Divulgaciones Matemáticas Vol. 9 No. 2(2001), pp. 173–181

Generalización de Funciones Contra-Continuas

Generalization of Contra-Continuous Functions

Rosas, E., Carpintero, C.
Universidad de Oriente
Cumaná, Venezuela
Vielma, J.
Universidad de los Andes
Mérida, Venezuela

Resumen

Se introducen los conceptos de función (α, β)-contra continua y (α, β)-contra semi continua. Se muestran algunas caracterizaciones y algunas propiedades fundamentales.
Palabras y frases clave: Funciones (α, β)-contra continuas, α-semi conexos, fuertemente α-S-cerrado.

Abstract

The concepts of (α, β)-contra continuous and (α, β)-contra semi continuous functions are introduced. Several characterizations and some fundamental properties are obtained.
Key words and phrases: (α, β)-contra continuous functions, α-semi conexo strongly, α-S-closed.

1 Introducción

En este trabajo se generalizan las nociones de funciones contra continuas y funciones contra semicontinuas dadas en [1], utilizando la teoría de operadores asociados a una topología y se dan a conocer algunos resultados importantes respectos a estos tipos de funciones. Para ello necesitamos considerar una serie de conceptos básicos los cuales pueden ser encontrados en [2], [3], [4] y [5].

Recibido 2000/08/15. Revisado 2001/10/17. Aceptado 2001/10/26.
MSC (2000): Primary 54C08; Secondary 54C05, 54H05.

2 (α, β)-Contra Continuidad y (α, β)-Contra Semicontinuidad

Definición 2.1. Sean (X, Γ, α) y (Y, φ, β) espacios topológicos, α y β operadores asociados a las topologías Γ y φ sobre X y Y, respectivamente. Decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es (α, β)-contra continua (resp.(α, β)-contra semicontinua)si $f^{-1}(B)$ es α-cerrado (resp. α-semicerrado) en X para todo conjunto β-abierto B en Y.

Ejemplo 2.1. Consideremos $X = Y = \{a, b, c\}$ y las topologías $\Gamma = \Psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Definamos los siguientes operadores αy β como sigue:

$$\alpha(A) = \begin{cases} A, & \text{si} \quad b \in A \\ cl(A), & \text{si} \quad b \notin A \end{cases} \quad ; \quad \beta(A) = cl(A).$$

Observe que los conjuntos α-abiertos y β-abiertos en X y en Y respectivamente son los siguientes:

$$\begin{array}{l} \Gamma_\alpha = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\} \\ \Psi_\beta = \{\emptyset, X\} \end{array} .$$

Ahora definamos $f : X \to Y$ como sigue

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{si} \quad x = a \\ c, & \text{si} \quad x = b \\ a, & \text{si} \quad x = c \end{cases} ,$$

es fácil mostrar que f es (α, β)-contra continua.

Ejemplo 2.2. Consideremos $X = Y = \{a, b, c\}$ y las topologías

$$\Gamma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\Psi = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}.$$

Definamos los siguientes operadores α y β como sigue:

$$\alpha(A) = \beta(A) = \begin{cases} A, & \text{si} \quad b \in A \\ cl(A), & \text{si} \quad b \notin A \end{cases} .$$

Observe que los conjuntos $\Psi_\beta = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ y los conjuntos α-semi abiertos α-$SO(X, \Gamma) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, en consecuencia los conjuntos α-semi cerrados son α-$SR(X, \Gamma) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{a\}\}$.

Ahora definamos $f : X \to Y$ por

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{si} \quad x = a \\ c, & \text{si} \quad x = b \\ a, & \text{si} \quad x = c \end{cases},$$

es fácil mostrar que f es (α, β)-contra semi continua.

Es de observar que en el caso que α y β sean, respectivamente, los operadores identidad sobre X y Y, la definición anterior se reduce a la definición de función contra continua dada en [1]. De igual forma, si α es el operador clausura en X y β es el operador identidad sobre Y, entonces tendremos la definición de función contra semicontinua.

En el siguiente teorema se caracterizan las funciones (α, β)-contra semi continuas.

Teorema 2.1. *Para una función $f : (X, \Gamma, \alpha) \longrightarrow (Y, \varphi, \beta)$ las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *f es (α, β)-contra semicontinua.*
2. *Para todo conjunto β-cerrado F en Y, $f^{-1}(F) \in \alpha\text{-}SO(X, \Gamma)$.*

Demostración. (1) $\to$ (2): Sea F un conjunto β-cerrado en Y, entonces $Y - F$ es β-abierto en Y, bajo la hipótesis que f sea (α, β)-contra semicontinua, $f^{-1}(Y - F)$ es α-semi cerrado en X, pero $X - f^{-1}(F) = f^{-1}(Y - F)$. Así $f^{-1}(F)$ es α-semiabierto en X, es decir, $f^{-1}(F) \in \alpha - SO(X, \Gamma)$.
(2)$\to$(1): Dado un conjunto F, β-abierto en Y tendremos que $Y - F$ es β-cerrado en Y. De (2) tenemos que $f^{-1}(Y - F) \in \alpha\text{-}SO(X, \Gamma)$. Sigue de esto que $f^{-1}(F)$ es α-semicerrado, por lo tanto f es (α, β)-contra semi continua. $\square$

El siguiente teorema nos da la relación existente entre las nociones de (α, β)-contra continua y (α, β)-contra semicontinua.

Teorema 2.2. *Sea $f : (X, \Gamma, \alpha) \longrightarrow (Y, \varphi, \beta)$. Si f es (α, β)-contra continua, entonces f es (α, β)-contra semicontinua.*

El siguiente ejemplo muestra la existencia de funciones (α, β)-contra semi continuas que no son (α, β)-contra continuas.

Ejemplo 2.3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = [|x|]$, donde $[|x|]$ denota la parte entera de x. Si consideramos en el dominio de f el operador clausura y en el codominio de ésta el operador identidad, entonces dado un conjunto F cerrado en $\mathbb{R}$ tendremos, en el caso $F \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, que $f^{-1}(F) = \emptyset$. Si $F \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(F)$ es unión de intervalos de la forma $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, luego $f^{-1}(F)$ es un conjunto clausura semiabierto. Pero $f^{-1}((1.5, 2.5)) = [2, 3)$ no es un conjunto clausura cerrado, pues no es cerrado en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.3. *Sea $f : (X, \Gamma, \alpha) \longrightarrow (Y, \varphi, \beta)$. Si f es (α, β)-contra semicontinua entonces para cada $x \in X$ y cada conjunto F β-cerrado en Y que contenga a $f(x)$ existe un conjunto $U \in \alpha$-$SO(X, \Gamma)$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq F$. Además, si α es un operador monótono entonces el recíproco es válido.*

Demostración. Para cada $x \in X$, sea F un conjunto β- cerrado en Y tal que $f(x) \in F$. Bajo el supuesto que f sea (α, β)-contra semicontinua, entonces $f^{-1}(F) \in \alpha$-$SO(X, \Gamma)$ y $x \in f^{-1}(F)$. Tomando $U = f^{-1}(F)$ se tiene entonces el resultado deseado.

Por otra parte, si suponemos que α es un operador monótono. Sea F un conjunto β-cerrado en Y. Si $f^{-1}(F) = \emptyset$ entonces $f^{-1}(F) \in \alpha$-$SO(X, \Gamma)$, si $f^{-1}(F) \neq \emptyset$ y conseguimos por cada $x \in X$ tal que $f(x) \in F$ conjuntos $U_x \in \alpha$-$SO(X, \Gamma)$ en los cuales $x \in U_x$ y $f(U_x) \subseteq F$, entonces $U_x \subseteq f^{-1}(F)$ por cada uno de tales x. Como cada $U_x \in \alpha$-$SO(X, \Gamma)$ y α se asume monótono resulta que $\bigcup_{x \in f^{-1}(F)} U_x$ es α-semiabierto, pero $f^{-1}(F) = \bigcup_{x \in f^{-1}(F)} U_x$ y en consecuencia $f^{-1}(F)$ es α-semiabierto en X. $\square$

Observe que este último teorema permite dar, bajo el supuesto que α sea monótono, una caracterización local de la noción (α, β)-contra semicontinuidad.

3 Espacios α-T_1, α-Conexos y α-Semi conexos

Definición 3.1. Sea (X, Γ, α) un espacio topológico con α un operador asociado a la topologia Γ sobre X. Se dice que X es un espacio α-T_1 si para cualesquiera dos puntos distintos x, y en X existen conjuntos U, V abiertos en X tales que; $x \in U$, $y \in V$, $y \notin \alpha(U)$ y $x \notin \alpha(V)$.

En el siguiente teorema se caracterizan los espacios α-T_1.

Teorema 3.1. *Sea (X, Γ, α) un espacio topológico con α un operador asociado a la topologia Γ sobre X, entonces X es α-T_1 si y sólo si cada conjunto $\{x\}$, con $x \in X$, es α-cerrado.*

A continuación se introduce la noción de espacio α- conexo. Primeramente, daremos la definición de funciones (α,β)-continuas, las cuales se describen en [4].

