Divulgaciones Matemáticas Vol. 9 No. 2(2001), pp. 207–214

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Este año Venezuela participó con mucho éxito en diversas competencias internacionales de resolución de problemas. La de mayor nivel fue la 42Ølimpíada Internacional de Matemáticas (IMO), celebrada en Washington del 1 al 14 de julio y a la cual asistieron 83 países. La delegación venezolana estuvo integrada por los estudiantes Adolfo Rodríguez, Paul Monasterios, Héctor Chang, Fernando Delgado y Henry Ipince, acompañados por los profesores Rafael Sánchez Lamoneda como jefe del equipo y Henry Martínez como tutor. En esta ocasión Adolfo Rodríguez obtuvo para Venezuela una medalla de plata, totalizando 28 puntos y quedando a solamente 2 puntos del corte para el oro. Además obtuvimos una medalla de bronce (Paul Monasterios) y una mención honorífica (Héctor Chang). Los problemas, de gran dificultad, fueron publicados con detalles adicionales y fotos en [1]. También pueden verse, con soluciones, en [4].

Unos pocos días después, del 23 al 30 de julio, se realizó la III Olimpíada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC) en Barranquilla, Colombia. Asistieron delegaciones de Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico y Venezuela. La delegación venezolana estuvo integrada por los estudiantes Héctor Chang, Paul Monasterios, María Virginia Amesty y quien esto escribe como jefe de la delegación. En esta oportunidad Venezuela quedó en primer lugar al totalizar 94 puntos, seguida de México (90), Colombia (85) y Cuba (83). Héctor Chang obtuvo medalla de oro y Paul Monasterios medalla de plata.

Del 22 al 30 de septiembre se realizó en Minas, Uruguay, la XVI Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas. Nuevamente Venezuela tuvo una excelente actuación, obteniendo tres medallas de plata (Héctor Chang, Fernando Delgado y Adolfo Rodríguez) y una de bronce (Paul Monasterios). Los problemas pueden verse en [3].

Venezuela participó también en algunas competencias matemáticas no presenciales. Entre ellas destacaremos la IV Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitaria, realizada el 6 de octubre y de la cual más abajo transcribimos los problemas planteados. Esta competencia tiene la particularidad de que los problemas pueden tener puntajes diferentes, según su grado de dificultad. Los participantes disponen de cinco horas para trabajar en siete problemas, y la puntuación que obtienen se calcula sumando los cuatro mejores puntajes obtenidos en cada problema.

Club de Olimpíadas Matemáticas en Internet. Para todos los interesados en las Olimpíadas Matemáticas y en los problemas que en ellas se plantean hemos creado un club en `http://groups.yahoo.com/group/olimat`

Referencias

[1] Sánchez, Rafael *La Esquina Olímpica*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **8**(1) (2001), 49–56.
Edición electrónica: `http://www.ma.usb.ve/~bol-amv/`

[2] Nieto, J. *Las Olimpíadas Matemáticas de CentroAmérica y el Caribe*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **8**(1) (2001), 43–48. Edición electrónica: `http://www.ma.usb.ve/~bol-amv/`

[3] Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), `http://www.campus.oei.org/oim`

[4] Wolfram Research, *The Official Scoring Site of the IMO 2001*, `http://imo.wolfram.com`

1 Problemas propuestos

48. (4 puntos) Las raíces de un polinomio de grado cuatro con coeficientes complejos están ubicadas en los vértices de un rectángulo con lados de longitud a y b en el plano complejo. Encontrar la distancia entre las raíces de la segunda derivada de este polinomio.

49. (5 puntos) Una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la desigualdad $|f(x)| \geq |f'(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y al menos para un x_0 esta desigualdad es estricta, es decir, $|f(x_0)| > |f'(x_0)|$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces.

50. (5 puntos) La suma (o diferencia simétrica) de dos conjuntos A y B se define como
$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
Inicialmente los 1024 subconjuntos de un conjunto de 10 elementos están escritos cíclicamente en una circunferencia. Simultáneamente entre cada dos subconjuntos vecinos se escribe su suma. Después todos los conjuntos anteriores se borran. ¿Cuáles conjuntos estarán escritos en la circunferencia después de repetir esta operación 2001 veces?

51. (5 puntos) Sea $\alpha > 0$ un número real y consideremos $x_1 < x_2 < \cdots$ las soluciones reales de la ecuación $x \operatorname{sen}(x^\alpha) = \log(x)$. Hallar los valores de α para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty} 1/x_n$ converge.

52. (6 puntos) Sea f una función del intervalo [0, 1] en el conjunto de números reales tal que para cualesquiera x, y en el intervalo [0, 1] se cumplen las siguientes condiciones:
(a) Si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.
(b) $f(0) = 0$.
(c) $f(1 - x) = 1 - f(x)$.
(d) $f(x/3) = f(x)/2$.

    Demostrar que si x es racional entonces $f(x)$ es racional.

53. (7 puntos) Calcular
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{\pi}{n}) \cos(\frac{2\pi}{n}) \cdots \cos(\frac{n\pi}{n}).$$

54. (8 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica tal que la desigualdad $f(x) > 0$ tiene por lo menos una solución.

(a) Demostrar que existe un entero $a \geq 2$ tal que el sistema infinito de desigualdades

$$f(xa^k) > 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

tiene por lo menos una solución

(b) Demostrar que existe un entero $b \geq 2$ tal que la cardinalidad del conjunto de soluciones del siguiente sistema infinito de desigualdades

$$f(xb^k) > 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

es igual al continuo, i.e., la cardinalidad del segmento [0, 1].

2 Soluciones

33. [**8**(2) (2000) p. 180]. Encontrar todos los números naturales de tres dígitos abc ($a \neq 0$) tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jsubocz@hotmail.com`).

100, 101, 105, 110, 134, 143, 150, 203, 230, 302, 314, 320, 341, 413, 431, 501, 510.

40. [**8**(2) (2000) p. 181]. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias, de centros O_1 y O_2 respectivamente, secantes en M y N. La recta t es la tangente común a S_1 y S_2, más cercana a M. Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2, C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM trazada por B. Demostrar que M, D y C están alineados.

Solución por Adolfo Rodríguez, estudiante.

Llamemos P al punto de corte de O_1O_2 con MN y Q al pie de la perpendicular desde B hasta AM (esta perpendicular corta a O_1O_2 en D por las condiciones del enunciado). Sean además T y R los puntos de corte de MN y AM con AB y BC respectivamente.

El eje radical de S_1 y S_2, MN, debe ser perpendicular a O_1O_2, entonces $\angle MPD = 90°$, y además por el enunciado, $\angle MQD = 90°$, entonces $MQDP$ es inscriptible; por lo tanto $\angle AMT = \angle PMQ = 180° - \angle PDQ = \angle QDO_2 = \angle BDO_2$.

Por otro lado, $\angle RBQ = \angle BAR$ (ya que en un triángulo rectángulo; el triángulo formado por dos de sus vértices y el pie de la altura con respecto a la hipotenusa es semejante al original. De los dos vértices que mencioné uno de ellos debe ser el de intersección de los dos catetos), entonces $\angle TAM = \angle BAR = \angle RBQ = \angle O_2BD$

Entonces hemos visto que $\angle AMT = \angle BDO_2$ y $\angle TAM = \angle O_2BD$ lo cual implica que los triángulos TAM y O_2BD son semejantes; entonces $AM/BD = TA/O_2B = (2TA)/(2O_2B) = AB/BC * *2.TA = AB$ porque el eje radical corta la línea de tangencia en su punto medio.

Por la proporción $AM/BD = AB/BC$ y por la igualdad $\angle TAM = \angle O_2BD$ se deduce que los triángulos CBD y BAM son semejantes entonces $\angle BCD = \angle ABM$.

Por otro lado $\angle BCM = \angle ABM$ porque ambos subtienden a BM, entonces $\angle BCM = \angle ABM = \angle BCD$ lo cual implica que M, C y D están alineados.

41. [**8**(2) (2000) p. 181]. Encontrar todas las soluciones de la ecuación.

$$(x+1)^y - x^z = 1 \qquad (*)$$

para x, y, z enteros mayores que 1.

Solución por Adolfo Rodríguez, estudiante.

Supongamos que (x, y, z) sea solución. Entonces $-x^z \equiv 1 \pmod{x+1}$, de donde $x^z \equiv -1 \pmod{x+1}$. Por lo tanto $(-1)^z \equiv -1 \pmod{x+1}$.

Si z es par entonces $1 \equiv -1 \pmod{x+1}$ y $(x+1)|2$, absurdo ya que $x+1 > 2$. Por lo tanto z es impar y

$$(x+1)^y = x^z + 1 = (x+1)(x^{z-1} - x^{z-2} + \cdots + x^2 - x + 1),$$

de donde

$$\begin{aligned}(x+1)^{y-1} &= x^{z-1} - x^{z-2} + \cdots + x^2 - x + 1 \\ &\equiv (-1)^{z-1} - (-1)^{z-2} + \cdots + (-1)^2 - (-1) + 1 \\ &\equiv 1 + \cdots + 1 \equiv z \pmod{x+1}.\end{aligned}$$

Entonces $(x+1)|z$ y como z es impar, $x+1$ debe ser también impar; por lo tanto x es par.

Por (*), $x^z = (x+1)^y - 1 = x\big((x+1)^{y-1} + (x+1)^{y-2} + \cdots + x + 1\big)$. Entonces $x^{z-1} = (x+1)^{y-1} + \cdots + x + 1 \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 \equiv y \pmod{x}$; por lo tanto $y \equiv 0 \pmod{x}$ y como x es par, y es también par. Podemos decir entonces que $y = 2q$ para cierto $q > 0$.

Entonces $(x+1)^{2q} - x^z = 1$ y $(-1)^{2q} - (-2)^z \equiv 1 \pmod{x+2}$, por lo tanto $(x+2)|2^z$. Lo que significa que $x+2$ es una potencia de 2, es decir, $x+2 = 2^m$ para cierto m tal que $1 < m \leq z$. De donde $x = 2^m - 2 = 2(2^{m-1} - 1)$ y (*) se transforma en: $(2^m - 1)^{2q} - (2^z)(2^{m-1} - 1)^z = 1$, luego

$$(2^z)(2^{m-1} - 1)^z = [(2^m - 1)^q + 1][(2^m - 1)^q - 1]. \qquad (**)$$

Ahora bien, $((2^m - 1)^q + 1)|(2^z)(2^{m-1} - 1)^z$, pero $(2^m - 1)^q + 1 = (2(2^{m-1} - 1) + 1)^q + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{2^{m-1} - 1}$, y como $2^{m-1} - 1$ es impar, $2^{m-1} - 1$ es coprimo con $(2^m - 1)^q + 1$. Por lo tanto $((2^m - 1)^q + 1)|2^z$, es decir que $(2^m - 1)^q + 1$ es una potencia de 2. Consideremos ahora dos casos:

Caso 1: q par: Entonces $(2^m - 1)^q + 1 \equiv (-1)^q + 1 \equiv 2 \pmod 4$. pero $(2^m - 1)^q + 1$ es una potencia de 2, por lo tanto es igual a 2. Pero esto es una contradicción ya que $m > 1$.

Caso 2: q es impar:

Entonces $(2^m - 1)^q - 1 \equiv (-1)^q - 1 \equiv -2 \equiv 2 \pmod 4$, por lo tanto la máxima potencia de 2 que divide a $(2^m - 1)^q - 1$ es 2. Por otro lado la máxima potencia de 2 que divide a $(2^m - 1)^q + 1$ es $(2^m - 1)^q + 1$ (ya que es una potencia de 2). Por lo tanto la máxima potencia de 2 que divide a $[(2^m - 1)^q + 1][(2^m - 1)^q - 1]$ es $2(2^m - 1)^q + 2$; además la máxima potencia de 2 que divide a $(2^z)(2^{m-1} - 1)^z$ es 2^z.

Entonces, por (**), $2^z = 2(2^m - 1)^q + 2$. Entonces

$$2^{z-1} = (2^m - 1)^q + 1 \qquad (* * *)$$

$\Longrightarrow 2(2^{m-1} - 1)^z = (2^m - 1)^q - 1$ (por (**))

$\Longrightarrow 2^{z-1} - 2(2^{m-1} - 1)^z = [(2^m - 1)^q + 1] - [(2^m - 1)^q - 1] = 2$

$\Longrightarrow 2^{z-2} = (2^{m-1} - 1)^z + 1 = (2^{m-1})(r^{z-1} - r^{z-2} + \cdots - r + 1)$, donde $r = (2^{m-1} - 1)$

$\Longrightarrow 2^{z-m-1} = r^{z-1} - r^{z-2} + \cdots - r + 1 \equiv z \equiv 1 \pmod 2$

Por lo tanto 2^{z-m-1} es impar, luego $2^(z - m - 1) = 1$.

