Divulgaciones Matemáticas Vol. 11 No. 1(2003), pp. 71–82

La Geometría de las Normas del Espacio de las Funciones Continuas

The Geometry of the Norms of the Space of Continuous Functions

Arístides Arellán (aristide@ciens.ula.ve)
Jesús González (jesusmg@ciens.ula.ve)
Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Modern mathematics tends to obliterate history: each new school rewrites the foundations of its subject in its own language, which makes for fine logic but poor pedagogy.

R. Hartshorne

Resumen

El desarrollo último de la Matemática ha llegado a un punto tal de abstracción que los conceptos más básicos de las diferentes estructuras se presentan totalmente abstractos, ajenos a sus orígenes y viniendo muchos de estos conceptos de la geometría perdemos la esencia de estas ideas. El objetivo de este material es totalmente pedagógico y está destinado a llenar, o más bien recuperar, la geometría de los conceptos que aquí tratamos y que no vemos usualmente en los textos que tratan el tema.
Palabras y frases clave: Normas, funciones continuas, geometría.

Abstract

The recent development of mathematics has reached a level of abstraction such that the more basic concepts of the different structures are presented in a purely abstract way, far away from its origins, and although many of these concepts come from geometry, its essence is lost. The goal of these material is totally pedagogical; it is destined to fill, or better to recover, the geometry of the treated concepts, usually absent in the textbooks.
Key words and phrases: Norms, continuous functions, geometry.

Recibido 2002/12/15. Aceptado 2003/06/15.
MSC (2000): primary 46-01, Secondary 46E15, 51-01.

1 La norma $||f||_\infty$

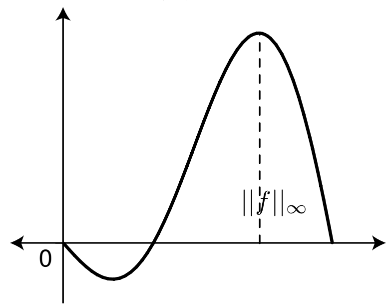
Denotaremos por $C_{[a,b]}$ el espacio de las funciones continuas

$$C_{[a,b]} = \{\ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} :\ f \text{ es una función continua } \}$$

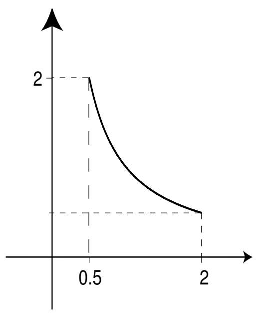
La función

$$||f||_\infty = \sup\{\ |\ f(x)\ | : x \in [a,b]\ \}$$

es una norma del espacio $C_{[a,b]}$, llamada la *norma del supremo*.
Geometría de la norma $||f||_\infty$: El número $||f||_\infty$ mide (o determina) la mayor abertura que tiene el gráfico de la función f respecto al eje de las abscisas, usando para ello la composición $|f|$:



Ejemplo 1.1 *En el espacio* $(C_{[\frac{1}{2},2]}, ||\cdot||_\infty)$ *consideramos la hipérbola básica* $f(t) = \dfrac{1}{t}$



La hipérbola es una función decreciente, su valor máximo lo realiza en el extremo $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Por lo tanto $||f||_\infty = f(\frac{1}{2}) = 2$ ....▼

Ejemplo 1.2 *En el espacio* $(C_{[0,1]}, ||\cdot||_\infty)$ *consideramos una función que depende de un parámetro:* $f(t) = \dfrac{nt}{n+t}$.

