Homology, Homotopy and Applications, vol.5(1), 2003, pp.437–547

BICATÉGORIES MONOIDALES ET EXTENSIONS DE GR-CATÉGORIES

ALAIN ROUSSEAU

(*communicated by Antonio Cegarra*)

Abstract

In this work, we study the 2-category $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ of extensions of a *gr*-category $\underline{\mathcal{K}}$ by a *gr*-category $\underline{\mathcal{G}}$. Such an extension consists of a *gr*-category $\underline{\mathcal{H}}$, an essentially surjective homomorphism $p : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ and a monoidal equivalence $q : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow N(p)$ where $N(p)$ is the *homotopy kernel* of the homomorphism p. The main result is a classification theorem which constructs a biequivalence between the 2-category $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})^{op}$ and the bicategory $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}}))$ of monoidal bicategory homomorphisms between $\underline{\mathcal{K}}$ and $\underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}})$, where $\underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}})$ is the monoidal bicategory of biequivalences of $\underline{\mathcal{G}}$ with itself.

1. Introduction

Une *gr*-catégorie ou groupe catégorique est un groupoïde muni d'une loi de groupe c'est-à-dire une catégorie monoïdale dont les flèches sont des isomorphismes et dont les objets sont quasi-inversibles. L'exemple le plus simple est celui de la *gr*-catégorie discrète $H[0]$ associée à un groupe H dont les objets sont les éléments de H, cas particulier de la *gr*-catégorie stricte $\mathcal{C}(\delta)$ associée à un module croisé $\delta : G \longrightarrow H$. Un cas de *gr*-catégorie non stricte est obtenu avec un groupe K, un groupe abélien A muni d'une structure de K-module et un 3-cocycle $\omega \in \mathbf{Z}^3(K, A)$, ce dernier définissant une contrainte d'associativité sur la $\otimes$-catégorie obtenue avec le module croisé trivial $0 : A \longrightarrow K$, [**33**]. Ce cas est générique. Pour $\underline{\mathcal{H}}$ une *gr*-catégorie, l'ensemble $\pi_0(\underline{\mathcal{H}})$ des classes d'isomorphisme d'objets de $\underline{\mathcal{H}}$ est un groupe, le groupe abélien $\pi_1(\underline{\mathcal{H}}) := \mathrm{Aut}(I)$ des automorphismes de l'objet unité de $\underline{\mathcal{H}}$ est un $\pi_0(\underline{\mathcal{H}})$-module, la condition de cohérence de l'associativité du produit dans $\underline{\mathcal{H}}$ donne un 3-cocycle de $\pi_0(\underline{\mathcal{H}})$ à valeur dans $\pi_1(\underline{\mathcal{H}})$. La *gr*-catégorie obtenue comme dans l'exemple cité plus haut avec ce $\pi_0(\underline{\mathcal{H}})$-module $\pi_1(\underline{\mathcal{H}})$ et ce 3-cocycle est alors monoïdalement équivalente à $\underline{\mathcal{H}}$, [**35**]. Pour un groupe abélien A muni d'une structure de K-module, H. X. Sinh obtient ainsi que le troisième groupe de cohomologie $\mathbf{H}^3(K, A)$ détermine à équivalence près, les *gr*-catégories $\underline{\mathcal{H}}$ dont les groupes π_0 et

Received September 1, 2003, revised October 13, 2003; published on November 22, 2003.
2000 Mathematics Subject Classification: 18-02, 18D05, 18D10, 18G50.
Key words and phrases: *gr*-catégory, extension, monoïdal bicatégory, torsor, bitorsor, nonabelian cohomology.
© 2003, Alain Rousseau. Permission to copy for private use granted.

le π_1 sont donnés à isomorphisme près par K et A, ce qui donne la classification des classes d'équivalence d'extensions de gr-catégories du type

$$1 \longrightarrow A[1] \xrightarrow{r} \underline{\mathcal{H}} \xrightarrow{p} K[0] \longrightarrow 1, \tag{1.0.1}$$

où $A[1]$ est la gr-catégorie associée au module croisé $A \longrightarrow 0$. L'objet de ce travail est d'étudier le cas général. Pour $\underline{\mathcal{G}}$ et $\underline{\mathcal{K}}$ deux gr-catégories quelconques, on cherche donc à classifier la 2-catégorie $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ des extensions de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$,

$$1 \longrightarrow \underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{r} \underline{\mathcal{H}} \xrightarrow{p} \underline{\mathcal{K}} \longrightarrow 1. \tag{1.0.2}$$

Un cas bien connu est celui obtenu lorsque toutes les gr-catégories considérées sont discrètes c'est-à-dire celui des classes d'extensions de groupes,

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{r} H \xrightarrow{p} K \longrightarrow 1. \tag{1.0.3}$$

Pour $G = A$ un groupe abélien, on sait depuis [**16**] que l'ensemble classifiant est donné par le second groupe de cohomologie $\mathbf{H}^2(K, A)$ où A est muni de la structure de K-module définie par la conjugaison dans H. Lorsque G est un groupe quelconque, la classification est connue depuis O. Schreier [**34**]. Une section ensembliste de l'homomorphisme p de (1.0.3) définit un cocycle de Schreier, soit, un couple d'applications $(\theta : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(G),\ \chi : K \times K \longrightarrow G)$ vérifiant certaines conditions de cohérence. Ce cocycle détermine à équivalence près le groupe H et l'ensemble des classes d'extensions de K par G est alors en bijection avec ce qu'il est convenu à présent d'appeler le $\mathbf{H}^2$ non abélien de K à valeur dans G. Une généralisation des classifications précédentes a été obtenue par L. Breen dans [**3**]. Pour une gr-catégorie $\underline{\mathcal{G}}$ quelconque et un groupe K fixés, L. Breen décrit en des termes cohomologiques les classes d'extensions du type :

$$I \longrightarrow \underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{r} \underline{\mathcal{H}} \xrightarrow{p} K[0] \longrightarrow I. \tag{1.0.4}$$

Les cocycles obtenus sont à valeur dans le ˝carré croisé˝ $i : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}\mathrm{q}(\underline{\mathcal{G}})$ associé à la gr-catégorie $\underline{\mathcal{G}}$, généralisation du module croisé défini pour un groupe G par l'homomorphisme de conjugaison intérieure $i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$. Lorsque la gr-catégorie $\underline{\mathcal{K}}$ n'est plus supposée discrète, des classifications ont été obtenues dans des cas où des hypothèses de commutativité sont prises pour la gr-catégorie $\underline{\mathcal{G}}$. Dans [**7**], P. Carrasco et A.M. Cegarra ont classifié les extensions centrales, cas particulier de la classification des extensions singulières obtenue par la suite dans [**8**] par P. Carrasco, A. R. Garzon et J. G. Miranda. Citons pour finir le cas des $\mathcal{F}$-extensions traité par D. Bourn et E. M. Vitale [**4**].

Les résultats de classification obtenus pour de telles questions s'expriment le plus souvent en des termes cohomologiques [**29, 35, 11, 3, 7, 8, 10, 4, 9**, ...]. L. Breen avait remarqué, au vu de la nature compliquée de ses cocycles, qu'il ne serait guère possible de poursuivre actuellement dans cette direction pour les dimensions supérieures sans une formulation maniable de ce qu'est une n-catégorie (voir par exemple [**25**]). Pour définir les ensembles de cohomologie non abélienne de degré supérieur à 3 et à valeur dans un groupe G [**3**, §4.3], il choisit le contexte topologique plutôt que le contexte n-catégorique. On dispose en effet dans le cadre topologique d'un résultat très général pour le problème de la classification des fibrations sur

un CW-complexe Y, de fibres homotopiquement équivalentes à un espace X. De telles fibrations sont classifiées par l'ensemble $[Y, B(\mathcal{E}(X))]_{pt}$ des classes d'homotopie d'applications continues pointées de l'espace Y vers l'espace classifiant du monoïde $\mathcal{E}(X)$ des auto-équivalences d'homotopie de X. Les résultats obtenus dans le travail qui suit, montrent que l'on peut s'attendre à un énoncé de nature similaire dans un contexe purement n-catégorique qui, dans le cas présent, est celui des tricatégories et surtout de leurs homomorphismes lâches dont les définitions apparaissent dans [**17**].

Le cas de la dimension 1 des extensions de groupes s'exprime avec des homomorphismes de catégories monoïdales soit des homomorphismes de bicatégories ayant un seul objet. On peut commencer par remarquer que les 2-cocycles d'un groupe K à valeur dans un module croisé $\delta : G \longrightarrow H$ et les cobords associés définis par Dedecker [**13**] ne sont rien d'autre que les objets et les morphismes de la catégorie $\mathbf{Mon}(K[0], \mathcal{C}(\delta))$ des homomorphismes monoïdaux de la gr-catégorie discrète $K[0]$ associée à K dans la gr-catégorie $\mathcal{C}(\delta)$ associée au module croisé δ. En particulier, pour δ le module croisé $i : G \longrightarrow Aut(G)$ donné par l'homomorphisme de conjugaison intérieure associé à un groupe G, on retrouve les 2-cocycles obtenus par Schreier pour la classification de (1.0.3). La gr-catégorie $\mathcal{C}(i)$ associée au module croisé précédent est celle des auto-équivalences $\mathcal{E}q(G[1])$ du groupoïde $G[1]$, groupoïde ayant un seul objet dont les flèches sont les éléments du groupe G. La classification des extensions de groupes se résume alors simplement à une équivalence de catégories

$$\mathbf{Mon}(K[0], \mathcal{E}q(G[1])) \longrightarrow \mathbf{Ext}(K, G)^{op}. \tag{1.0.5}$$

Ce résultat est d'ailleurs mieux connu dans le cadre faisceautique c'est-à-dire lorsque K et G sont des groupes d'un topos T quelconques. L. Breen, suivant A. Grothendieck, a montré [**2**, th. 4.5] l'existence d'une équivalence entre le gr-champ $\mathcal{E}q(G[1])$ et celui des G-bitorseurs de T et la classification du champ des extensions de K par G de T est exprimée avec une équivalence, $\mathbf{Hom}(K[0], \underline{\mathbf{Bitors}}(G)) \longrightarrow \mathbf{Ext}(K, G)$, entre le champ des foncteurs additifs du gr-champ associé au groupe K vers celui des G-bitorseurs et celui des extensions.

Le cas de la dimension 2, auquel on s'intéresse ici, nécessite l'utilisation d'homomorphismes de bicatégories monoïdales, c'est-à-dire de trihomomorphismes de tricatégories ayant un seul objet [**17**]. Le théorème de classification obtenu étend exactement à la dimension supérieure l'équivalence de catégories (1.0.5). Il a été nécessaire de définir pour les bicatégories monoïdales les bicatégories d'homomorphismes $\mathbf{Bimon}(-, -)$, équivalent des catégories $\mathbf{Mon}(-, -)$ d'homomorphismes de catégories monoïdales. Comme pour le cas de la gr-catégorie $\mathcal{E}q(G[1])$ associée au module croisé $i : G \longrightarrow Aut(G)$ défini pour un groupe G, au carré croisé $i : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}\mathrm{q}(\underline{\mathcal{G}})$ introduit dans [**3**] doit être associée la bicatégorie monoïdale $\underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}}[1])$ des auto-biéquivalences de la bicatégorie à un seul objet $\underline{\mathcal{G}}[1]$ associée à $\underline{\mathcal{G}}$. Pour toutes gr-catégories $\underline{\mathcal{G}}$ et $\underline{\mathcal{K}}$, le résultat de classification s'exprime avec une biéquivalence de bicatégories, résultat principal de ce travail,

$$\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}}[1])) \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})^{op}. \tag{1.0.6}$$

Ce résultat est global puisqu'il s'exprime via une biéquivalence et à ce titre ne peut plus être seulement considéré de type cohomologique, qui pour ce genre de problème avait le défaut d'occulter la nature des objets mis en jeu. On entrevoit mieux à présent l'analogie avec la classification des fibrations d'espaces évoquée plus haut et conjointement ce que pourrait être le cas de la dimension n. Par ailleurs, les récents travaux comme ceux de [**6, 14, 15, 5**] sur le Nerf des bicatégories et leur réalisation géométrique, devraient permettre de réaliser le lien entre les extensions classifiées ici et les fibrations d'espaces topologiques ayant le même type d'homotopie ($\pi_i \neq 0$ ssi $i = 1, 2$), et, il n'y pas de réelle obstruction à penser que la 2-catégorie $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ est 2-équivalente à celle des fibrations sur le CW-complexe $|\mathbf{Ner}(\underline{\mathcal{K}})|$, de fibres homotopiquement équivalentes à l'espace $|\mathbf{Ner}(\underline{\mathcal{G}})|$.