$\Longrightarrow r^{z-1} - r^{z-2} + \cdots - r + 1 = 1$.

Si $r \geq 3$ entonces $r^{z-1} - r^{z-2} + \cdots - r + 1 >= 3^1 - 3^0 = 2 > 1$, por lo tanto $r = 1$. Entonces $2^{m-1} - 1 = 1$, de donde $m = 2$ y $x = 2^m - 2 = 4 - 2 = 2$.

Entonces (*) se transforma en $3^{2q} - 2^z = 1$.

Notemos que $3^{4k+2} = 9 \cdot 81^k \equiv 9 \cdot 1 \equiv 9 \pmod{16}$. Como q es impar, $2q$ es de la forma $4k+2$; por lo tanto $3^{2q} \equiv 9 \pmod{16}$, entonces $2^z \equiv 8 \pmod{16}$. De donde 8 divide a 2^z, pero 16 no. De aquí se deduce que $z = 3$ y por lo tanto $y = 2$.

Entonces ya hemos probado todos los casos obteniendo que la única solución es (2,2,3).

43. [**8**(2) (2000) p. 182]. Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo a las siguientes reglas:

1. En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4 o 5 piedras del montón.
2. En cada jugada se prohibe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

Pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida. Determinar cuál jugador tiene estrategia ganadora y encontrarla.

Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jsubocz@hotmail.com`).

Sea x un entero no negativo, a un entero tal que $0 \leq a \leq 5$. Definamos una *posición* como un par (x, a), donde x es el número de piedras que tiene el jugador que va a efectuar su movida y a es la cantidad de piedras retiradas por el adversario en su jugada inmediatamente anterior; $(x, 0)$ indica la posición inicial, en todo otro caso $a > 0$. Una posición es *mala* si no hay jugadas legales o si con cualquier jugada legal que hagamos el adversario puede a su vez llevarnos a otra posición mala. Una posición es *buena* si no es mala. La estrategia consiste, para el que tenga una posición buena, en dejar al adversario en una posición mala. Veamos las primeras posiciones malas:
Claramente $(0, a)$ es mala para $0 \leq a \leq 5$.

$(1, 1)$ es mala (Las demás $(1, a)$ son buenas).

$(2, a)$ es buena para cualquier a. La única posible mala sería $(2, 2)$, pero aquí tenemos la jugada (forzada): retirar una piedra, que gana inmediatamente.

Las siguientes posiciones malas son (3,3), (4,4) y (5,5). Por ejemplo la posicin (5,5) deja 4 posibles posiciones: (4,1), (3,2), (2,3) y (1,4), todas buenas.

(6,3) es mala, pues las posibles posiciones después de efectuar una jugada son (5,1), (4,2), (2,4) y (1,5), todas buenas.

$(7,a)$ es mala para cualquier a. En efecto (6,1), (5,2), (4,3), (3,4) y (2,5) son todas buenas.

Las posiciones $(8,a)$ son buenas para todo a. En efecto, podemos elegir dejar al adversario una de las posiciones malas (7,1) o (4,4), según lo que éste haya jugado.

$(9,a)$ y $(10,a)$ son buenas para todo a.

(11,4) es mala. (12,5) es mala. $(13,a)$ es mala para cualquier a. Continuando con este análisis, encontramos las próximas jugadas malas: (14,1), (16,3), (18,5), (19,3), (20,a), (21,1), (24,4), (25,5) y (26,7). De aquí por inducción podemos fácilmente probar que este último patrón se repite indefinidamente módulo 13.

Para $x \geq 13$ las jugadas malas son, tomando x módulo 13: $(0,a)$, (1,1), (3,3), (5,5), (6,3), $(7,a)$, (8,1), (11,4), (12,5). Así por ejemplo, con 2000 piedras, la posición equivale a (11,0) lo que permite al primer jugador sacar 4 piedras dejando la posición mala (7,4). En caso de que el primer jugador tenga una cantidad de piedras x de la forma $13k$, o $13k+7$, es el segundo jugador el que posee una estrategia ganadora.