La derivada de la función f:

$$f'(t) = \frac{n^2}{(n+t)^2} > 0, \text{ para todo } 0 \leq t \leq 1.$$

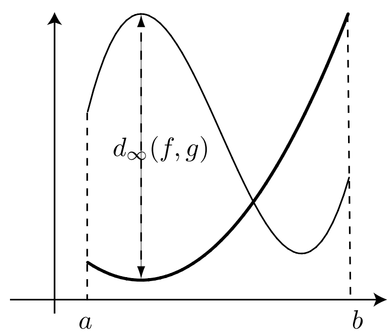
Como la derivada de la función es positiva entonces la función es creciente, f realiza su máximo en el extremo $x = 1$: $||f||_\infty = f(1) = \dfrac{n}{n+1}$ ....▼

La norma $||\ ||_\infty$ del espacio $C_{[a,b]}$ genera en el mismo conjunto la siguiente métrica:

$$d_\infty(f,g) = ||f-g||_\infty = \sup\{\ |\ f(x) - g(x)\ |\ : x \in [a,b]\ \}$$

La métrica d_∞, se llama la *métrica del supremo* en el espacio $C_{[a,b]}$.

El número $d_\infty(f,g)$ mide (o determina) la mayor abertura entre los gráficos de las funciones f y g:

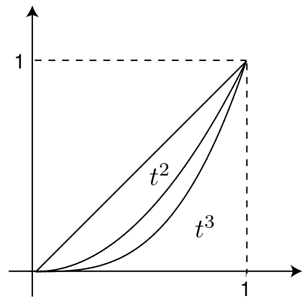


Ejemplo 1.3 *En el espacio métrico* $(C_{[0,1]}, d_\infty)$ *consideramos las siguientes funciones:*

$$f(t) = t, \quad g(t) = t^2, \quad h(t) = t^3 \quad y \quad q(t) = 0, \quad para \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Determinemos las siguientes distancias:

$$d_\infty(f,g),\ d_\infty(g,h)\ y\ d_\infty(h,q)$$

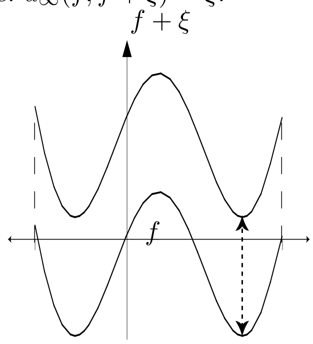


El número $d_\infty(f,g)$ mide la mayor abertura entre los gráficos de f y g. Para calcularlo debemos determinar el máximo de $\varphi(t) = |\ t - t^2\ | = t - t^2$ en el intervalo $[0,1]$. La derivada $\varphi'(t) = 1 - 2t$ se anula en el punto $t = \frac{1}{2}$. Luego, el máximo valor de la función φ es el número $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, así $d_\infty(f,g) = \frac{1}{4}$.

Para calcular $d_\infty(g,h)$ debemos determinar el máximo de la función $\varphi(t) = |\ t^2 - t^3\ | = t^2 - t^3$ en el intervalo $[0,1]$. La derivada $\varphi'(t) = 2t - 3t^2$ se anula $t = \frac{2}{3}$ y en $t = 0$. El máximo valor de la función φ se tiene en el número $\varphi(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$, así $d_\infty(g,h) = \frac{4}{27}$.

Por otra parte, la distancia de h hasta $q = 0$ es la norma que h, $||h||_\infty = d_\infty(h,q) = 1$. ....▼

Ejemplo 1.4 *Para cada función f del espacio $C_{[0,1]}$ y cada $\xi > 0$, se cumple que: $d_\infty(f, f+\xi) = \xi$.*



La función $f + \xi$ corresponde a subir el gráfico de f una cantidad de ξ unidades. Luego, la distancia entre los gráficos es exactamente ξ.

Por lo tanto $d_\infty(f, f+\xi) = \xi$ ....▼

2 La norma $||f||_1 = \int_a^b |f(x)| \ dx$

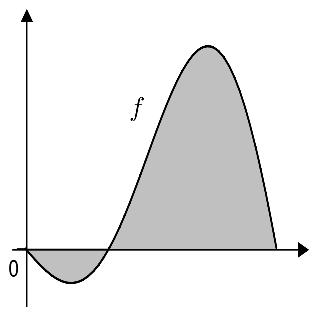
Otra norma muy usada en el espacio de las *funciones continuas* $C_{[a,b]}$ es la función:

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)| \ dx$$

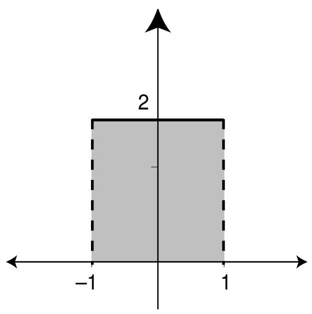
Geometría de la norma $||f||_1$: Para una función f del espacio $C_{[a,b]}$, la integral

$$\int_a^b |f(x)| \ dx$$

el número $||f||_1$ representa el área de la región acotada por el gráfico de la función f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de las abscisas.



