Divulgaciones Matemáticas Vol. 10 No. 1(2002), pp. 85–89

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Los problemas que se proponen a continuación corresponden al nivel superior de la edición 2002 de la Olimpíada Bolivariana de Matemáticas. Esta competencia se realiza por correspondencia, en dos días consecutivos. Cada día los participantes disponen de tres horas y media para resolver tres problemas.

1 Problemas propuestos

55. Sean n y k enteros positivos distintos. Se considera un arreglo rectangular de $k \times n$, de modo que en la posición determinada por la fila i y la columna j se encuentra el número $i+j-1$, tal como se ve a continuación:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & k+1 & \cdots & n+k-1 \end{array}$$

Sea m la suma de los elementos del arreglo. Se sabe que m es una potencia entera de un número primo p.

(a) Demostrar que sólo existe un posible valor del número primo p.

(b) Determinar, con demostración, todos los posibles valores de n y k.

56. Sea $ABCD$ un cuadrado con centro en el punto O. Sea X el punto tal que $AOBX$ es un cuadrado y sean M, Y los puntos medios de los segmentos AB y OB, respectivamente. Sea S_1 la circunferencia que pasa por X, M e Y, S_2 la circunferencia que tiene centro C y radio igual a CM y S_3 la circunferencia con diámetro CX. Demostrar que las tres circunferencias S_1; S_2 y S_3 tienen un punto en común.

57. Se tiene una lista $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{21})$ de 21 números enteros positivos no necesariamente distintos entre sí. Se dice que la terna $[a_i, a_j, a_k]$ es una *escalera*, si $1 \leq i < j < k \leq 21$, y además $a_j = a_i + 1$ y $a_k = a_j + 1$. Sea $E(A)$ el número de escaleras de la lista A. Por ejemplo, si $A = (1, 2, 3, 21, 21, \ldots, 21)$, entonces se tiene únicamente la escalera $[a_1, a_2, a_3] = [1, 2, 3]$ y por lo tanto $E(A) = 1$. Si se consideran todas las listas posibles A, ¿cuál es el máximo valor de $E(A)$? Justifique su respuesta.

58. Sea $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ un polinomio cúbico, cuyos coeficientes a, b, c y d son números reales. Se sabe que existen cuatro enteros consecutivos, k, $k+1$, $k+2$ y $k+3$, tales que $P(k)$, $P(k+1)$, $P(k+2)$ y $P(k+3)$ son números enteros. Demostrar que, para cualquier entero m, $P(m)$ es un número entero.

59. Hallar el máximo valor del número real m, tal que sea cierta la siguiente afirmación:

Si a, b, c y d son números enteros positivos tales que,

$$c > d$$
$$a + b = c + d$$
$$ab = 2cd$$

entonces $c/d > m$.

60. Sea ABC un triángulo tal que el ángulo BAC mide 60°. Sean P y Q los pies de las perpendiculares trazadas desde A a las bisectrices internas de los ángulos ABC y BCA respectivamente. Dado que $BP = 104$ y $CQ = 105$, hallar el perímetro del triángulo ABC.

2 Soluciones

42. De una progresión aritmética infinita 1, a_1, a_2,... de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita 1, a_{n_1}, a_{n_2},... de razón q. Encontrar los posibles valores de q.

    Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (jsubocz@hotmail.com).

    Sea $b = a_1 - 1$, la razón de la progresión aritmética dada. Esta progresión se escribe: 1, $b+1$, $2b+1$, $3b+1$,...

    Supongamos que exista un tal q. Es fácil ver que entonces es necesario que $b > 0$ y $q > 1$.

    Consideremos los términos:

    1, $q = n_1 b + 1$, $q^2 = n_2 b + 1$.

    Vemos que $n_2/n_1 = (q^2-1)/(q-1) = 1+q$. Deducimos que q es racional, luego también b es racional. Pongamos $b = r/s$, con r, s primos entre sí.

    Se tiene $n_2 s = n_1(2s + rn_1)$, de donde $s|rn_1$, luego $s|n_1$, $s^2|n_2 s$, y $s|n_2$.

