupo. Es fácil ver que en el vértice (1,0,0) o (1/2, 1/2, -1/2, -1/2) el subgrupo de isotropía es $S(U(2) \times U(2))$ porque

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2i & & & \\ & -1/2i & & \\ & & 1/2i & \\ & & & 1/2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2i & & & \\ & -1/2i & & \\ & & 1/2i & \\ & & & 1/2i \end{bmatrix}.$$

Las matrices A y B están en $U(2)$ con el determinante de A igual al inverso del determinante de B.

En el vértice $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ o $(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, el subgrupo de isotropía es $S(U(3) \times U(1))$, dado que

$$\begin{bmatrix} A & \\ & e^{i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\frac{1}{2\sqrt{3}}I_3 & \\ & i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & e^{-i\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\frac{1}{2\sqrt{3}}I_3 & \\ & i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

donde A está en $U(3)$ y tiene determinante $e^{-i\alpha}$. Análogamente, el subgrupo de isotropía en el vértice que queda es $S(U(1) \times U(3))$. Ver la Figura 5.

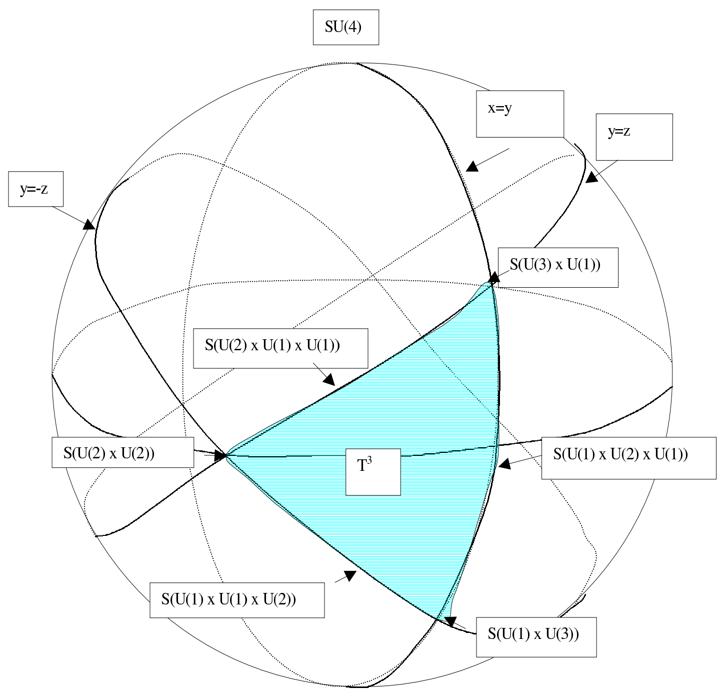

SU(4)
x=y
y=z
y=-z
S(U(3) x U(1))
S(U(2) x U(1) x U(1))
S(U(2) x U(2))
T3
S(U(1) x U(2) x U(1))
S(U(1) x U(1) x U(2))
S(U(1) x U(3))

Figura 5.

4.4 Teorema

Hemos examinado las siguientes acciones de cohomogeneidad 2 sobre esferas:
(1) $(G, \phi) = (U(2) \times SU(2), [\sigma_1 \times \mu_2 \otimes \mu_2]_{\mathbb{R}} + 1)$
(2) $(G, \phi) = (U(1) \times SU(3) \times U(1), \sigma_1 \otimes \mu_3 \otimes \sigma_1)$
(3) $(G, \phi) = (SU(4)$, representación adjunta)

Se sabe que estas acciones resultan respectivamente en espacios de órbitas isométricos a un gajo de la esfera S^2 con ángulos $\pi/4$ (llamamos a dicho espacio $D_{4,4}$), un gajo de la esfera S^2 con radio $1/2$ y ángulos $\pi/2$ ($D_{2,2}(1/2)$) y un triángulo sobre S^2 con ángulos $\pi/2$, $\pi/3$ y $\pi/3$ (llamado $\Delta_{2,3,3}$). Hemos probado el teorema siguiente.

Teorema 4.1: Los espacios de órbitas de las acciones anteriores tienen los diámetros dados en la tabla siguiente:

Tabla 1.

Grupo	Representación	Espacio de Órbitas	Diámetro
$U(2) \times SU(2)$	$\sigma_1 \times \mu_2 \otimes \mu_2 + 1$	$D_{4,4}$	π
$U(1) \times SU(3) \times U(1)$	$\sigma_1 \otimes \mu_3 \otimes \sigma_1$	$D_{2,2}(1/2)$	$\pi/2$
$SU(4)$	adjunta	$\Delta_{2,3,3}$	$2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{3}}$

Además tienen las descomposiciones dadas en la tabla siguiente, donde H, L_i y K_i son los subgrupos de isotropía asociados con el espacio dado en la Figura 6:

Tabla 2.

Grupo	$U(2) \times SU(2)$	$U(1) \times SU(3) \times U(1)$	$SU(4)$
α_1	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/2$
α_2	$\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/3$
α_3	π	π	$\pi/3$
H	$U(1)$	$U(1)$	T^3
L_1	T^2	$S(U(2) \times U(1))$	$S(U(1) \times U(2) \times U(1))$
L_2	$SU(2)$	T^2	$S(U(1) \times U(1) \times U(2))$
L_3			$S(U(2) \times U(1) \times U(1))$
K_1	$U(2) \times SU(2)$	$S(U(2) \times U(1)) \times U(1)$	$S(U(2) \times U(2))$
K_2	$U(2) \times SU(2)$	$S(U(2) \times U(1)) \times U(1)$	$S(U(3) \times U(1))$
K_3			$S(U(1) \times U(3))$

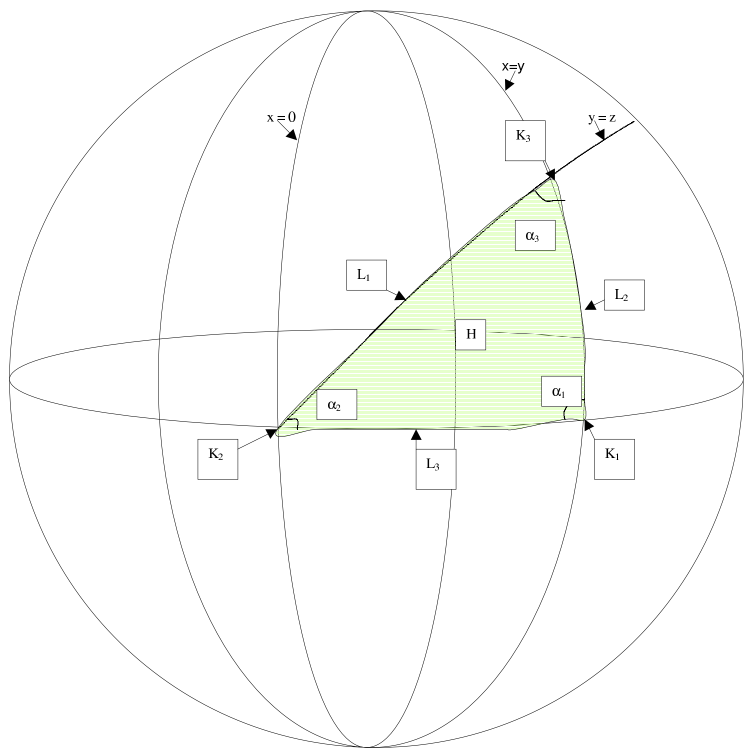


Figura 6.

5 Conclusiones

Hay muchos artículos sobre acciones isométricas sobre esferas y muchos autores han estudiado acciones de cohomogeneidad 2, pero hasta ahora, una compilación completa de los espacios de órbitas, sus subgrupos de isotropía y sus diámetros no aparece en ninguna parte. Eso es el objetivo del artículo [MS]. El estudio cuidadoso de los subgrupos de isotropía lleva a descomposiciones de variedades diferenciables familiares en modos no familiares.

Una investigación de todas las acciones resulta en pocos espacios de órbitas. Observamos que los diámetros que resultan de acciones maximales lineales de cohomogeneidad 2 sobre esferas son π, $\pi/2$, $2\,\text{arcsen}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, y $\pi/4$ [MS]. Los diámetros que resultan de acciones maximales lineales de cohomogeneidad 1 sobre esferas son π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$ [GH]. El límite menor de diámetros para variedades diferenciables de curvatura constante 1 es $1/2\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{3\pi}{10}\right)$ que es menor que los diámetros de espacios de cohomogeneidad 2 o 1. Estas variedades resultan de acciones por grupos finitos que admiten representaciones ortogonales y sin puntos fijos sobre esferas. Las acciones de cohomogeneidad 1 y 2 resultan de grupos conexos de Lie de dimensiones máximas que pueden operar sobre la esfera S^n. Puesto que los grupos finitos producen espacios de órbitas con diámetros menores, sería interesante ver si acciones de dimensiones de cohomogeneidad superiores producen diámetros menores.

Agradecimientos

Agradecemos al Profesor David Joyner por su ánimo y sus sugerencias, y a Pablo Lejarraga, por su ayuda editorial y comentarios.

Referencias

[F] Flach, N. *Diamètres des Variétés a Courbure Sectionelle Positive*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **318**(9) (1994), 827–830.

[G] Gilmore, R. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[Gr] Greenwald, S. *Diameters of Spherical Aleksandrov Spaces and Curvature One Orbifolds*, Preprint (1998).

[GH] Grove, K., Halperin, S. *Dupin Hypersurfaces, Group Actions and the Double Mapping Cylinder*, J. Diff. Geometry, **26** (1987), 429–459.

[GS] Grove, K., Searle, C. *Differential Topological Restrictions by Curvature and Symmetry*, J. Diff. Geometry, **47** (1997), 530–559.

[HK] Hsiang, W.-Y., Kleiner, B. *On the Topology of Positively Curved 4-Manifolds with Symmetry*, J. Diff. Geometry, **30** (1989), 615–620.

[HL] Hsiang, W.-Y., Lawson, H. B. *Minimal Submanifolds of Low Cohomogeneity*, J. Diff. Geometry, **5** (1971), 1–38.

[K] Klingenberg, W., *A Course in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[McG] McGowan, J., *The Diameter function on the Space of Space Forms*, Compositio Math., **87**(1) (1993), 79–98.

[MS] McGowan, J. Searle, C., work in progress.

[MSY] Montgomery, D., Samelson, H., Yang, C.T. *Exceptional Orbits of Highest Dimension*, Ann. of Math., **44** (1957), 108–116.

[M] Munzner, H. F. *Isoparametrische Hyperflachen in Sphären*, Math. Ann., **251** (1980) 57–71.

[Sa] Satake, I. *Linear Algebra*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.

[S1] Straume, E. *On the Invariant Theory and Geometry of Compact Linear Groups of Cohomogeneity* ≤ 3, Differential Geometry and its Applications, **4** (1994), 1–23.

[S2] Straume, E. *Compact Connected Lie Transformation Groups on Spheres with Low Cohomogeneity, I*, Memoirs of the AMS, **119** (569), (1996).

[S3] Straume, E. *Compact Connected Lie Transformation Groups on Spheres with Low Cohomogeneity, II*, Memoirs of the AMS, **125**(595), (1997).

[W] Wolf, Joseph A. *Spaces of Constant Curvature*, Publish or Perish, Inc., Wilmington, 1984.