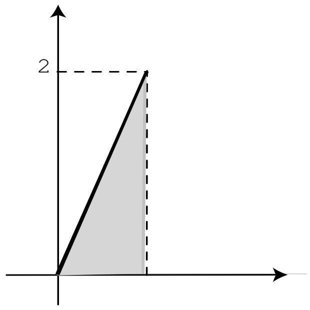
Ejemplo 2.1 *Para la función constante $f(x) = 2$ del espacio $C_{[-1,1]}$, se tiene que la norma $||f||_1 = 4$.*



La región encerrada por el gráfico de f, las rectas $x = -1$, $x = 1$ y el eje X es un rectángulo de base 2 y altura 2, el área de la región acotada es 4.

Por lo tanto $||f||_1 = 4$ .... ▼

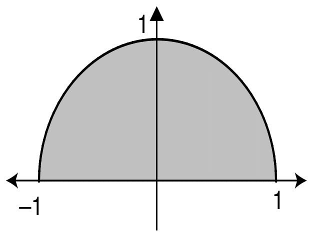
Ejemplo 2.2 *Para la función* $f(x) = \frac{x}{2}$ *del espacio* $C_{[0,2]}$*, se tiene que la norma* $||f||_1 = 1$*.*



La región acotada por el gráfico de f, las rectas $x = 0$, $x = 2$ y el eje de las abscisas es un triángulo de base 1 y altura 2, el área de la región acotada es $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$.

Por lo tanto $||f||_1 = 1$ .... ▼

Ejemplo 2.3 *Para la función* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *del espacio* $C_{[-1,1]}$*, se tiene que la norma* $||f||_1 = \frac{\pi}{2}$*.*

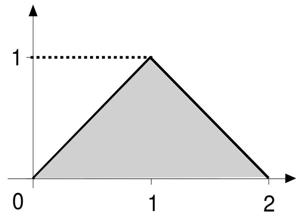


La región determinada por el gráfico de la función f, las rectas $x = -1$, $x = 1$ y el eje es un semicírculo de radio 1, el área de la región acotada es $||f||_1 = \frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto $||f||_1 = \frac{\pi}{2}$ .... ▼

Ejemplo 2.4 *En el espacio* $C_{[0,2]}$*, para la función*

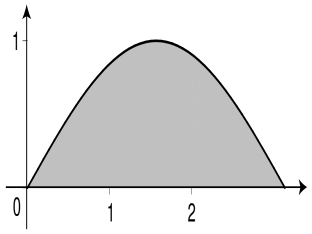
$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{para } x \textit{ en } [0,1]; \\ -x+2, & \textit{para } x \textit{ en } [1,2]. \end{cases}$$



La región determinada por el gráfico de la función f, las rectas $x = 0$, $x = 2$ y el eje Ox es un triángulo de base 2 y altura 1. El área de la región acotada es $\dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

Por lo tanto $||f||_1 = 1$ .... ▼

Ejemplo 2.5 *Para la función $f(x) = \sin(x)$ del espacio $C_{[0,\pi]}$, se tiene que la norma $||f||_1 = \frac{\pi}{2}$.*



El área de la región indicada viene dada por la integral

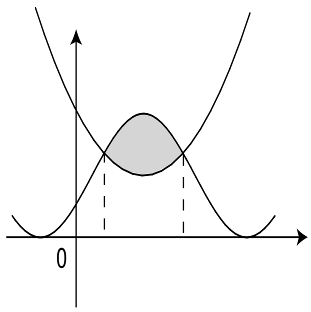
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\ dx$$

Por lo tanto $||f||_1 = 2$ .... ▼

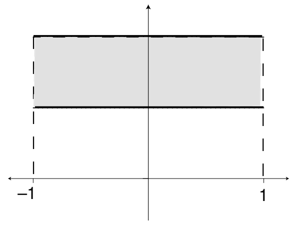
La norma $||\cdot||_1$ genera en $C_{[a,b]}$ la siguiente métrica:

$$d_1(f,g) = ||f-g||_1 = \int_a^b \mid f(x) - g(x) \mid \ dx$$

La métrica d_1 representa el área de la región acotada por los gráficos de las funciones f y g y por las rectas $x = a$ y $x = b$.

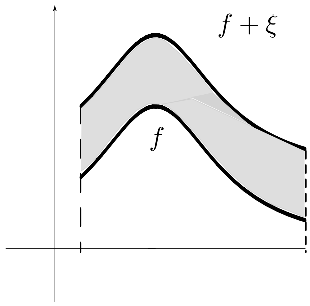


Ejemplo 2.6 *Para las funciones $f(x) = 2$ y $g(x) = 3$ del espacio $C_{[-1,1]}$, se tiene que la distacia $d_1(f,g) = 6$.*



La región acotada por los gráficos de las funciones f y g, es un rectángulo de base 2 y altura 1, el área de la región es 2: $d_1(f, g) = 2$ ....▼

Ejemplo 2.7 *Para una función f del espacio $C_{[a,b]}$ y un número $\xi > 0$, la distancia $d_1(f, f + \xi) = \xi \cdot (b - a)$.*

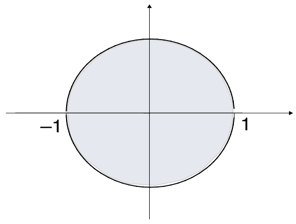


Área de la región:

$$\int_a^b |f(x) + \xi - f(x)| \, dx$$

Luego, $d_1(f, f + \xi) = \xi \cdot (b - a)$ ..▼

Ejemplo 2.8 *Para las funciones $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ del espacio $C_{[-1,1]}$, se tiene que la distancia $d_1(f, g) = \pi$.*



La región determinada por los gráficos de las dos funciones es un circulo de radio 1, luego el área es $d_1(f, g) = \pi$

Por lo tanto $d_1(f, g) = \pi$ ....▼

3 La norma $||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \ dx}$

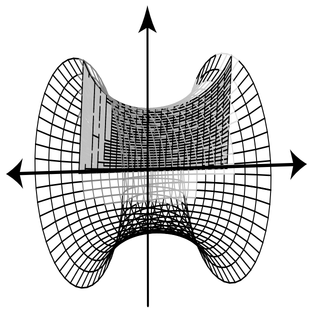
Otra norma del espacio de las *funciones continuas* $C_{[a,b]}$ es la función:

$$||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \ dx}$$

Geometría de la norma: Para una función f del conjunto $C_{[a,b]}$, la integral

$$\int_a^b \pi \, |f(x)|^2 \ dx$$

representa el volumen de la sólido que se genera al rotar la región determinada por el gráfico de f, las rectas $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje de abscisas.



La función $v : C_{[a,b]} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$v(f) = \int_a^b \pi \, |f(x)|^2 \ dx$$

cumple con todas las propiedades de una norma a excepción de la propiedad:

$$||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \tag{1}$$

Ahora, tomando la raíz de la integral:

$$v_2(f) = \sqrt{\int_a^b \pi \, |f(x)|^2 \ dx}$$

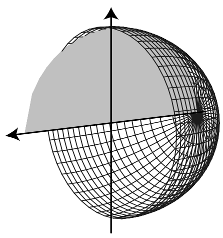
v_2 cumple con la propiedad 1 y las restantes propiedades de una norma, así v_2 es una norma del espacio $C_{[a,b]}$.

Por otra parte, es conocido que si N es una norma de un espacio X, entonces $\alpha \cdot N(x)$ también es una norma de X, para $\alpha > 0$, de lo anterior se obtiene que $||\cdot||_2$ es una norma del espacio de las *funciones continuas* $C_{[a,b]}$, y esta norma tiene la siguiente propiedad: para cada función continua $f \in C_{[a,b]}$, el número

$$\pi \cdot ||f||_2^2$$

es el volumen de la región acotada por el gráfico de f, el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$, cuando la giramos alrededor del eje de la abscisas.

Ejemplo 3.1 *Para la función* $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ *del espacio* $C_{[-r,r]}$, *se tiene que la norma* $||f||_2 = \dfrac{2r\sqrt{r}}{\sqrt{3}}$.

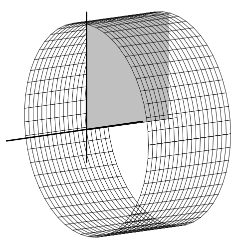


Cuando giramos la región que determina esta función f, alrededor del eje, se genera la esfera de radio r. El volumen de una esfera de radio r está dado por el número $\frac{4\pi r^3}{3}$. Luego,

$$\pi||f||_2^2 = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Por lo tanto $||f||_2 = \dfrac{2r\sqrt{r}}{\sqrt{3}}$ .... ▼

Ejemplo 3.2 *Para* $r > 0$ *y la función constante* $f(x) = r$ *del espacio* $C_{[0,h]}$, *se tiene que la norma* $||f||_2 = r \cdot \sqrt{h}$.

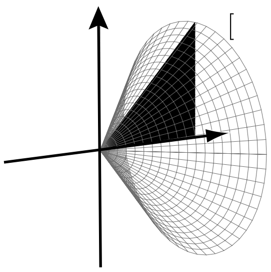


Cuando giramos la región alrededor del eje de las abscisas se genera el cilindro circular recto de radio r y altura h. El volumen del cilindro está dado por el número $\pi r^2 h$. Luego,

$$\pi||f||_2^2 = \pi r^2 h$$

Por lo tanto $||f||_2 = r \cdot \sqrt{h}$ .... ▼

Ejemplo 3.3 *Para la función constante* $f(x) = x$ *del espacio* $C_{[0,r]}$*, se tiene que la norma* $||f||_2 = \dfrac{r\sqrt{r}}{\sqrt{3}}$.



Cuando giramos la región alrededor del eje de las abscisas se genera el cono circular recto de radio r y altura r. El volumen del cono está dado por el número $\pi\frac{r^3}{3}$. Luego,

$$\pi||f||_2^2 = \pi\frac{r^3}{3}$$

Luego, $||f||_2 = \frac{r\sqrt{r}}{\sqrt{3}}$ .... ▼

La norma $||\cdot||_2$ genera la siguiente distancia en el espacio $C_{[a,b]}$:

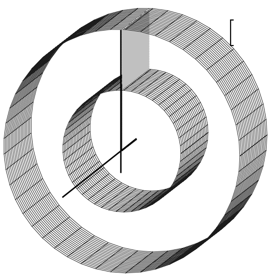
$$d_2(f,g) = ||f-g||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|dx}$$

De manera similar a la norma, la métrica cumple con la propiedad de que el número

$$\pi \cdot d_2(f,g)^2$$

es el volumen del sólido que se genera al girar la región determinada por las funciones f y g alrededor del eje de las abscisas.

Ejemplo 3.4 *Para las funciones constantes* $f(x) = 1$ *y* $g(x) = 2$ *del espacio* $C_{[0,h]}$*, se tiene que la distancia* $d_2(f,g) = \sqrt{3}h$.



Cuando giramos la región determinada por las funciones alrededor del eje de las abscisas se genera el cono circular recto hueco, de radio externo

2, radio interno 1 y altura h. El volumen de este cilindro viene dado por el número $3\pi h$. Luego,

$$\pi d_2^2(f,g) = 3\pi h$$

Luego, $d_2(f,g) = \sqrt{3}h$ .... ▼