Le corps du texte est articulé de la façon suivante. Les sections 2 et 3 sont consacrées à des rappels sur les *gr*-catégories et les bicatégories. On expose en particulier les premiers résultats concernant le noyau homotopique d'un homomorphisme de *gr*-catégories. Après un rappel sur les bicatégories monoïdales, la section 4 donne une description de la structure monoïdale utilisée sur la bicatégorie $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}[1])$ des auto-biéquivalences de $\underline{\mathcal{G}}$. On s'intéresse ensuite, section 5, aux morphismes ``lâches'' de bicatégories monoïdales: on définit les notions de transformation monoïdale et de modification pour de tels morphismes; pour deux bicatégories monoïdales $\underline{\mathcal{T}}$ et $\underline{\mathcal{S}}$, la bicatégorie décrite est notée $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{S}})$. Notre construction est comparable en tout point à celle réalisée dans [**12**] pour le cas très spécial où les bicatégories monoïdales considérées sont des Gray-monoïdes, cela dit, pour l'étude qui nous concerne apparaissent très naturellement des bicatégories plutôt que des Gray-monoïdes. Dans la section 6, on établit une biéquivalence entre la 2-catégorie $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Cat}})$ des *pseudo-foncteurs monoïdaux* définis sur une catégorie monoïdale $\underline{\mathcal{K}}$ et la 2-catégorie $\mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}}$ des cofibrations monoïdales sur $\underline{\mathcal{K}}$, ce qui complète les résultats de [**7**] sur ce sujet et qui généralise aux cas monoïdal la 2-équivalence de [**18**], $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Cat}) \longrightarrow \mathbf{Cofib}_{\mathcal{K}}$, sur les cofibrations sur $\mathcal{K}$ introduites par A. Grothendieck dans [**19**]. Les sections 7 et 8 sont consacrées à l'étude des torseurs et bitorseurs pour l'action d'une *gr*-catégorie $\underline{\mathcal{G}}$. On établit une biéquivalence $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}[1]) \longrightarrow \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}})$ entre la bicatégorie des auto-biéquivalences de la bicatégorie $\underline{\mathcal{G}}[1]$ et celle des $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs $\mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}})$. On explicite dans la section 9 la flèche de la biéquivalence induite, de but les $\mathcal{K}$-fibrations en $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs, $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}[1])) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}))$, sous-jacente a celle du théorème de classification (1.0.6). Les sections suivantes sont entièrement consacrées à la classification des extensions. Sections 10 et 11, on définit la 2-catégorie des extensions de *gr*-catégories $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ et l'on montre que cette dernière est un 2-groupoïde biéquivalent à son sous 2-groupoïde $\mathbf{Ext}_{cof}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ (resp. $\mathbf{Ext}_{fib}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ des extensions cofibrées (resp. fibrées) de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$. On donne ensuite dans la section 12 une description de la bicatégorie $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}}[1]))$ et la construction de la flèche de (1.0.6). On souhaitait une description explicite, ce qui est obtenu mais nécessite une discussion longue et technique. Pour plus de lisibilité, on explicite seulement le cas où la *gr*-catégorie $\underline{\mathcal{G}}$ est unitaire et où les biéquivalences de $\underline{\mathcal{G}}$ sont strictes sur les unités. Enfin, on montre la biéquivalence dans la dernière section. Elle est obtenue en partie avec le même point de vue que celui de la théorie de Breen-Grothendieck

développée dans [**2**] et [**3**, §3] . La donnée d'une extension de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$ détermine, avec les fibres homotopiques de l'homomorphisme p, une $\mathcal{K}$-fibration en $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs ainsi qu'une $\underline{\mathcal{K}}$-fibration monoïdale.

Cet article est une version remaniée de ma thèse de doctorat réalisée sous la direction de Lawrence Breen. Je lui dois mon premier contact avec ˝l'algèbre de dimension supérieure˝ essentielle ici et qui semble incontournable dans l'avenir au moins pour de telles questions. Je tiens ici une nouvelle fois à le remercier et à lui témoigner toute ma reconnaissance.

2. Catégories monoïdales, gr-catégories

Pour toute la suite **Cat** est la 2-catégorie des petites catégories. Les structures de catégorie monoïdale et de gr-catégorie sont à présent bien connues (voir par exemple [**26**], [**22**], [**33**], [**35**] et [**3**]). Une catégorie monoïdale $\underline{\mathcal{K}} = (\mathcal{K},\ \otimes,\ a,\ I,\ g,\ d)$ est un objet monoïdal dans **Cat**. Explicitement, $\mathcal{K}$ est une catégorie munie d'un foncteur $\otimes : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ auquel sont associées une contrainte d'associativité et une contrainte d'unité compatible. Une contrainte d'associativité consiste en la donnée d'une famille d'isomorphismes fonctoriels $a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$, A, B et C objets de $\mathcal{K}$ telle que le pentagone suivant commute pour tout objets A, B, C, et D de $\mathcal{K}$ [**26**] :

$$\begin{array}{ccccc} & & (A(BC))D & \xrightarrow{a} & A((BC)D) & & \\ & {\scriptstyle a\otimes 1}\nearrow & & & & \searrow{\scriptstyle 1\otimes a} & \\ ((AB)C)D & & & & & & A(B(CD)) \\ & {\scriptstyle a}\searrow & & & & \nearrow{\scriptstyle a} & \\ & & & (AB)(CD) & & & \end{array}$$

Une contrainte d'unité (I, g, d) compatible à celle d'associativité consiste en la donnée d'un objet I de $\mathcal{K}$, d'une famille d'isomorphismes fonctoriels $g_A : I \otimes A \longrightarrow A$ et $d_A : A \longrightarrow A \otimes I$, A objet de $\mathcal{K}$ tels que pour tout objet A et B de $\mathcal{K}$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} (AI)B & \xrightarrow{a_{A,I,B}} & A(IB) \\ & {\scriptstyle d_A\otimes 1_B}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle 1_A\otimes g_B} & \\ & AB\ . & \end{array}$$

Une catégorie monoïdale est dite *stricte* si les contraintes d'associativité et d'unité sont des égalités. Le théorème de cohérence pour les catégories monoïdales [**26**], [**22**], permettent de considérer une catégorie monoïdale comme étant stricte. Rappelons qu'une catégorie monoïdale $\underline{\mathcal{K}}$ peut être vue soit comme une bicatégorie ayant un seul objet [**1**, p. 19] (notifié quelquefois avec la notation $\underline{\mathcal{K}}[1]$), soit comme une bicatégorie monoïdale où les 2-morphismes se réduisent aux identités. Ces deux points de vue sont fondamentaux pour l'étude qui suit des extensions de gr-catégories.

Un objet X d'une catégorie monoïdale est 2-régulier si les foncteurs de translation

à gauche $t_g(X) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}, Y \mapsto XY$ et de translation à droite $t_d(X) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}, Y \mapsto YX$ sont des équivalences [**33**, p. 12].

Définition 2.1. *[35] Une gr-catégorie est une catégorie monoïdale où les flèches sont des isomorphismes et les objets sont 2-réguliers.*

Un morphisme de catégories monoïdales ou foncteur monoïdal $\underline{F} = (F, \Phi^F, \Phi_o) : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ consiste en la donnée d'un foncteur $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ et de morphismes fonctoriels appelés les contraintes de comparaison et la contrainte d'unité, respectivement $\Phi^F(A,\ B) : F(A) \otimes F(B) \longrightarrow F(A \otimes B)$ et $\Phi_o : I \longrightarrow F(I)$, compatibles aux contraintes d'associativité et d'unité c'est-à-dire tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccccc}
(F(A)F(B))F(C) & \xrightarrow{\Phi^F(A,B)\otimes 1} & F(AB)F(C) & \xrightarrow{\Phi^F(AB,C)} & F((AB)C) \\
\downarrow{\scriptstyle a_{F(A),F(B),F(C)}} & & & & \downarrow{\scriptstyle F(a_{A,B,C})} \\
F(A)(F(B)F(C)) & \xrightarrow{1\otimes\Phi^F(B,C)} & F(A)F(BC) & \xrightarrow{\Phi^F(A,BC)} & F(A(BC))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(I)F(A) & \xrightarrow{\phi^F(I,A)} & F(IA) \\
\uparrow{\scriptstyle \phi_o\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle F(g_A)} \\
IF(A) & \xrightarrow{g_{F(A)}} & F(A)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
F(AI) & \xleftarrow{\phi^F(A,I)} & F(A)F(I) \\
\uparrow{\scriptstyle F(d_A)} & & \uparrow{\scriptstyle 1\otimes\phi_o} \\
F(A) & \xrightarrow{d_{F(A)}} & F(A)I
\end{array}$$

Une transformation monoïdale $\lambda : \underline{F} \Longrightarrow \underline{G}$, consiste en la donnée d'une transformation naturelle, $\lambda : F \Longrightarrow G$ telle que pour tout objet A et B de $\mathcal{H}$ les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{array}{ccc}
F(A)F(B) & \xrightarrow{\phi^F(A,B)} & F(AB) \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda_A\otimes\lambda_B} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{AB}} \\
G(A)G(B) & \xrightarrow{\phi^G(A,B)} & G(AB)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
F(I) & \xrightarrow{\lambda_I} & G(I) \\
& {\scriptstyle \phi_o^F}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle \phi_o^G} & \\
& I\ . &
\end{array}$$

Un morphisme $\underline{P} = (P, \Phi^P, \Phi_o^P) : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ de catégories monoïdales est appelé homomorphisme lorsque la contrainte de comparaison Φ^P et celle d'unité Φ_o^P sont des isomorphismes fonctoriels. Pour ces derniers, on privilégiera les directions $\Phi^F(A,\ B) : F(A \otimes B) \longrightarrow F(A) \otimes F(B)$ et $\Phi_o : F(I) \longrightarrow I$, opposées à celles prises dans le cas lâche et plus utilisée pour les homomorphismes. Pour un homomorphisme de catégories monoïdales entre deux *gr*-catégories, c'est-à-dire un homomorphisme de *gr*-catégories, la donnée de la contrainte d'unité $\Phi_o : F(I) \longrightarrow I$ est redondante.

Notation 2.2. *On note* **Mon** *(resp.* **grCat***), la 2-catégorie dont les objets, les 1-morphismes et les 2-morphismes sont respectivement les (petites) catégories monoïdales (resp. les gr-catégories), les homomorphismes et les transformations monoïdales.*

On assimile la catégorie des groupes **Grp**, ainsi que celle des groupes abéliens **Ab**, a des 2-catégories localement discrètes; on dispose ainsi de 2-foncteurs [**35**] :

$$\pi_o : \mathbf{grCat} \longrightarrow \mathbf{Grp} \qquad et \qquad \pi_1 : \mathbf{grCat} \longrightarrow \mathbf{Ab},$$

où pour une *gr*-catégorie $\underline{\mathcal{H}}$, le groupe $\pi_o(\underline{\mathcal{H}})$ est celui des composantes connexes de $\underline{\mathcal{H}}$ et le groupe abélien $\pi_1(\underline{\mathcal{H}})$ est celui des automorphismes $\mathrm{Aut}(I) := \underline{\mathcal{H}}(I, I)$ de l'objet unité de $\underline{\mathcal{H}}$.

Notation 2.3. *Soit $\underline{P} : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ un homomorphisme de catégories monoïdales, on note par $(N(P), j, \epsilon)$ le noyau de $\underline{P}$ ([**32**, §3.1], [**23**, §1]).*

Pour mémoire, rappelons que la catégorie monoïdale $N(P)$ (appelée aussi noyau par abus) a pour catégorie sous jacente la fibre homotopique de P au dessus de I, dont les objets sont les paires (X, f) où X est un objet de $\mathcal{H}$ et $f : P(X) \longrightarrow I$ un morphisme de $\mathcal{K}$ et dont un morphisme $h : (X, f) \longrightarrow (Y, g))$ est un morphisme h de $\mathcal{H}(X, Y)$ tel que $f = g \circ P(h)$. La $\otimes$-structure sur la catégorie $N(P)$ est définie par : $(X, f) \otimes (Y, g) = (X \otimes Y, f.g)$, où $f.g$ est le morphisme de $\mathcal{K}$ défini par la composée : $g_I \circ (f \otimes g) \circ \Phi^P(X, Y) : P(X \otimes Y) \longrightarrow P(X) \otimes P(Y) \longrightarrow I \otimes I \longrightarrow I$. L'objet (I, Φ_o^P) est l'objet unité, les contraintes d'associativité et d'unité de $N(P)$ sont celles $\underline{\mathcal{H}}$. L'homomorphisme $j : N(P) \longrightarrow \underline{\mathcal{H}}$ intervenant dans le noyau $(N(P), j, \epsilon)$ est la projection canonique, $(X, f) \mapsto X$, enfin, ϵ est la transformation monoïdale $\epsilon : Pj \Longrightarrow 1$ ayant pour composante à l'objet (X, f) de $N(P)$ le morphisme $f : P(X) \longrightarrow I$ de $\mathcal{K}$.

Proposition 2.4. *Soit $\underline{\mathcal{G}}$ une gr-catégorie et $p : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ un homomorphisme de gr-catégories. La catégorie $\mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, N(p))$ est isomorphe à la fibre homotopique $\mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, p)_{(n)}$ du foncteur $\mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, p) : \mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{H}}) \longrightarrow \mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{K}})$, au-dessus de l'homomorphisme "nul" , $n : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}, X \mapsto I$ où I est l'objet unité de $\underline{\mathcal{K}}$.*

Démonstration. Un objet (r, λ) de la fibre homotopique $\mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, p)_{(n)}$ consiste en la donnée d'un homomorphisme $r : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}}$ et d'une transformation monoïdale $\lambda : pr \Longrightarrow n$. Pour un objet X et un morphisme $x : X \longrightarrow X'$ de $\mathcal{G}$, on dispose donc d'un objet $(r(X), \lambda_X)$ et d'un morphisme $r(x) : (r(X), \lambda_X) \longrightarrow (r(X'), \lambda_{X'})$ de $N(p)$. Cette correspondance détermine un foncteur : $q : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow N(p)$, qui est structuré en un homomorphisme avec pour contraintes $\Phi^q = \Phi^r$ et $\Phi_o^q = \Phi_o^r$. De la même manière, un morphisme $t : (r, \lambda) \longrightarrow (r', \lambda')$ de $\mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, p)_{(n)}$ détermine une transformation monoïdale $t : q \Longrightarrow q'$. On dispose ainsi d'un foncteur :

$$F : \mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, p)_{(n)} \longrightarrow \mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{G}}, N(p)). \tag{2.4.1}$$

On montre sans difficulté que ce foncteur est un isomorphisme. □

Lorsque $\underline{P} : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ est un homomorphisme de *gr*-catégories, le noyau $N(P)$ est une *gr*-catégorie dont les groupes d'homotopie interviennent dans *la longue suite exacte d'homotopie* associée à $\underline{P}$ [**32**, prop. 3.1.5]. Plus précisément, l'homomorphisme $\underline{\Delta} : \pi_1(\underline{\mathcal{K}})[0] \longrightarrow N(P), \quad u \longmapsto \Delta(u) = (I, u\Phi_o)$ s'inscrit dans une suite de **grCat** qui est "2-exacte" au sens de [**23**] :

$$0 \longrightarrow \pi_1(N(P))[0] \xrightarrow{\pi_1(j)} \pi_1(\underline{\mathcal{H}})[0] \xrightarrow{\pi_1(P)} \pi_1(\underline{\mathcal{K}})[0] \xrightarrow{\Delta} N(P) \xrightarrow{j} \underline{\mathcal{H}} \xrightarrow{P} \underline{\mathcal{K}},$$

et dont l'image par le 2-foncteur π_o donne la longue suite exacte en question, soit :

Proposition 2.5. *[32, prop. 3.1.5]. Soit $\underline{P} : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ un homomorphisme de gr-catégories de noyau $(N(P), j, \epsilon)$. L'homomorphisme $\delta = \pi_o(\underline{\Delta}) : \pi_1(\underline{\mathcal{K}}) \longrightarrow \pi_o(N(P))$ est à valeur dans le centre du groupe $\pi_o(N(P))$. La suite de groupes suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \pi_1(N(P)) \xrightarrow{\pi_1(j)} \pi_1(\underline{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\pi_1(P)} \pi_1(\underline{\mathcal{K}}) \xrightarrow{\delta} \pi_o(N(P)) \xrightarrow{\pi_o(j)} \pi_o(\underline{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\pi_o(P)} \pi_o(\underline{\mathcal{K}})$$

Comme conséquence, on obtient que le noyau d'un homomorphisme $\underline{P}$ de *gr*-catégories qualifie ce dernier [**32**, prop. 3.1.6] :

Proposition 2.6. *L'homomorphisme $\underline{P}$ est fidèle (resp. plein) si et seulement si $\pi_1(N(P)) = 1$ (resp. $\pi_o(N(P)) = 1$).*

2.7. Exemple. Soit $\underline{\mathcal{H}}$ une *gr*-catégorie où une contrainte d'inverse $(.^*,\ e_.,\ n_.)$ à été choisie [**33**, § 2.5.5.2]. Pour tout objet A de $\mathcal{H}$, on dispose du foncteur de conjugaison par A (voir [**3**]) $(i_A,\ \Phi^A) : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}}$, $X \longmapsto i_A(X) = (AX)A^*$. On est alors en présence d'un homomorphisme dit de conjugaison : $(i,\ \Phi^i) : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\underline{\mathcal{H}})$. Le noyau homotopique $N(i)$ de cet l'homomorphisme est strictement isomorphe au centre $\mathcal{Z}(\underline{\mathcal{H}})$ de $\underline{\mathcal{H}}$ ([**22**] pour le centre). Par ailleurs, $\pi_1(\mathcal{E}q(\underline{\mathcal{H}}))$ est le groupe des 1-cocycles (i.e. des homomorphismes croisés ou dérivations [**27**, p. 106]) $\mathbf{Z}^1(\pi_o(\underline{\mathcal{H}}), \pi_1(\underline{\mathcal{H}}))$ du groupe $\pi_o(\underline{\mathcal{H}})$ à valeur dans le $\pi_o(\underline{\mathcal{H}})$-module $\pi_1(\underline{\mathcal{H}})$ ([**35**], pour l'action de $\pi_o(\underline{\mathcal{H}})$ sur $\pi_1(\underline{\mathcal{H}})$). Le groupe $\pi_1(\mathcal{Z}(\underline{\mathcal{H}}))$ est le groupe $\pi_1(\underline{\mathcal{H}})^{\pi_o(\underline{\mathcal{H}})}$, sous groupe des automorphismes de l'unité invariant pour l'action du groupe $\pi_o(\underline{\mathcal{H}})$. La longue suite exacte d'homotopie appliquée à l'homomorphisme de conjugaison $i : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\underline{\mathcal{H}})$ donne la suite exacte de groupes (on note π_1 et π_o pour $\pi_1(\underline{\mathcal{H}})$ et $\pi_o(\underline{\mathcal{H}})$)

$$0 \longrightarrow \pi_1^{\pi_o} \xrightarrow{\pi_1(j)} \pi_1 \xrightarrow{\pi_1(i)} \mathbf{Z}^1(\pi_o, \pi_1) \xrightarrow{\delta} \pi_o(\mathcal{Z}(\underline{\mathcal{H}})) \xrightarrow{\pi_o(j)} \pi_o \xrightarrow{\pi_o(i)} \pi_o(\mathcal{E}q(\underline{\mathcal{H}})).$$

Pour $u \in \pi_1$, $\pi_1(i)(u)$ est la dérivation principale [**27**, p. 106] définie par u. Enfin, $\pi_o(j)$ est à valeur sur le sous groupe $Z(\pi_o) \cap st_{\pi_o}(\pi_1)$ de π_o où $st_{\pi_o}(\pi_1)$ est le sous groupe de π_o des éléments qui stabilisent tous les automorphismes.

3. Rappels sur les bicatégories

On renvoie le lecteur à [**37**] ainsi qu'à [**1**], [**18**] et [**17**] pour les généralités sur les bicatégories. Pour fixer les notations, donnons la définition classique suivante :

Définition Une bicatégorie $\mathcal{A}$, correspond à la donnée d'une classe d'objets, $A, B, C, \ldots,$

BC1 d'une famille de (petites) catégories $\mathcal{A}(A,B)$, dont les objets et les morphismes sont respectivement les 1-morphismes et les 2-morphismes de $\mathcal{A}$,

BC2 d'une famille de foncteurs de composition $\ulcorner \cdot \urcorner : \mathcal{A}(B,C) \times \mathcal{A}(A,B) \longrightarrow \mathcal{A}(A,C)$,

BC3 d'une famille de foncteurs $I_A : \mathbb{1} \longrightarrow \mathcal{A}(A,A)$, où $\mathbb{1}$ est la catégorie à un objet et une flèche.

BC4 d'une famille d'isomorphismes naturels (contraintes d'associativité)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(C,D) \times \mathcal{A}(B,C) \times \mathcal{A}(A,B) & \xrightarrow{\cdot \times 1} & \mathcal{A}(B,D) \times \mathcal{A}(A,B) \\ {\scriptstyle 1\times\cdot}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle a_{A,B,C,D}} & \downarrow{\scriptstyle \cdot} \\ \mathcal{A}(C,D) \times \mathcal{A}(A,C) & \xrightarrow[\cdot]{} & \mathcal{A}(A,D) \end{array}$$

BC5 de familles d'isomorphismes naturels (contraintes d'unité)

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(B,B) \times \mathcal{A}(A,B) & \xleftarrow{I_B \times 1} & \mathcal{A}(A,B) & \xrightarrow{1 \times I_A} & \mathcal{A}(A,B) \times \mathcal{A}(A,A) \\ & \searrow^{\cdot} & {\scriptstyle g_{AB}} \Downarrow \downarrow 1 \Downarrow {\scriptstyle d_{AB}} & \swarrow_{\cdot} & \\ & & \mathcal{A}(A,B) & & \end{array}$$

Ces données sont cohérentes, dans le sens où la contrainte d'associativité vérifie l'égalité du pentagone [**18**, BC6 p. 39] et est compatible à la contrainte d'unité [**18**, BC7 p. 40].

Définition 3.1. *On appelle bigroupoïde, une bicatégorie pour laquelle les 1 et 2-morphismes sont respectivement des équivalences et des 2-isomorphimes.*

3.2. Le théorème de cohérence pour les bicatégories [**17**, Théorème 1.5], [**28**] donne que le *collage* (pasting) de 2-cellules est uniquement déterminé par le choix d'un parenthésage des 1-morphismes du but et de la source de ce collage. Un collage dans une bicatégorie peut donc être signifié en omettant les 2-isomorphismes relatifs aux contraintes d'associativité et d'unité.

3.3. Une propriété *locale* pour une bicatégorie $\mathcal{A}$ est une propriété vérifiée par toutes les catégories $\mathcal{A}(A,B)$. Une bicatégorie $\mathcal{B}$ est dite sous-bicatégorie (resp. sous-bicatégorie pleine, resp. sous-bicatégorie localement pleine) d'une bicatégorie $\mathcal{A}$ si les objets de $\mathcal{B}$ sont des objets de $\mathcal{A}$ et si pour tout couple d'objets (A,B) de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(A,B)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{A}(A,B)$ (resp. $\mathcal{B}(A,B) = \mathcal{A}(A,B)$, resp. $\mathcal{B}(A,B)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(A,B)$). En particulier, pour un objet A de $\mathcal{A}$,

la sous bicatégorie pleine de $\mathcal{A}$ ayant A comme seul objet peut être assimilée à une catégorie monoïdale [**1**, p. 19] que l'on notera $\mathcal{A}(A)$.

3.4. Pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bicatégories, on note $\mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ la bicatégorie des homomorphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Un homomorphisme $H : \mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$, correspond à la donnée d'une application $H : ob(\mathcal{A})\longrightarrow ob(\mathcal{B})$, d'une famille de foncteurs $H_{A,B} : \mathcal{A}(A,B)\longrightarrow\mathcal{B}(H(A),H(B))$, d'une famille de 2-isomorphismes : $i_A : H(I_A)\Longrightarrow I_{H(A)}$ et d'une famille d'isomorphismes naturels, appelés *les contraintes de comparaisons*,

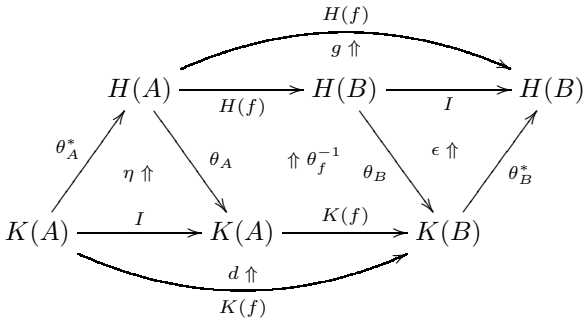
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(B,C)\times\mathcal{A}(A,B) & \longrightarrow & \mathcal{A}(A,C) \\ \downarrow{\scriptstyle H_{B,C}\times H_{A,B}} & \overset{C_{A,B,C}}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle H_{A,C}} \\ \mathcal{B}(H(B),H(C))\times\mathcal{B}(H(A),H(B)) & \longrightarrow & \mathcal{B}(H(A),H(C)) \end{array} \qquad (3.4.1)$$

cohérentes aux contraintes d'associativité et d'unité. Le théorème de cohérence pour les homomorphismes de bicatégories [**17**, Théorème 1.6], nous autorise à ne pas signifier les contraintes de ces derniers. Un 1-morphisme $H\longrightarrow K$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est une pseudo-transformation naturelle $\theta : H\longrightarrow K$. Une telle transformation consiste en la donnée d'une famille de 1-morphismes de $\mathcal{B}$, appelés *les composantes de* θ, $\theta_A : H(A)\longrightarrow K(A)$, A objet de $\mathcal{A}$, et d'une famille d'isomorphismes naturels :

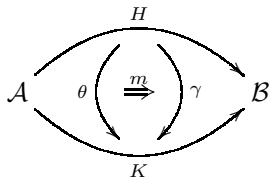
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(A,B) & \xrightarrow{H_{A,B}} & \mathcal{B}(H(A),H(B)) \\ \downarrow{\scriptstyle K_{A,B}} & \overset{\theta}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}(1,\theta_B)} \\ \mathcal{B}(K(A),K(B)) & \xrightarrow[\mathcal{B}(\theta_A,1)]{} & \mathcal{B}(H(A),K(B)) \end{array}$$

soit, d'une famille de 2-isomorphismes $\theta_f : \theta_B.H(f)\Longrightarrow K(f).\theta_A$ pour tout morphisme $f : A\longrightarrow B$ de $\mathcal{A}$, appelés *les 2-isomorphismes structuraux de* θ, satisfaisant aux conditions de cohérence usuelles [**18**, p. 43 et 80]. Lorsque pour tout objet A de $\mathcal{A}$, les composantes θ_A d'une pseudo-transformation $\theta : H\longrightarrow K$ sont des équivalences, on parle alors de pseudo-équivalence. La donnée pour chaque composante θ_A d'une équivalence quasi-inverse $\theta_A^* \dashv \theta_A$, détermine une pseudo-équivalence quasi-inverse θ^*, dont l'expression au morphisme $f : A\longrightarrow B$ est donnée par l'*accouplement* $(\theta_f^{-1})^*$ (voir [**24**] p. 87, pour la théorie de l'*accouplement* (the

mates), voir aussi [**30**]) :



Enfin, un 2-morphisme soit une modification de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathcal{B})$,



(3.4.2)

consiste en la donnée d'une famille de 2-morphismes $m_A : \theta_A \Longrightarrow \gamma_A$, telle que pour tout 1-morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{A}$: $\quad \gamma_f.(m_B H(f)) = (K(f)m_A).\theta_f$.

3.5. Un homomorphisme $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est une biéquivalence si H est biessentiellement surjectif c'est-à-dire si pour tout objet B de $\mathcal{B}$, il existe un objet A de $\mathcal{A}$ et une équivalence entre B et $H(A)$ et si H est localement une équivalence, c'est-à-dire si le foncteur $H_{A,B} : \mathcal{A}(A,B) \longrightarrow \mathcal{B}(H(A),H(B))$ est une équivalence de catégories pour tout couple (A,B) d'objets de $\mathcal{A}$. Lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des bigroupoïdes, un homomorphisme $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est une biéquivalence si et seulement si H induit une bijection sur les composantes connexes $\pi_0(\mathcal{A})$ et $\pi_0(\mathcal{B})$ et si pour tout objet A de $\mathcal{A}$, H induit une gr-équivalence sur les gr-catégories $\mathcal{A}(A)$ et $\mathcal{B}(H(A))$ ([**31**] dans le cas 2-groupoïde).

Notation 3.6. *Soit $\mathcal{A}$ une bicatégorie, on note par* $\mathbf{Bieq}(\mathcal{A})$ *le bigroupoïde, sous-bicatégorie de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathcal{A})$*, dont les objets, les 1-morphismes et les 2-morphismes sont respectivement les biéquivalences, les pseudo-équivalences et les modifications inversibles.*

3.7. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bicatégories. Un homomorphisme $H : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ détermine des homomorphismes, strict pour le second, [**18**, p. 88], qui sont des biéquivalences si H l'est :

$$H\circ : \mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \circ H : \mathbf{Bicat}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{B},\mathcal{D}).$$

Enfin, rappelons que l'on a des isomorphismes canoniques [**37**, p. 122]:

$$\mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathbf{Bicat}(\mathcal{B},\mathcal{C})) \simeq \mathbf{Bicat}(\mathcal{B},\mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathcal{C})), \tag{3.7.1}$$

$$\mathbf{Bicat}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \simeq \mathbf{Bicat}(\mathcal{A}^{op},\mathcal{B}^{op})^{op}. \tag{3.7.2}$$

3.8. Cas des catégories monoïdales. Comme on l'a déjà dit, une catégorie monoïdale $\underline{\mathcal{K}}$ peut être assimilée à une bicatégorie ayant un seul objet, point de vue que l'on signifira en cas d'ambiguité avec la notation $\underline{\mathcal{K}}[1]$. Un homomorphisme de catégories monoïdales est un homomorphisme de bicatégories. Pour deux catégories monoïdales $\underline{\mathcal{K}}$ et $\underline{\mathcal{G}}$, on peut considérer les bicatégories $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathcal{G}})$ et $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$.

Une pseudo-transformation $\theta : \underline{H} \longrightarrow \underline{H'}$ entre une paire d'homomorphismes de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathcal{G}})$ correspond à la donnée, pour son unique composante d'un objet θ de $\mathcal{G}$ et, pour ses isomorphismes structuraux d'une famille d'isomorphismes de $\mathcal{G}$,

$$\theta_A : \theta \otimes H(A) \longrightarrow H'(A) \otimes \theta, \tag{3.8.1}$$

naturels en A et cohérente à la structure avec la commutativité des deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc}
\theta H(AB) & & \xrightarrow{\quad\theta_{AB}\quad} & & & & H'(AB)\theta \\
{\scriptstyle a\circ(\theta\Phi^H)}\downarrow & & & & & & \uparrow{\scriptstyle \Phi^{H'}\theta\circ a} \\
(\theta H(A))H(B) & \xrightarrow{\theta_A\otimes 1} & (H'(A)\theta)H(B) & \xrightarrow{a} & H'(A)(\theta H(B)) & \xrightarrow{1\otimes\theta_B} & H'(A)(H'(B)\theta)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\theta \otimes H(I) & & \xrightarrow{\quad\theta_I\quad} & & H'(I)\otimes\theta \\
{\scriptstyle \theta\otimes\Phi^H_o}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{H'}_o\otimes\theta} \\
\theta\otimes I & \xrightarrow{d_I^{-1}} & \theta & \xleftarrow{g_I} & I\otimes\theta.
\end{array}$$

Lorsque $\underline{\mathcal{G}}$ est une gr-catégorie où des choix d'objets quasi-inverses sont faits, une telle pseudo-transformation doit être comprise comme une transformation monoïdale $i_\theta \circ H \longrightarrow H'$ où i_θ est l'homomorphisme de conjugaison intérieur défini par l'objet θ de $\underline{\mathcal{G}}$ composante de cette pseudo-transformation.

Enfin, un 2-morphisme $m : \theta \Longrightarrow \theta' : H \longrightarrow H'$ correspond à la donnée d'un morphisme de $\mathcal{K}$, $m : \theta \longrightarrow \theta'$, tel que pour tout objet A de $\mathcal{H}$, on ait la commutativité du carré :

$$\begin{array}{ccc}
\theta\otimes H(A) & \xrightarrow{\theta_A} & H'(A)\otimes\theta \\
{\scriptstyle m\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes m} \\
\theta'\otimes H(A) & \xrightarrow{\theta'_A} & H'(A)\otimes\theta'.
\end{array}$$

4. La bicatégorie monoïdale $\underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}})$ des biéquivalences d'une gr-catégories

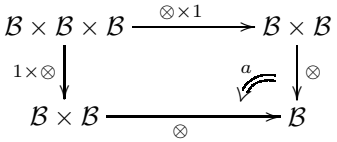
On se réfère à [**17**] pour la structure de bicatégorie monoïdale c'est-à-dire de tricatégorie ayant un seul objet. Une structure monoïdale sur une bicatégorie $\mathcal{B}$

consiste en les données suivantes :

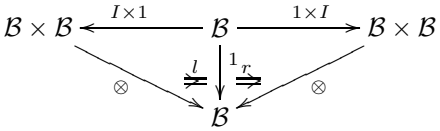
B1 un homomorphisme de bicatégories $\otimes\ :\ \mathcal{B}\times\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}$;

B2 un homomorphisme unité $\mathbf{I}\ :\ \mathbb{1}\longrightarrow\mathcal{B}$ de $\mathbf{Bicat}(\mathbb{1};\ \mathcal{B})$ où $\mathbb{1}$ est la bicatégorie ayant un objet, un 1-morphisme et un 2-morphisme;

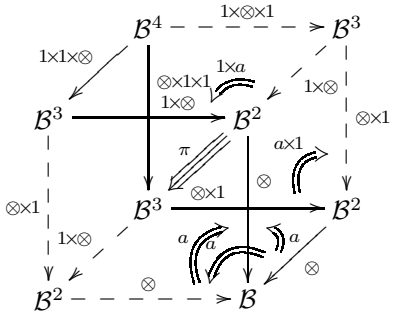
B3 une pseudo-équivalence a de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B};\ \mathcal{B})$ appelée la contrainte d'associativité



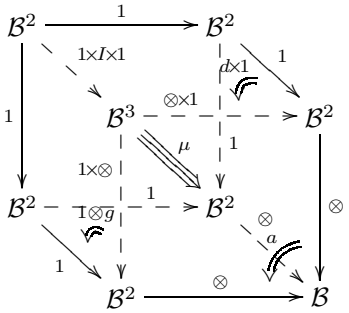
B4 des pseudo-équivalences l et r de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{B};\ \mathcal{B})$ appelées les contraintes d'unité



B5 une modification π de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B};\ \mathcal{B})$ donnant la *pseudo*-commutativité des pentagones de Mac Lane



B6 une modification μ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{B}\times\mathcal{B};\ \mathcal{B})$ donnant la *pseudo*-commutativité des diagrammes de compatiblité des contraintes d'associativité et d'unité,



Les données **B5** et **B6** sont elles mêmes cohérentes, c'est-à-dire que la modification π vérifie la condition du *4-cocycle non abélien* ([**17**], TA1) condition qui correspond à une commutativité du type polyèdre K_5 de Stasheff [**36**], la modification μ vérifie les conditions de *normalisation à gauche et à droite* (loc. cit., TA2-TA3) pour les modifications λ et ρ induites (loc. cit., rem. 2.3.).

Pour $\underline{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}, \otimes, a, I, g, d, \pi, \mu)$ une bicatégorie monoïdale, on omettra souvent de signifier dans les diagrammes les contraintes dues à la bicatégorie $\mathcal{T}$ ou à l'homomorphisme $\otimes$ comme cela est possible avec les théorèmes de cohérence, th. 5 et th. 6, de loc. cit.. Par exemple, pour des 2-morphismes u et w de $\mathcal{T}$ du type

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & \Downarrow u & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A' & \xrightarrow[f']{} & B' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{h} & E \\ {\scriptstyle d}\downarrow & \Downarrow w & \downarrow{\scriptstyle e} \\ D' & \xrightarrow[h']{} & E' \end{array}$$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes D & \xrightarrow{f \otimes h} & B \otimes E \\ {\scriptstyle a \otimes d}\downarrow & \Downarrow u \otimes w & \downarrow{\scriptstyle b \otimes e} \\ A' \otimes D' & \xrightarrow[f' \otimes h']{} & B' \otimes E' \end{array} \tag{4.0.1}$$

aussi signifié quelquefois par la notation $u \boxtimes w$, correspondra à la composition

$$(b \otimes e).(f \otimes h) \;\simeq\; (b.f) \otimes (e.h) \xrightarrow{u \otimes w} (a.f') \otimes (h'.d) \;\simeq\; (f' \otimes h').(a \otimes d).$$

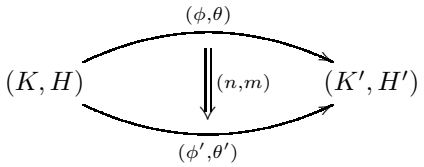
De même, pour un 1-morphisme f et un objet X de $\mathcal{T}$, on notera par $f \otimes X$ le 1-morphisme $f \otimes I_X$ (avec I_X l'unité en X). Pour un 2-morphisme u et un objet X de $\mathcal{T}$, on notera par $u \otimes X$ ou encore par $u \otimes 1$ le produit $u \otimes 1_{I_X}$. Enfin, pour $\theta : X \longrightarrow Y$ un 1-morphisme de $\mathcal{T}$, on notera aussi par $I_\theta : I_Y.\theta \Longrightarrow \theta.I_X$, (où $I_\theta = d_\theta g_\theta$) l'expression en θ de la pseudo-équivalence unité de l'homomorphisme $1_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T}, \mathcal{T})$. Avec ces conventions, le produit $u \boxtimes I_\theta$ correspond donc au diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes X & \xrightarrow{f \otimes \theta} & B \otimes Y \\ {\scriptstyle a \otimes X}\downarrow & \Downarrow u \otimes I & \downarrow{\scriptstyle b \otimes Y} \\ A' \otimes X & \xrightarrow[f' \otimes \theta]{} & B' \otimes Y \end{array}$$

4.1. La bicatégorie monoïdale $\underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}})$

Soit $\underline{\mathcal{G}}$ une *gr*-catégorie, on précise ici la structure monoïdale sur $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$ que nous allons utiliser par la suite.

B1 L'homomorphisme de composition est défini sur la cellule de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})\times\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$,

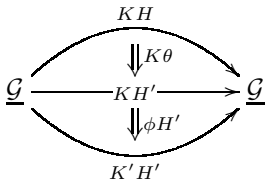


(4.1.1)

par les égalités :

$$K \otimes H = KH, \quad \phi \otimes \theta = \phi H'.K\theta, \quad n \otimes m = nH'.Km\ .$$

La pseudo-transformation produit $\phi \otimes \theta$ correspond à la composition dans $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$:



(4.1.2)

Cette pseudo-transformation est définie pour sa composante par l'objet $\phi\otimes K(\theta)$ de $\mathcal{G}$ et pour ses isomorphismes structuraux par la famille d'isomorphismes $(\phi \otimes \theta)_X$, X objet de $\mathcal{G}$, donnés par la composition suivante (les contraintes d'associativité sont omises, ce qui sera souvent le cas pour la suite) :

$$\begin{array}{ccccc} (\phi K(\theta))KH(X) & - - - - \overset{(\phi\otimes\theta)_X}{- - - - - - - - \rightarrow} & K'H'(X)(\phi K(\theta)) \\ {\scriptstyle 1(\Phi^K)^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \phi_{H'(X)}1} \\ \phi K(\theta H(X)) & \xrightarrow{1K(\theta_X)} \phi K(H'(X)\theta) & \xrightarrow{1\Phi^K} (\phi KH'(X))K(\theta) \end{array} \tag{4.1.3}$$

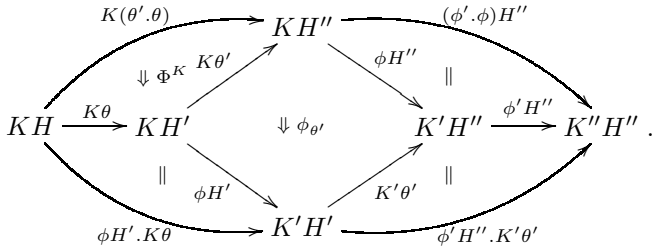
La modification produit $n \otimes m$, est définie par le morphisme $n \otimes K(m)$ de $\mathcal{G}$. La contrainte de comparaison de cet homomorphisme de composition est définie au 1-morphisme de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})\times\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$:

$$(K, H) \xrightarrow{(\phi,\theta)} (K', H') \xrightarrow{(\phi',\theta')} (K'', H'')$$

par la modification de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$,

$$C^{\otimes} : (\phi'.\phi) \otimes (\theta'.\theta) \Longrightarrow (\phi' \otimes \theta').(\phi \otimes \theta), \tag{4.1.4}$$

définie par le collage dans $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$:



Enfin, la contrainte d'unité est définie à l'unité $(I_K, I_H) : (K,H) \longrightarrow (K,H)$ par la modification $I_K \otimes I_H \Longrightarrow I_{KH}$ correspondant au morphisme de $\mathcal{G}$:

$$C_0^{\otimes} : IK(I) \xrightarrow{I\Phi_0^K} II \xrightarrow{g} I.$$

B2 L'unité est donnée par l' identité $1_{\mathcal{G}}$ et la pseudo-transformation $I_{1_{\mathcal{G}}}$.

B3 La contrainte d'associativité est la pseudo-équivalence de composantes des unités ayant pour expression au 1-morphisme $(\omega, \phi, \theta) : (L,K,H) \longrightarrow (L',K',H')$ la modification de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$:

$$\begin{array}{ccc} (LK)H & \xrightarrow{(\omega\phi)\theta} & (L'K')H' \\ {\scriptstyle I}\downarrow & \overset{\alpha_{\omega,\phi,\theta}}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle I} \\ L(KH) & \xrightarrow[\omega(\phi\theta)]{} & L'(K'H') \end{array} \qquad (4.1.5)$$

où le morphisme $\alpha_{\omega,\phi,\theta}$ est défini par la composition dans $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{ccccc} I((\omega L(\phi))LK(\theta)) & & \overset{\alpha_{\omega,\phi,\theta}}{- - - - - - - - - - \rightarrow} & & (\omega L(\phi K(\theta)))I \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle d} \\ (\omega L(\phi))LK(\theta) & \xrightarrow{a} & \omega(L(\phi)LK(\theta)) & \xrightarrow{1\Phi^L} & \omega L(\phi K(\theta)). \end{array}$$

B4 Les contraintes d'unité sont les pseudo-équivalences de composantes des unités et où pour un 1-morphisme $\theta : H \longrightarrow H'$, les modifications l_θ et r_θ de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$ sont définies par les morphismes de $\underline{\mathcal{G}}$:

$$l_\theta : I(I\theta) \xrightarrow{g} I\theta \xrightarrow{I_\theta} \theta I \quad \text{et} \quad r_\theta : I\theta \xrightarrow{I_\theta} \theta I \xrightarrow{1\Phi_o^{-1}} \theta H(I) \xrightarrow{d} (\theta H(I))I \ .$$

B5 La modification π est définie en utilisant les modifications de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$ induites par les contraintes d'unité de style $\phi_o : M(I) \longrightarrow I$ des homomorphismes considérés. Sa composante en (M,L,K,H) correspond au morphisme de $\underline{\mathcal{G}}$:

$$(IM(I))[I(IMLK(I))] \xrightarrow{\sim} IIIII \xrightarrow{\sim} II \ .$$

B6 La modification μ admet pour composante en (K,H) le morphisme de $\underline{\mathcal{G}}$:

$$(IH(I))[I(IH(I))] \xrightarrow{\sim} IIIII \xrightarrow{\sim} I \ .$$

Enfin, en supposant $\underline{\mathcal{G}}$ stricte on vérifie in extenso la condition du *4-cocycle non abélien* et les conditions de *normalisation à gauche et à droite*. Si l'on souhaite encore alléger les diagrammes à considérer, on peut aussi supposer que les homomorphismes sont stricts, les contraintes d'associativité et d'unité sont alors strictes. On note $\underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}})$ la bicatégorie monoïdale ainsi définie.

4.2. Exemples. Soit $G[0]$ la *gr*-catégorie discrète dont les objets sont les éléments d'un groupe G. La bicatégorie monoïdale $\underline{\mathbf{Bieq}}(G[0])$ est la *gr*-catégorie stricte associée au module croisé $i : G \longrightarrow \mathbf{Aut}(G)$ où i est l'homomorphisme de conjugaison.

En effet, la bicatégorie $\mathbf{Bieq}(G[0])$ est la 2-catégorie localement discrète dont les objets sont les éléments du groupe $\mathbf{Aut}(G)$ des automorphismes de G et dont un morphisme $\theta : H \longrightarrow H'$ correspond à la donnée d'un objet θ de G tel que $i_\theta \circ H = H'$ où i_θ est l'automorphisme de conjugaison défini par θ. Si l'on note (θ, H) un tel morphisme, l'égalité $(\theta_2, i_{\theta_1} \circ H)(\theta_1, H) = (\theta_2\theta_1, H)$ définit la composition dans $\mathbf{Bieq}(G[0])$. Le produit est défini par l'égalité $(\phi, K) \otimes (\theta, H) = (\phi K(\theta), KH)$ et correspond au produit du groupe $G \times \mathbf{Aut}(G)$, produit semi-direct pour l'action à gauche de $\mathbf{Aut}(G)$ sur G.

Cet exemple se généralise au cas où $\underline{\mathcal{G}}$ est une *gr*-catégorie pour laquelle des *choix* d'objet quasi-inverse sont effectués. Au ˋ*module croisé*˝ défini par l'homomorphisme de conjugaison (voir [**3**]),

$$(i, \Phi^i) : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\underline{\mathcal{G}}) \ ,$$

peut être associée une bicatégorie monoïdale, qui doit être considérée comme étant $\underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}})$. En effet, l'homomorphisme de conjugaison détermine une action à gauche sur le $\mathcal{E}q(\underline{\mathcal{G}})$-torseur trivial (8.1.2). L'image de cette action par le foncteur défini en (7.2.1) détermine une bicatégorie $E\underline{\mathcal{G}}$. On a un isomorphisme strict,

$$F : E\underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}) \tag{4.2.1}$$

se réduisant à l'identité sur les objets et les 2-morphismes. Au 1-morphisme $(\lambda, \theta) : H \longrightarrow H'$ de $E\underline{\mathcal{G}}$, le 1-morphisme $F((\theta, \lambda))$ est la pseudo-transformation définie pour sa composante par l'objet θ de $\mathcal{G}$ et pour ses isomorphismes structuraux $u_- : \theta \otimes H(-) \longrightarrow H'(-) \otimes \theta$ par la famille d'isomorphismes de composante en A :

$$u_A : \theta H(A) \simeq (\theta H(A))I \xrightarrow{1 \otimes n_A^{-1}} (\theta H(A))(\theta^* \theta) \simeq ((\theta H(A))\theta^*)\theta \xrightarrow{\lambda_A \otimes 1} H'(A)\theta \ .$$

L'isomorphisme F permet alors de définir par transport une structure monoïdale sur la bicatégorie $E\underline{\mathcal{G}}$. Cela dit, comme pour l'exemple précédent, c'est bien la bicatégorie monoïdale $\underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}})$ qu'il faut à présent associer à l'homomorphisme de congugaison $(i, \Phi^i) : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\underline{\mathcal{G}})$.

5. Morphismes de bicatégories monoïdales

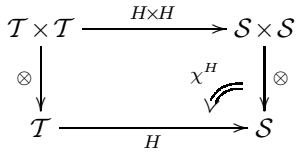
Un homomorphisme $H : \underline{\mathcal{T}} \longrightarrow \underline{\mathcal{S}}$ de catégories monoïdales peut être vu soit comme un objet de la catégorie $\mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{S}})$ soit, lorsque $\underline{\mathcal{T}}$ et $\underline{\mathcal{S}}$ sont assimilées à des bicatégories ayant un seul objet, à un objet de la bicatégorie $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{S}})$. Pour $\underline{\mathcal{T}}$ et $\underline{\mathcal{S}}$ des bicatégories monoïdales, le deuxième point de vue trouve sa généralisation avec la tricatégorie $\mathbf{Tricat}(\underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{S}})$ des trihomomorphismes de $\underline{\mathcal{T}}$ vers $\underline{\mathcal{S}}$ définie dans [**17**]. On se propose ici d'étendre au cas des bicatégories monoïdales le premier point de vue, ce que l'on obtient avec la bicatégorie $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{S}})$. En fait, comme dans [**12**] pour le cas des Gray-monoïdes, on développe dans la suite un cas ˋlâche˝ .

Un morphisme ou homomorphisme lâche $\underline{H} : \underline{\mathcal{T}} \longrightarrow \underline{\mathcal{S}}$ de bicatégories monoïdales est avec la terminologie de [**17**], un foncteur lâche où la donnée (HTD2) de loc. cit. est un homomorphisme, les données (HTD3) et (HTD4) sont des pseudo-transformations et les données (HTD5) et (HTD6) sont des modifications inversibles, soit :

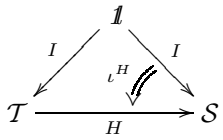
Définition 5.1. *Soient $\underline{\mathcal{T}}$ et $\underline{\mathcal{S}}$ deux bicatégories monoïdales, un morphisme ou homomorphisme lâche $\underline{H} = (H,\ \chi,\ \iota,\ \omega,\ \gamma,\ \delta)\ : \underline{\mathcal{T}} \longrightarrow \underline{\mathcal{S}}$ consiste en la donnée*

HBM1 *d'un homomorphisme $H : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T};\ \mathcal{S})$,

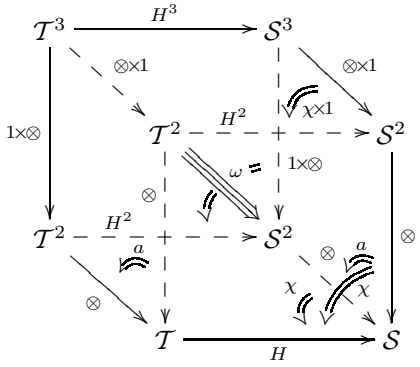
HBM2 *d'une pseudo-transformation naturelle χ^H de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T} \times \mathcal{T};\ \mathcal{S})$ *:*



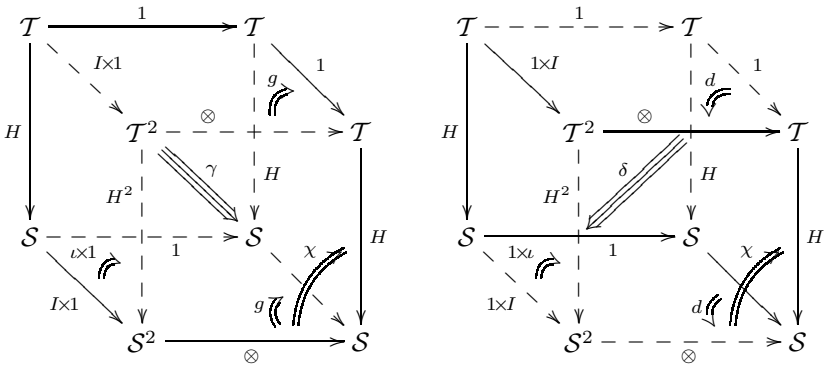
HBM3 *d'une pseudo-transformation naturelle ι^H de* $\mathbf{Bicat}(\mathbb{1};\ \mathcal{S})$ *:*



HBM4 *d'une modification inversible $\omega^H : Ha.(\chi.(\chi \otimes 1)) \Longrightarrow (\chi.(1 \otimes \chi)).a$ de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T};\ \mathcal{S})$ *(où $1 \times \chi$ est sur la face arrière) :*



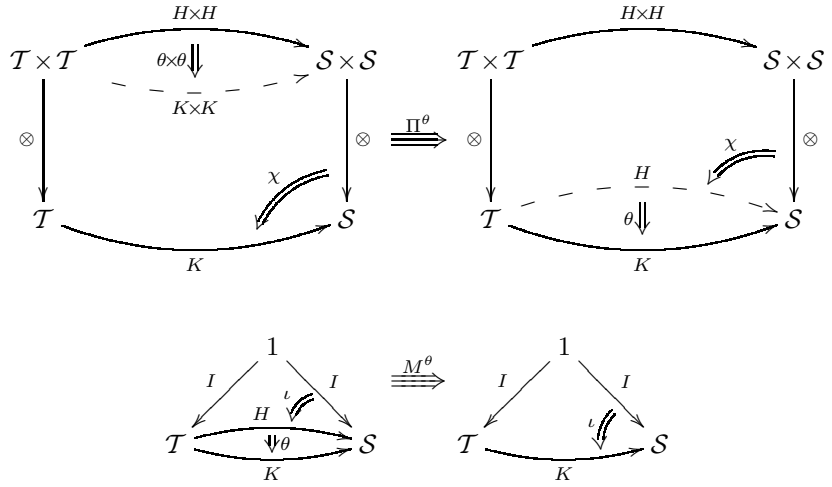
HBM5 *de modifications inversibles γ et δ de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T};\ \mathcal{S})$ *:*



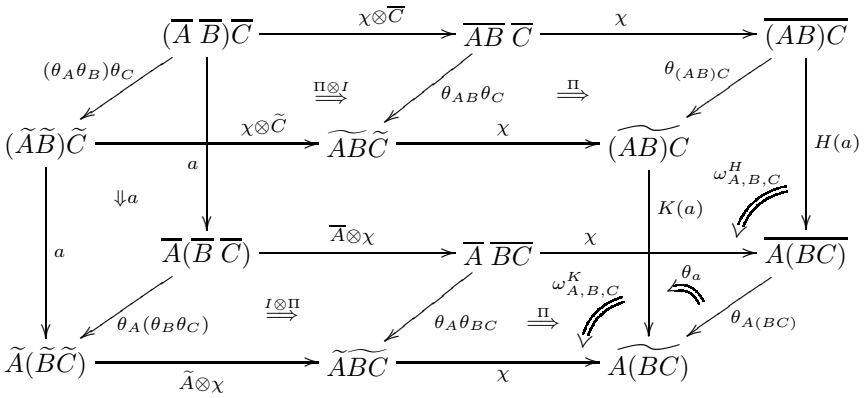
*Ces données respectent les conditions de cohérence, [**17**],* **HTA1** *et* **HTA2** *que nous n'expliciterons pas ici.*

Les morphismes de bicatégories monoïdales sont les objets d'une bicatégorie $\mathbf{Bimon_l}(\underline{\mathcal{T}},\ \underline{\mathcal{S}})$ (l en indice pour *lâche*) dont les 1 et 2-morphismes sont respectivement les transformations monoïdales et les modifications. Une transformation monoïdale s'identifie à une tri-transformation, définie dans [**17**], ayant pour composantes des unités, ce qui est consistant avec le cas des catégories monoïdales où une transformation monoïdale s'identifie de la même manière à une pseudo-transformation.

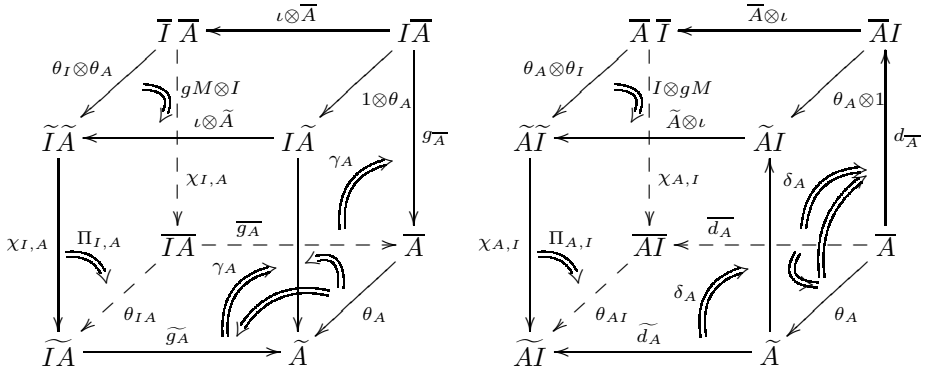
Définition 5.2. *Un 1-morphisme $\underline{\theta} = (\theta,\ \Pi^\theta,\ M^\theta) : \underline{H} \longrightarrow \underline{K}$, appelé une transformation monoïdale, consiste en la donnée d'une pseudo-transformation naturelle de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T},\mathcal{S})$ *: $\theta\ :\ H \Rightarrow K : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ et la donnée de modifications inversibles :*



sastisfaisant aux conditions de cohérence :



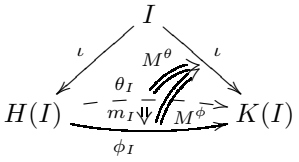
(5.2.1)

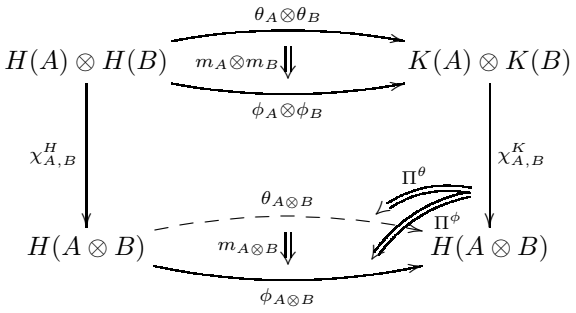


(5.2.2)

pour tous objets A, B, et C de $\mathcal{T}$ et où l'on a noté $\overline{X}$ et $\widetilde{X}$ pour $H(X)$ et $K(X)$.

Définition 5.3. *Un 2-morphisme $\underline{m} : \underline{\theta} \Rightarrow \underline{\phi}$, appelé une modification, consiste en la donnée d'une modification $m : \theta \Rightarrow \phi$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ satisfaisant aux conditions de cohérence :*





pour tout objet (A, B) *de* $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$.

5.4. La bicatégorie des (co)-homomorphismes Bimon$(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})$ Un homomorphisme $\underline{H}:\underline{\mathcal{T}}\longrightarrow\underline{\mathcal{S}}$ sera un morphisme de bicatégories monoïdales pour lequel les pseudo-transformations χ et ι sont des pseudo-équivalences, ce qui avec la terminologie de [**17**] est un trihomomorphisme de $\underline{\mathcal{T}}$ dans $\underline{\mathcal{S}}$. En outre, lorsque les pseudo-transformations χ et ι sont prises dans l'autre sens, soit $\chi : H\circ\otimes\Longrightarrow\otimes\circ(H\times H)$ et $\iota : H\otimes I\Longrightarrow I$, et modulo les adaptations que cela implique, on parlera alors de co-morphisme et de co-homomorphisme. En particulier, on notera **Bimon**$(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})$ la bicatégorie des co-homomorphismes de $\underline{\mathcal{T}}$ dans $\underline{\mathcal{S}}$.

5.5. Compositions verticales et horizontales dans Bimon$_{\mathbf{l}}(\underline{\mathcal{T}},\ \underline{\mathcal{S}})$. La composition verticale des 2-morphismes est définie par la composition verticale des modifications de **Bicat**$(\mathcal{T},\mathcal{S})$ sous-jacentes, la cohérente (5.3) est immédiate. cette composition est stricte. Pour trois morphismes $\underline{H}$, $\underline{K}$ et $\underline{L}$ de **Bimon$_{\mathbf{l}}$**$(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})$, le foncteur de composition horizontal,

$$\cdot : \mathbf{Bimon_l}(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})(\underline{K},\underline{L})\times\mathbf{Bimon_l}(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})(\underline{H},\underline{K})\longrightarrow\mathbf{Bimon_l}(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})(\underline{H},\underline{L}),$$

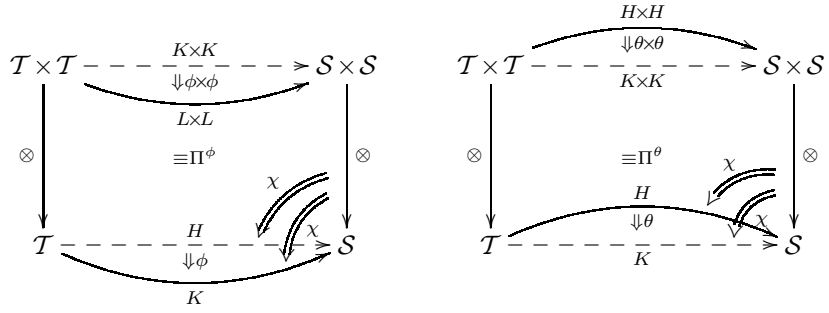
est défini sur les transformations monoïdales par l'égalité :

$$(\phi,\ \Pi^\phi,\ M^\phi)\cdot(\theta,\ \Pi^\theta,\ M^\theta) := (\phi.\theta,\ \Pi^\phi.\Pi^\theta,\ M^\phi.M^\theta) \tag{5.5.1}$$

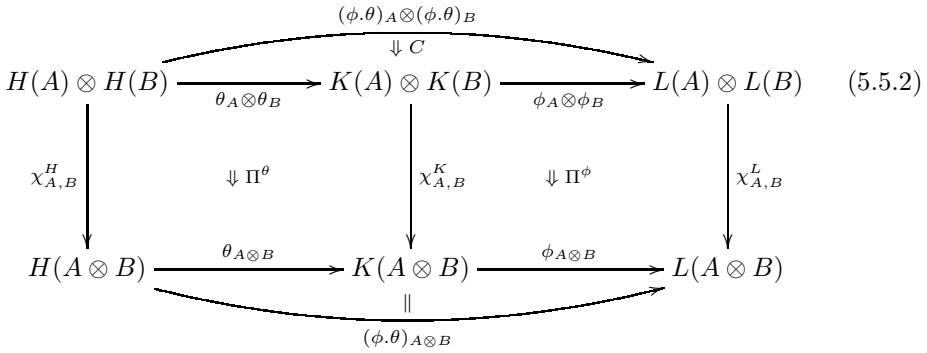
où $\phi.\theta$ est la composition des pseudo-transformations naturelles dans **Bicat**$(\mathcal{T},\mathcal{S})$. La modification inversible $M^\phi.M^\theta$ correspond à la composition dans **Bicat**$(\mathbb{1},\mathcal{S})(I, LI)$

$$((\phi.\theta)\circ I).\iota^H \xrightarrow{\sim} (\phi\circ I).((\theta\circ I).\iota^H) \xrightarrow{1.M^\theta} (\phi\circ I).\iota^K \xrightarrow{M^\phi} \iota^L.$$

La modification $\Pi^\phi.\Pi^\theta$ est définie par le collage dans **Bicat**$(\mathcal{T}\times\mathcal{T},\mathcal{S})$ en un *cylindre* des modifications Π^ϕ et Π^θ, soit :



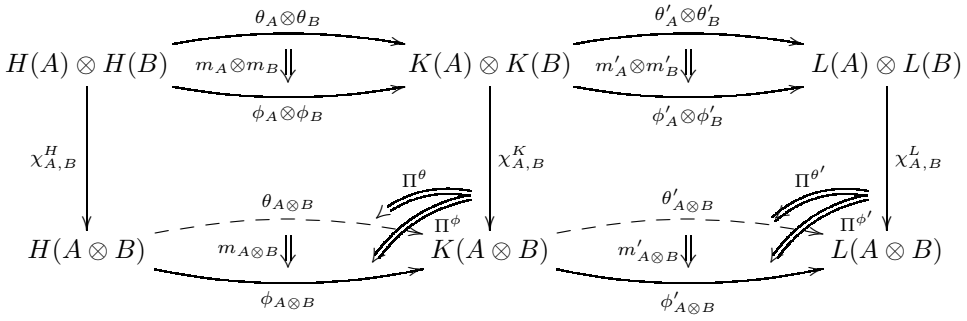
La composante à l'objet (A,B) de $\mathcal{T}^2$ de $\Pi^{\phi}.\Pi^{\theta}$ correspond ainsi au collage dans $\mathcal{S}$



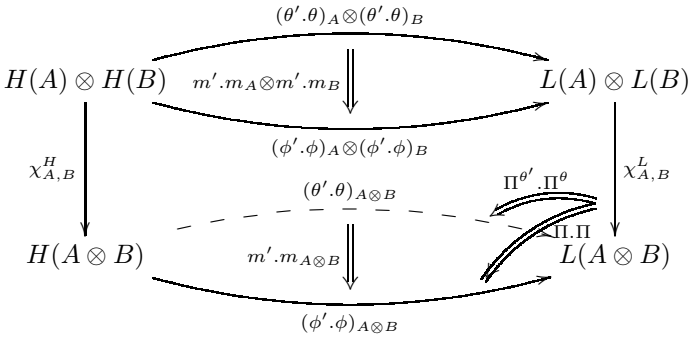
(5.5.2)

Ces modifications $\Pi^{\phi}.\Pi^{\theta}$ et $M^{\phi}.M^{\theta}$ sont cohérentes au sens de (5.2.1) et (5.2.2). Par exemple pour $\Pi^{\phi}.\Pi^{\theta}$, il suffit de coller les ``cubes'' de (5.2.1) pour Π^{ϕ} et Π^{θ} suivant les faces où interviennnent le 2-isomorphisme ω^K. Le résultat s'obtient en utilisant les théorèmes de cohérence pour les bicatégories ([**17**], Théorèmes 1.5 et 1.6).

La composition horizontale des 2-morphismes est définie via la composition horizontale des modifications de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T},\mathcal{S})$ sous-jacentes. Précisément, pour des 2-morphismes composables, $\underline{m} : \underline{\theta}\longrightarrow\underline{\phi}$ et $\underline{m'} : \underline{\theta'}\longrightarrow\underline{\phi'}$, la modification $m'.m$ est cohérente aux structures monoïdales. Par exemple, on obtient la première condition de cohérence avec le collage :



on applique aux arrêtes supérieures la contrainte de comparaison de l'homomorphisme $\otimes : \mathcal{S}\times\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{S}$, ce qui donne avec (5.5.2) la condition de cohérence cherchée :



Enfin, la compatibilité des compositions horizontales et verticales est immédiate. Ce qui clôt la définition des foncteurs de composition.

5.6. Contraintes d'unité et d'associativité de la bicatégorie $\mathbf{Bimon_l}(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})$. Ces contraintes sont induites par celles de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T},\mathcal{S})$ et celles de l'homomorphisme $\otimes : \mathcal{S}\times\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{S}$. En particulier pour $\underline{\mathcal{T}}$ une bicatégorie monoïdale et $\underline{\mathcal{S}}$ une 2-catégorie 2-monoïdale [**17**], $\mathbf{Bimon_l}(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})$ est une 2-catégorie.

Plus précisément, pour un morphisme $\underline{H} = (H,\ \chi,\ \iota,\ \omega,\ \gamma,\ \delta)$, l'unité en $\underline{H}$ est donnée par $\underline{I_H} = (I_H, \Pi^I, M^I)$ où I_H est la pseudo-transformation unité en H. La modification Π^I s'obtient avec la composition : $(I^{-1})(1.i^{\otimes}) : \chi.(I_H\otimes I_H)\longrightarrow\chi.(I_{H(-)\otimes H(-)})\longrightarrow(I_{H(-\otimes-)}).\chi^H$ où $i^{\otimes} : I_H\otimes I_H\longrightarrow I_{H(-)\otimes H(-)}$ est la modification de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T}\times\mathcal{T},\mathcal{S})$ induite par la contrainte d'unité du morphisme $\otimes\circ : \mathbf{Bicat}(\mathcal{T}\times\mathcal{T},\mathcal{S}\times\mathcal{S})\longrightarrow\mathbf{Bicat}(\mathcal{T}\times\mathcal{T},\mathcal{S})$. La modification M^I est donnée par l'isomorphisme $d_\iota^{-1} : \iota_I.I_{H(I)}\longrightarrow\iota_I$. Les conditions de cohérences (5.2.1) et (5.2.2) des modifications Π^I et M^I se vérifient en utilisant la cohérence aux unités de la pseudo transformation χ. La condition (5.2.1) est essentiellement due à l'expression aux unités de la modification $\omega : Ha.(\chi.(\chi\otimes 1))\Longrightarrow(\chi.(1\otimes\chi)).a$. La condition (5.2.2) s'obtient en utilisant les modifications γ et δ de **HBM5**. Pour Terminer avec les unités, on vérifie que les contraintes d'unité en H de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T},\mathcal{S})$, définissent des contraintes d'unité sur $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})$: $g_\theta : \underline{I_H}.\underline{\theta}\longrightarrow\underline{\theta}$ et $d_\theta : \underline{\theta}\longrightarrow\underline{\theta}.\underline{I_H}$.
Enfin, pour trois morphismes composables $\underline{\theta}$, $\underline{\phi}$ et $\underline{\omega}$ de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})$, la contrainte d'associativité $a : (\omega.\phi).\theta\longrightarrow\omega.(\phi.\theta)$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T},\mathcal{S})$ détermine une modification de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{T}},\underline{\mathcal{S}})$, naturelle en chaque terme. On montre alors (avec d'important diagrammes) que ces modifications définissent des contraintes d'associativité, cohérentes aux contraintes d'unité.

On vient de voir que les compositions et contraintes précédentes sont pour une part induites par celles de la bicatégorie $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T},\mathcal{S})$. Plus précisément, on a un

homomorphisme ˝oubli˝ de la structure monoïdale :

$$O : \mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{S}}) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{T}, \mathcal{S}).$$

Proposition 5.7. *Soient* $\underline{K} : \underline{\mathcal{T}} \longrightarrow \underline{\mathcal{S}}$ *un objet de* $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{S}})$ *et* $\theta : H \longrightarrow K$ *une équivalence dans* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ *alors* H *et* θ *peuvent être structurés en un objet* $\underline{H}$ *et un 1-morphisme* $\theta : \underline{H} \longrightarrow \underline{K}$ *de* $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{S}})$.

Démonstration succinte : Puisque θ est une équivalence, on dispose d'une pseudo-transformation θ^* et de modifications inversibles $1_K \longrightarrow \theta\theta^*$ et $\theta^*\theta \longrightarrow 1_H$ telles que l'on obtienne une adjonction $\theta \dashv \theta^*$. Les pseudo-transformations χ^H et ι^H sont alors définies par les compositions $\chi^H = (\theta^* \circ \otimes)(\chi^K)(\otimes \circ (\theta \times \theta))$ et $\iota^H = (\theta \circ I)\iota^K$. En utilisant la modification inversible $1_K \longrightarrow \theta\theta^*$, on dispose alors d'une modificaton inversible $\Pi^\theta : \chi^K(\otimes \circ (\theta \times \theta)) \Longrightarrow \theta\chi^H$, qui permet de définir en utilisant les conditions de cohérence (5.2.1) et (5.2.2) les modifications ω^H, γ^H et δ^H. □

6. Application aux (co)fibrations monoïdales

Soit $\mathcal{K}$ une petite catégorie. On note $\mathbf{Cofib}_\mathcal{K}$ la 2-catégorie des cofibrations sur $\mathcal{K}$, [**19**], dont les 1-morphismes et les 2-morphismes sont respectivement les $\mathcal{K}$-morphismes cocartésiens et les $\mathcal{K}$-transformations naturelles. Pour fixer les notations, rappelons que pour une cofibration $p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{K}$, un *coclivage* R [**19**, p. 181] correspond à la donnée, pour tout couple (X, f) où X est un objet de $\mathcal{F}$ et f un morphisme de $\mathcal{K}$ de source $p(X)$, d'un f-morphisme cocartésien de $\mathcal{F}$ de source X :

$$R_f(X) : X \longrightarrow b_f(X). \tag{6.0.1}$$

On sait depuis [**19**] et [**18**, p. 50] que l'on a une 2-équivalence définie sur les objets par la *construction de Grothendieck* (voir aussi [**37**, 1.10]),

$$E : \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Cat}) \longrightarrow \mathbf{Cofib}_\mathcal{K}. \tag{6.0.2}$$