    Como $q = n_1 b + 1 = (n_1/s)r + 1$, deducimos que q es entero, $q \geq 2$.

    Ahora, sea q un entero, $q \geq 2$. Tomemos $n_1 = s = 1$, $r = q - 1$. Entonces, de la progresión aritmética 1, r, $2r$,..., teniendo en cuenta que $(q^i - 1)/(q-1) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{i-1}$, obtenemos

    $q = b + 1 = r + 1,$

    $q^2 = (b+1)^2 = (1+q)r + 1,$

    $q^3 = (b+1)^3 = (1+q+q^2)r + 1,$

    ....

    $q^i = (b+1)^i = (1+q+q^2+...+q^{i-1})r + 1.$

    lo que muestra que q es un valor posible.

45. [**8**(2) (2000) p. 180]. Hallar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfica sea un subconjunto denso de $\mathbb{R}^2$, o probar que tal función no existe.

    Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (jsubocz@hotmail.com).

    Tómese una base numerable de la topología de $\mathbb{R}^2$, y enumérense sus miembros: B_1, B_2, B_3,... Vamos a elegir un punto (x_i, y_i) en B_i, para cada i, de la manera siguiente: Elijamos un punto (x_1, y_1) en B_1, (*a* *piacere*). Para todo $k \geq 1$, una vez elegidos (x_1, y_1) en B_1,1, (x_2, y_2) en B_2,... (x_k, y_k) en B_k, elijamos (x_{k+1}, y_{k+1}) en $B(k+1)$, de manera que $x(k+1)$ no esté en $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ (asegurándonos así de que no haya repeticiones de x's). Cuando terminemos, sea $G = \{(x_i, y_i) : i \geq 1\}$ y $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección $(x, y) \mapsto x$. Claramente G es denso en $\mathbb{R}^2$ y G es el gráfico de la función $g : p(G) \to \mathbb{R}$, definida por $g(x_i) = y_i$. Ahora solamente queda extender g a todo $\mathbb{R}$, lo que podemos hacer ad libitum, obteniendo la función f pedida.

46. Hallar una función continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que para cada $x \in [0, 1]$ el conjunto $f^{-1}(x)$ sea infinito, o probar que tal función no existe.

    Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jsubocz@hotmail.com`).

    Sea $I = [0, 1]$. Es conocido que la curva de Peano (hay una contrucción clásica de la curva de Peano debida a Hilbert, ver [1, 3.3] "llena" el cuadrado unitario I^2, induciendo una función continua y sobre $g : I \to I^2$. Sea h la proyección canónica $(x, y) \mapsto x$ de I^2 en I. La composición $h \circ g$ es un ejemplo de la función pedida.

    Nota: la función $g : I \to I^2$ (sobre) puede hacerse continua y además diferenciable en casi todo punto, salvo en un conjunto de medida cero: el conjunto de Cantor, como se muestra en [1, 3.4 pp.135], y como h es diferenciable...

    [1] Hocking and Young, *Topología*, Editorial Reverté, 1975.

47. Hallar una función continua $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ tal que para cada $x \in [0, 1]$ el conjunto $f^{-1}(x)$ sea finito y tenga un número par de elementos, o probar que tal función no existe.

    Solución por Julio Subocz, Facultad de Ciencias, Universidad del Zulia (`jsubocz@hotmail.com`).

    Consideremos la sucesión de puntos del plano

    (-1, 0), (-1/2, 1), (-1/4, 1/2), (0, 1), (1/2, 1/4), (3/4, 1/2), (7/8, 1/8), (15/16, 1/4), (31/32, 1/16), (63/64, 1/8), (127/128, 1/32), (255/256, 1/16)...

    Esta sucesión define una gráfica que se obtiene uniendo mediante segmentos cada par de puntos consecutivos. Esta gráfica induce una función continua $f : [-1, 1] \to [0, 1]$, poniendo $f(1) = 0$.

Es fácil ver que si x está en [0,1], entonces

$$|f^{-1}(x)| = \begin{cases} 2, \text{para } x = 0,\ x = 1. \\ 4, \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Nota: un proverbio chino expresa que un dibujo dice más que mil palabras...

Figura elaborada por el editor: