Divulgaciones Matemáticas Vol. 11 No. 2(2003), pp. 161–166

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: José Heber Nieto (jhnieto@luz.ve)
Departamento de Matemática, Facultad Exp. de Ciencias
Universidad del Zulia, Apartado Postal 526
Maracaibo. Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor, en español o inglés, a la dirección arriba indicada. También pueden enviarse por correo electrónico, preferiblemente como un archivo fuente en LaTeX. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be sent to the editor, in Spanish or English, to the address given above. They may also be sent by e-mail, preferably as a LaTeX source file. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

Durante los días 26 y 27 de agosto se realizó en Costa Rica la V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe, dirigida a estudiantes de la región que no tuviesen 16 años cumplidos al 31/12/2002 y que no hubiesen participado en olimpíadas internacionales (IMO) o iberoamericanas. Los problemas 73 al 78 son los propuestos en dicha competencia.

1 Problemas propuestos

73. Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

74. Sea S una circunferencia y AB un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con AC y AD y sean G y H las intersecciones de S con CF y DE. Demostrar que $AH = AG$.

75. Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

76. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas, tales que:

    i. ℓ_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.

    ii. ℓ_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.

    Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

77. Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

78. Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

    i. Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \cdots, 2003N$, son todos *ticos*.

    ii. ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

79. *Propuesto por Ernesto Bruno Cossi, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.*

    a) ¿Existe algún espacio normado real cuya norma no provenga de un producto interno y que satisfaga las propiedades (1), (2) y (3) para vectores no nulos u, v cualesquiera?

    (1) $\frac{\left|\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right|}{4\|u\|\|v\|} \leq 1$.

    (2) $\frac{\left|\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right|}{4\|u\|\|v\|} = 1$ implica $u = \lambda v$ para algún real $\lambda \neq 0$.

(3) Si se define el ngulo $\varphi(u,v)$ mediante $\cos(\varphi(u,v)) = \frac{\|u+v\|^2-\|u-v\|^2}{4\|u\|\|v\|}$, $0 \leq \varphi(u,v) \leq \pi$, entonces $\varphi(\alpha u,v) = \varphi(u,v)$ para todo real $\alpha > 0$.

b) Dé un ejemplo de un espacio normado real que no satisfaga al menos una de las propiedades (1), (2) y (3) de la parte a).

2 Soluciones

32. [**8**(2) (2000) p. 180.] Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de $n \times n$, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna es igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo puede haber uno o dos números diferentes de cero.

Solución por el Editor. Sean $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos permutaciones de los números del 1 al n. Coloquemos en la fila i del tablero un 1 en la columna a_i y un 2 en la b_i si $a_i \neq b_i$, o un 3 en la columna a_i si $a_i = b_i$, rellenando el resto de la fila con ceros. Es fácil ver que la matriz obtenida cumple la condición del problema, y que así pueden obtenerse todas las formas válidas de llenar el tablero. Por lo tanto la respuesta es $(n!)^2$.

Nota: También resuelto por Ignacio Larrosa Cañestro.

38. [**8**(2) (2000) p. 181.] Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de n.

a) Escriba las 5 representaciones buenas de 10.

b) ¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

Solución por el Editor.

(a) $8+2$, $8+1+1$, $4+4+2$, $4+4+1+1$, $4+2+2+1+1$.

(b) Sea $b(n)$ el número de representaciones buenas (r.b.) del entero n y sea $a(n)$ el número de r.b. de n que no incluyen el 1. A cada r.b. de n se le puede hacer corresponder una r.b. de $2n$ sin unos, multiplicando por 2 todos los sumandos. Es claro que esta correspondencia es una biyección y por lo tanto $a(2n) = b(n)$. Las r.b. de un impar $2n+1$ deben incluir un 1, y lo demás es una r.b. de $2n$ sin unos, por lo tanto $b(2n+1) =$

$a(2n) = b(n)$. Las r.b. de $2n$ pueden incluir dos unos o ninguno, de donde se deduce fácilmente que $b(2n) = a(2n-2) + a(2n) = b(n-1) + b(n)$.

Con las dos relaciones de recurrencia $b(2n+1) = b(n)$ y $b(2n) = b(n-1)+b(n)$ pueden calcularse fácilmente los primeros valores de la sucesión b: $b(1) = 1$, $b(2) = 2$, $b(3) = 1$, $b(4) = 3$, $b(5) = 2$, $b(6) = 3$, $b(7) = 1$, $b(8) = 4$, $b(9) = 3$, $b(10) = 5$, $b(11) = 2$. A partir de estos valores se puede conjeturar que $b(n)$ es par si y sólo si n es de la forma $3k + 2$. Probemos esto por inducción. Es claro que es cierto para los enteros del 1 al 11. Supongamos que es cierto para los enteros menores que $3k$ y vamos a probarlo para $3k$, $3k+1$ y $3k+2$. Distingamos dos casos, según que k sea par o impar.

Si $k = 2r$ entonces $b(3k) = b(6r) = b(3r) + b(3r-1)$ es impar más par, por lo tanto impar. $b(3k+1) = b(6r+1) = b(3r)$ es impar, y $b(3k+2) = b(6r+2) = b(3r) + b(3r+1)$ es par (suma de dos impares).

Análogamente si $k = 2r + 1$ entonces $b(3k) = b(6r+3) = b(3r+1)$ es impar, $b(3k+1) = b(6r+4) = b(3r+1) + b(3r+2)$ es impar, y $b(3k+2) = b(6r+5) = b(3r+2)$ es par.

Nota: También resuelto por Ignacio Larrosa Cañestro.

56. [**10**(1) (2002) p. 86]. Sea $ABCD$ un cuadrado con centro en el punto O. Sea X el punto tal que $AOBX$ es un cuadrado y sean M, Y los puntos medios de los segmentos AB y OB, respectivamente. Sea S_1 la circunferencia que pasa por X, M e Y, S_2 la circunferencia que tiene centro C y radio igual a CM y S_3 la circunferencia con diámetro CX. Demostrar que las tres circunferencias S_1; S_2 y S_3 tienen un punto en común.

Solución por Ignacio Larrosa Cañestro, A Coruña, España. Sea S el simétrico de M respecto de B, que está sobre S_2, pues $CB \perp MB$. S también es el simétrico de A respecto de M', punto medio de M y B. Llamando Y' al punto en que el segmento CX corta a OB, vemos que los triángulos $Y'BX$ y OCY' son congruentes, pues $BX = OC$, por lo que $Y' = Y$, y es el centro de S_3. Como $AM \perp YM$, el punto S también se encuentra en S_3.

Por otra parte, la mediatriz del segmento MY corta a la mediatriz de XM en O' centro de S_1, y corta a la prolongaciún del lado CB en un punto O'', tal que $O''B = BM''$. Pero $BM'' = MX/2$, por lo que $O' = O''$.

Entonces, como $O'B \perp BM$, el punto S también está sobre S_1, estando por tanto S en las tres circunferencias.

60. [**10**(1) (2002) p. 86]. Sea ABC un triángulo tal que el ángulo BAC mide $60°$. Sean P y Q los pies de las perpendiculares trazadas desde A a las bisectrices internas de los ángulos ABC y BCA respectivamente. Dado que $BP = 104°$ y $CQ = 105°$, hallar el perímetro del triángulo ABC.

Solución por Wilson Pacheco, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela. Llamemos a, b y c a los lados opuestos a los vértices A, B y C respectivamente. Denotemos por $2p$ al perímetro del triángulo, es decir, $2p = a + b + c$. Sean R y S los puntos donde las rectas CQ y BP cortan respectivamente a la paralela al lado BC que pasa por el punto A. Entonces los triángulos BAS y CAR son isósceles, con $BA = AS = c$ y $CA = AR = b$, en particular $SR = SA + AR = b + c$. Por otro lado P y Q son los puntos medios de las diagonales del trapecio $BRSC$, con lo que $PQ = (SR - BC)/2 = (b + c - a)/2 = p - a$.

Sea I el punto de intersección de CQ con BP. Entonces $\angle BIC = 120°$, ya que la mitad de la suma de los ángulos en B y C del triángulo ABC es $60°$. Denotemos por x al segmento PI y por y al segmento QI. Como los triángulos RIS y BIC son semejantes, sus lados son paralelos, se tiene $RI/BI = RS/BC$, de donde $(104 + x)/(104 - x) = (b + c)/a$, o equivalentemente $(104+x)a = (104-x)(b+c)$. Despejando x se obtiene $x = 104(b + c - a)/(a + b + c) = 104 \cdot 2(p - a)/(2p) = 104(p - a)/p$. De manera análoga usando que $SI/CI = RS/BC$ se obtiene $y = 105(p - a)/p$.

Ahora, en el triángulo PQI sabemos que $\angle PIQ = 120°$, con lo que por la ley del coseno $PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(120°) = x^2 + y^2 + xy$. Al sustituir los valores de x, y y PQ queda

$$(p-a)^2 = \left(\frac{104(p-a)}{p}\right)^2 + \left(\frac{105(p-a)}{p}\right)^2 + \left(104 \cdot 105 \frac{(p-a)}{p}\right)^2,$$

de donde $p = \sqrt{104^2 + 105^2 + 104 \cdot 105} = 181$ y $2p = 362$.

Nota: También resuelto por Ignacio Larrosa Cañestro.

64. [**10**(2) (2002) p. 182]. Sean ABC un triángulo, D el punto medio de BC, E un punto sobre el segmento AC tal que $BE = 2AD$ y F el punto de intersección de AD con BE. Si el ángulo DAC mide $60°$, encuentre la medida de los ángulos del triángulo FEA.

Solución por Ignacio Larrosa Cañestro, A Coruña, España.

El simétrico G del punto A respecto al D define con B una recta paralela al lado AC. Como las longitudes de los segmentos AG y EB son iguales a $2AD$, estos segmentos forman el mismo ángulo con las paralelas AC y BG. Por tanto el ángulo $\angle FEA$ también es de $60°$ y el triángulo FEA es equilátero.

67. [**11**(1) (2003) p. 83]. Una pareja de números enteros positivos (a, b) se llama *mágica* si se cumple que 1 es divisor de b, 2 es divisor de $b+1$, 3 es divisor de $b+2$, y así sucesivamente, hasta $(a+1)$ es divisor de $(b+a)$.

   (a) Probar que la pareja $(a, 1)$ es mágica para todo entero positivo a.

   (b) Probar que para todo entero positivo a existen infinitos números enteros positivos b tales que la pareja (a, b) es mágica.

   (c) Dado un entero positivo a, encontrar todos los enteros positivos b tales que la pareja (a, b) es mágica.

Solución por Wilson Pacheco, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela. Si a es un entero positivo, sea $m_a = mcm\,\{1, 2, \ldots, a, a+1\}$.

Lema: (a, b) es mágica si y sólo si $b-1$ es múltiplo de m_a.

Prueba Si $b-1$ es múltiplo de m_a entonces para todo k con $1 \le k \le a+1$ se tiene que $b-1$ es múltiplo de k, luego $b+k-1 = (b-1)+k$ también es múltiplo de k, con lo que (a, b) es mágica. Por otro lado, si (a, b) es mágica entonces para todo k con $1 \le k \le a+1$ se tiene que $b+k-1$ es múltiplo de k. Luego $b-1 = b+k-1-k$ también es múltiplo de k, con lo que $b-1$ es múltiplo de m_a.

Respuestas:

a) Si $b = 1$ entonces $b-1 = 0 = 0 \cdot m_a$, con lo que $(a, 1)$ es mágica para todo a.

b) y c) Por el Lema los b para los cuales (a, b) es mágica son los de la forma $1 + km_a$ con $k = 0, 1, 2 \ldots$.