Definición 3.2. Sea (X,Γ) y (Y,Ψ) dos espacios topológicos y sean α,β operadores asociados a las topologiás Γ y Ψ respectivamente. Decimos que una función $f:(X,\Gamma)\to(Y,\Psi)$ es (α,β)-continua si para cada punto $x\in X$ y cada abierto V de $f(x)$ en Y, existe un abierto U en X que contiene a x tal que $f(\alpha(U))\subseteq\beta(V)$.

Teorema 3.2. *Si $f:(X,\Gamma,\alpha)\to(Y,\Psi,i_d)$ es una función (α,i_d)-continua entonces f es continua en el sentido usual.*

Definición 3.3. Sea (X,Γ,α) un espacio topológico con α el operador asociado a la topología Γ sobre X. Se dice que X es un espacio α-conexo si no existen funciones $f:X\longrightarrow\{0,1\}$; (α,i_d) continuas que sean sobreyectivas.

El lema que sigue será de utilidad en la caracterización de los espacios α-conexos.

Lema 3.3. *Si $f:(X,\Gamma,\alpha)\longrightarrow(Y,\varphi,i_d)$ es una función (α,i_d) continua, entonces $f^{-1}(V)$ es α-abierto para cada $V\in\varphi$.*

Demostración. Supongamos que $f:(X,\Gamma,\alpha)\longrightarrow(Y,\varphi,i_d)$ es (α,i_d) continua. Sea $V\in\varphi$ y supongamos $x\in f^{-1}(V)$, esto es $f(x)\in V$. Por hipótesis existe $U_x\in\Gamma$ tal que $f[\alpha(U_x)]\subseteq i_d(V)$, esto es $f[\alpha(U_x)]\subseteq V$. Luego; $U_x\in\Gamma,\ x\in U_x$ y $\alpha(U_x)\subseteq f^{-1}(V)$, por lo tanto $f^{-1}(V)$ es α- abierto. □

Teorema 3.4. *Sean (X,Γ,α), $A\subseteq X$ y $C_A:X\longrightarrow\{0,1\}$ la función característica de A. Entonces C_A es (α,i_d) continua si y sólo si A es simultáneamente un subconjunto α-abierto y α-cerrado de X.*

Demostración. (Suficiencia). Supongamos que C_A es (α,i_d) continua. Nótese que $C_A^{-1}(\{1\})=A$ y $C_A^{-1}(\{0\}=X-A$, según el lema anterior, $C_A^{-1}(\{1\})$ y $C_A^{-1}(\{0\})$ son conjuntos α- abiertos en X, pero, $A\cap(X-A)=\emptyset$. Así se concluye que A es simultáneamente un conjunto α-abierto y α-cerrado de X.

(Necesidad). Supongamos que A es un conjunto α-abierto y α-cerrado en X. Sean $x\in X$ y $V\subseteq\{0,1\}$ tal que $C_A(x)\in V$.

Caso 1. Si $C_A(x)=0$ entonces $x\in X-A$, y existe un abierto $U_x\in\Gamma$ tal que $x\in U_x$ y $\alpha(U_x)\subseteq X-A$, luego

$$C_A[\alpha(U_x)]\subseteq C_A(X-A)=\{0\}\subset V=i_d(V).$$

Caso 2. Si $C_A(x) = 1$ entonces $x \in A$, y existe un abierto $U_x \in \Gamma$ tal que $x \in U_x$ y $\alpha(U_x) \subseteq A$. Así,

$$C_A[\alpha(U_x)] \subseteq C_A(A) = \{1\} \subseteq V = i_d(V).$$

De los dos casos (1) y (2), se concluye que C_A es una función (α, i_d) continua. □

Caracterizamos ahora los espacios α- conexos según el siguiente

Teorema 3.5. *Sea (X, Γ, α). X es un espacio α- conexo si y sólo si los únicos subconjuntos que son simultáneamente α-abiertos y α-cerrados de X son $\emptyset$ y X.*

Demostración. (Suficiencia). Supongamos que existe un subconjunto A de X, $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$, tal que simultáneamente A es α-abierto y α-cerrado. Entonces, del teorema anterior, $C_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ es una función (α, i_d) continua y sobreyectiva, luego X no es un espacio α-conexo.

(Necesidad). Supóngase que X no es un espacio α- conexo, existe entonces una función $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ que es (α, i_d) continua y sobreyectiva. Usando el Lema 3.3, obtenemos que $A_0 = f^{-1}(\{0\})$ y $A_1 = f^{-1}(\{1\})$ son conjuntos α- abiertos en X, pero $f(X) = \{0, 1\}$. Así $\{A_0, A_1\}$ forman una partición de X y A_i, $i = 0, 1$, es un subconjunto propio no vacío de X el cual es simultáneamente α-abierto y α-cerrado. □

Introducimos ahora la noción de espacio α- semiconexo. Tales espacios son estudiados en forma más extensa en [5].

Definición 3.4. Sea (X, Γ, α). Decimos que X es un espacio α- semiconexo si los únicos subconjuntos de X que son simultaneamente α-semiabiertos y α-semicerrados son ϕ y X mismo.

Veamos ahora en los teoremas que siguen condiciones suficientes sobre el dominio y codominio los cuales permiten asegurar que una función f (α, β)-contra continua (resp. (α, β)-contra semicontinua) sea constante.

Teorema 3.6. *Sean $f : (X, \Gamma, \alpha) \longrightarrow (Y, \varphi, \beta)$, α un operador regular y $f : X \longrightarrow Y$ una función (α, β)-contra continua. Si X es un espacio α-conexo y Y es un espacio β-T_1, entonces f es una función constante.*

Demostración. Si Y es un espacio β-T_1 entonces por el Teorema 3.1, cada conjunto $\{y\}$, $y \in Y$, es β-cerrado. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es (α, β)-contra continua, X es un espacio α-conexo y que f no es una función constante, es decir, existen x_0, x_1 en X, $x_0 \neq x_1$, tales que $f(x_0) \neq f(x_1)$, entonces la colección $\mathcal{C} = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ es una partición de X por conjuntos α-abiertos y $|\mathcal{C}| \geq 2$. Bajo el supuesto que α es regular, la unión de α-abiertos es α-abierto y $\mathcal{C}$ contiene un subconjunto propio no vacío de X que es simultáneamente α-abierto y α-cerrado. Contradicción por que X es α-conexo. $\square$

Teorema 3.7. *Sean* $f : (X, \Gamma, \alpha) \longrightarrow (Y, \varphi, \beta)$, α *un operador monótono y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función* (α, β)*-contra semicontinua. Si* X *es un espacio* α*-semi conexo y* Y *es un espacio* β-T_1 *entonces* f *es una función constante.*

Demostración. Si Y es un espacio β-T_1, entonces cada conjunto unitario $\{y\}$, $y \in Y$, es β-cerrado. Supongamos $f : X \longrightarrow Y$ es (α, β)-contra semicontinua, X es un espacio α-semi conexo y que f no es una función constante, es decir que $f(x_0) \neq f(x_1)$ para ciertos puntos x_0, x_1 en X, $x_0 \neq x_1$, entonces $\mathcal{C} = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ es una partición de X por conjuntos α- semiabiertos y $|\mathcal{C}| \geq 2$. Como α es monótono, entonces la unión de conjuntos α-semi abiertos es α-semi abierto, de esta forma $\mathcal{C}$ contiene un subconjunto propio no vacío de X el cual es α-semi abierto y α-semi cerrado simultáneamente. Contradicción por que X es α-semi conexo. $\square$

4 Espacios Fuertemente α-S-Cerrados

Definición 4.1. Sea (X, Γ, α), entonces:

1. X se dice un espacio α-compacto (resp. α-semi compacto) si todo cubrimiento $\{V_i : i \in I\}$ de X por conjuntos abiertos (resp. α-semi abiertos) contiene una colección finita $\{V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_n}\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $X = \bigcup_{k=1}^{n} \alpha(V_{i_k})$ (resp. $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$).

2. X es α-S-cerrado si dado cualquier cubrimiento $\{V_i : i \in I\}$ de X por conjuntos α-semi regulares existe una subcolección finita $\{V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_n}\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$.

3. X es Fuertemente α-S-cerrado si todo cubrimiento $\{V_i : i \in I\}$ de X por conjuntos α-cerrados, contiene una subcolección finita $\{V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_n}\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, tal que $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$.

Observe que de la definición anterior sigue que

α-semi compacto $\Longrightarrow$ α-S-cerrado $\Longrightarrow$ Fuertemente α-S-cerrado.

En el siguiente teorema se recogen algunas relaciones entre las nociones descritas en la Definición 4.1 y la (α,β)-contra continuidad (resp. (α,β)-contra semi continuidad), para funciones sobreyectivas, las cuales generalizan los resutados aparecidos en [1].

Teorema 4.1. *Sea $f:(X,\Gamma,\alpha)\longrightarrow(Y,\varphi,\beta)$, una función sobreyectiva. Entonces:*

1. *Si f es (α,β)-contra semicontinua y X es α-semi compacto, entonces Y es un espacio fuertemente α-S-cerrado.*
2. *Si f es (α,β)-contra continua y X es compacto, entonces Y es un espacio fuertemente α-S-cerrado.*

Demostración. 1. Si $f:X\longrightarrow Y$ es una función (α,β)-contra semi continua, sobreyectiva y X es un espacio α-semi compacto, entonces dado cualquier cubrimiento $\{V_i : i\in I\}$ de Y por conjuntos β-cerrados tendremos que $\{f^{-1}(V_i) : i\in I\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos α- semi abiertos, ya que cada $f^{-1}(V_i)$ es α-semi abierto, en consecuencia existe una colección $\{f^{-1}(V_{i_k}) : k=1,2,\dots,n\}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, tal que $X=\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})$, lo que implica que

$$Y=f(X)=f\left[\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})\right]\subseteq\bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}.$$

Así, Y es fuertemente α-S-cerrado.

2. Sea $f:X\longrightarrow Y$ una función (α,β)-contra continua, sobreyectiva y X es compacto. Dado cualquier cubrimiento $\{V_i : i\in I\}$ de Y por conjunto β-cerrados, entonces $\{f^{-1}(V_i) : i\in I\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos α-abiertos, como todo conjunto α-abierto es abierto en X, entonces $\{f^{-1}(V_i); i\in I\}$ es un cubrimiento de X por abiertos y existe una cantidad finita $\{f^{-1}(V_{i_1}),\ f^{-1}(V_{i_2}),\dots,f^{-1}(V_{i_n})\}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, tal que $X=\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})$, en consecuencia $Y=f(X)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$, por lo tanto Y es fuertemente α-S-cerrado.

$\square$

Definición 4.2. Sea (X, Γ, α) un espacio. Un subconjunto A de X se dice que es α-fuertemente compacto relativo a X si todo cubrimiento A por conjuntos α- abiertos en X tiene un subcubrimiento finito. Si $A = X$, entonces X se dice α-fuertemente compacto.

Usando esta definición, obtenemos el siguiente teorema

Teorema 4.2. *Sean* (X, Γ, α), (Y, ψ, β) *dos espacios y* $f : X \longrightarrow Y$ *sobreyectiva. Si* f *es* (α, β)*-contra continua y* X *es fuertemente* α*-*S*-cerrado, entonces* Y *es* α*-fuertemente compacto.*

Definición 4.3. Sea $f : (X, \Gamma, \alpha) \longrightarrow (Y, \psi, \beta)$. Se dice que f es una función $\alpha\beta$-cerrada si la imagen de cualquier conjunto α-cerrado es β-cerrado.

Recordemos que si β es un operador sobre la topología Φ del conjunto Y, entonces la colección de todos los conjuntos β-abiertos es denotada por Γ_β. Si $|\Gamma_\beta| > 2$, entonces tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Sea* $f : (X, \Gamma, \alpha) \longrightarrow (Y, \psi, \beta)$ *sobreyectiva y* $|\Gamma_\beta| > 2$. *Si* f *es* (α, β)*-contra continua y* $\alpha\beta$*-cerrada, entonces* Y *no es* β*-conexo.*

Se puede notar fácilmente que si $|\Gamma_\beta| = 2$, la conclusión del teorema anterior es falsa. Para ver esto, tómese $f : X \longrightarrow Y$, donde X es cualquier espacio, α cualquier operador sobre X, Y consta de un punto, β el operador identidad que es el único que existe sobre Y y f la función constante. Bajo éstas conclusiones f es (α, β)-contra continua, es $\alpha\beta$-cerrada y sobreyectiva pero Y es β-conexo.

Referencias

[1] Dontchev, J., Noiri, T. *Contra semi continuous functions*, Math. Panonica **10**(2), 159–168.

[2] Kasahara, S. *Operation compact spaces*, Math. Japonica, **24**(1979), 97–105.

[3] Ogata, H. *Operation on topological spaces and associated topology*, Math. Japonica, **36**(1) (1991), 175–184.

[4] Rosas, E., Vielma, J. *Operator compact and operator connected spaces*, Scientiae Mathematicae, **1**(2) (1998), 203–208.

[5] Rosas, E., Vielma, J., Carpintero, C., *α-semi connected and locally α-semi connected properties in topological spaces.* Por aparecer en Scientiae Mathematicae Japonicae on line 2001.