L'image d'un homomorphisme $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ est une cofibration $p_F : E_F \longrightarrow \mathcal{K}$. Un objet de E_F est un objet (X, A) de $F_A \times \mathcal{K}$ (on note F_A pour $F(A)$). Un morphisme de E_F est un couple $(g, f) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ où $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{K}$ et $g : F_f(X) \longrightarrow Y$ est un morphisme de F_B (on note F_f pour $F(f)$), en particulier $1_{(X,A)} = (i_A(X), 1_A)$ où $i_A(X)$ est la composante en X de l'isomorphisme naturel $i_A : F_{1_A} \Longrightarrow 1_{F_A}$ fourni par la contrainte aux unités de l'homomorphisme F. La composition des morphismes est définie par

$$(g', f') \circ (g, f) := (g' \circ F_{f'}(g) \circ C_{f',f}(X), f' \circ f)$$

où $C_{f',f}(X)$ est la composante en X de l'isomorphisme naturel $C_{f',f} : F_{f' \circ f} \Longrightarrow F_{f'} \circ F_f$ fourni par la contrainte de comparaison de F. La cofibration p_F est la projection canonique sur $\mathcal{K}$. L'image par E d'une pseudo-transformation $\theta : F \longrightarrow F'$ est le $\mathcal{K}$-foncteur cocartésien $\Theta : E_F \longrightarrow E_{F'}$, défini au morphisme $(g, f) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ de E_F par $\Theta(g, f) = (\theta_B(g) \circ \theta_f^{-1}(X), f) : (\theta_A(X), A) \longrightarrow (\theta_B(Y), B)$. Enfin, L'image d'une modification $m : \theta \Longrightarrow \theta'$ est la $\mathcal{K}$-transformation $M : \Theta \Longrightarrow \Theta'$ dont la composante en un objet (X, A) de E_F est donnée par le morphisme : $(m_A(X) \circ i_A(\theta_A(X)), 1_A) : (\theta_A(X), A) \longrightarrow (\theta'_A(X), A)$.

Une cofibration monoïdale [**7**, def. 1.4] est un homomorphisme $\underline{p} : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ de catégories monoïdales tel que le foncteur sous-jacent soit une cofibration sur $\mathcal{K}$ et pour laquelle le produit de deux morphismes cocartésiens est un morphisme cocartésien. Pour l'étude de tels objets, P. Carrasco et A. M. Cegarra ont défini dans loc. cit la notion de *pseudo-foncteur monoïdal* sur $\underline{\mathcal{K}}$ (def. 1.6) :

Définition 6.1. *Soit $\underline{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}, \otimes, a, I, g, d)$ une catégorie monoïdale. Un pseudo-foncteur monoïdal défini sur $\underline{\mathcal{K}}$, consiste à se donner :*

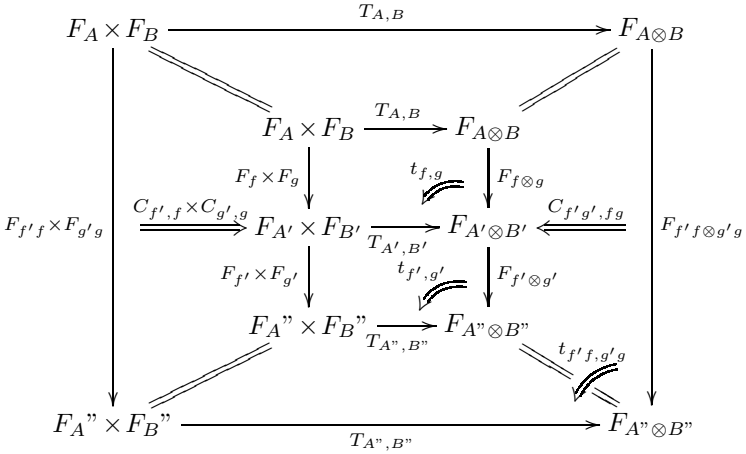
1. *Un pseudo-foncteur $(F, i, C) : \mathcal{K} \longrightarrow$ **Cat** c'est-à-dire un objet de* **Bicat**$(K,$ **Cat**$)$.
2. *Pour tous objets (A, B) de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, un foncteur (noté $\overline{\otimes}$ dans [**7**]) :*

$$T_{A,B} : F_A \times F_B \longrightarrow F_{A \otimes B},$$

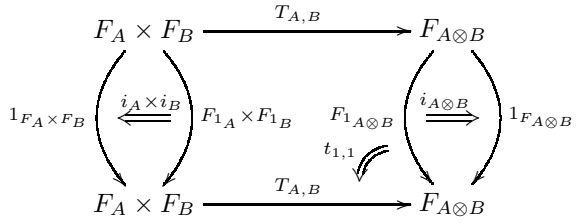
pour tous morphismes $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (A', B')$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, un isomorphisme naturel

$$t_{f,g} : F_{f \otimes g} \circ T_{A,B} \Longrightarrow T_{A',B'} \circ (F_f \times F_g),$$

tels que les 2-diagrammes suivants commutent :
(a) pour tous morphismes $(f' \circ f, g' \circ g) : (A, B) \longrightarrow (A', B') \longrightarrow (A", B")$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$,



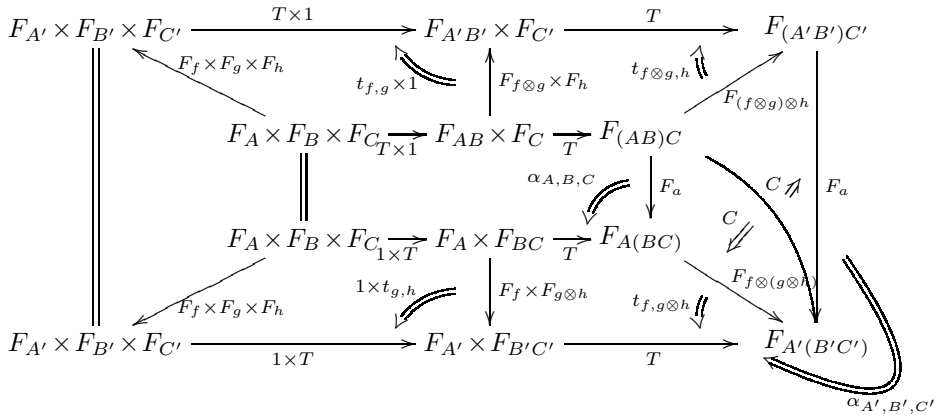
(b) pour tous objets (A, B) de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$,



3. *Un objet $\tilde{I}$ de F_I.*
4. *Pour tous objets (A, B, C) de $\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, un isomorphisme naturel :*

$$\alpha_{A,B,C} : F_{a_{A,B,C}} \circ T_{AB,C} \circ (T_{A,B} \times 1_{F_C}) \Longrightarrow T_{A,BC} \circ (1_{F_A} \times T_{B,C}),$$

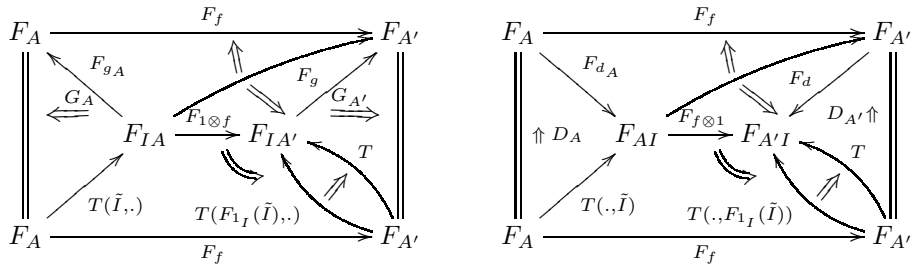
tel que pour tous morphismes $(f,g,h):(A,B,C)\longrightarrow(A',B',C')$ *de* $\mathcal{K}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, *le diagramme suivant commute :*



5. *Pour tout objet* A *de* $\mathcal{K}$, *des isomorphismes naturels (compte tenu de* d_A : $A\longrightarrow A\otimes I$*)*

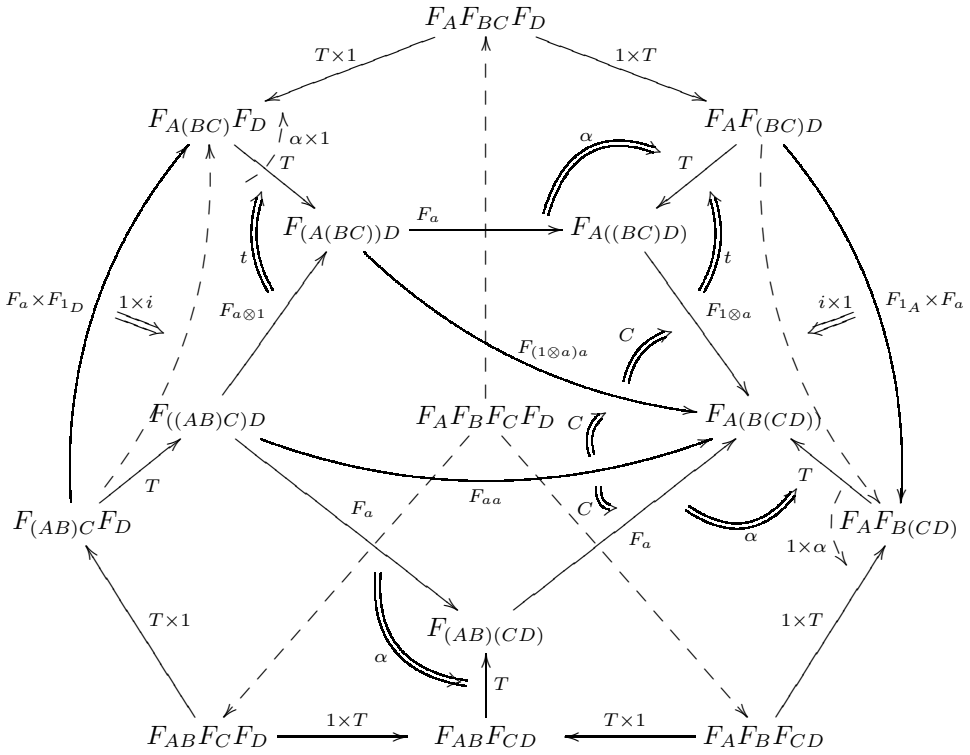
$$G_A : F_{g_A}\circ T_{I,A}(\tilde{I},.)\Longrightarrow 1_{F_A} \quad \text{et} \quad D_A : T_{A,I}(.,\tilde{I})\Longrightarrow F_{d_A}$$

tel que pour tout morphisme $f : A\longrightarrow A'$ *de* $\mathcal{K}$ *le diagramme suivant commute :*

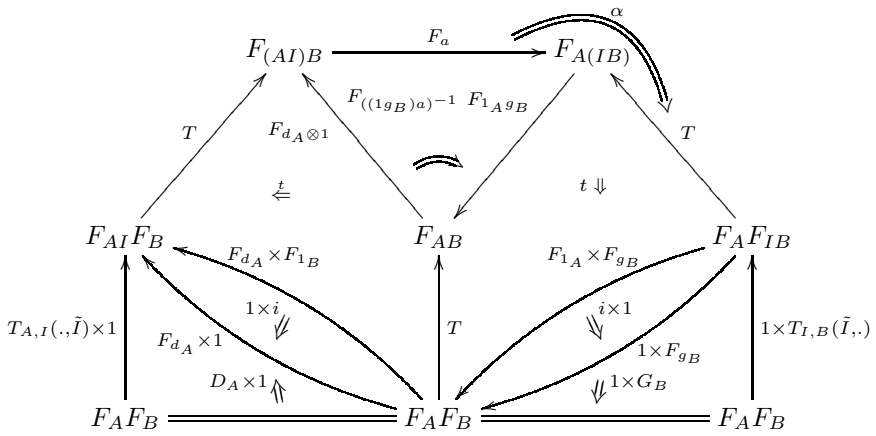


Ces données devant être cohérentes c'est-à-dire que les deux diagrammes suivants commutent, le premier diagramme correspondant au polyèdre K_5 *de Stasheff [**36**] (dégénéré au sommet* $F_AF_BF_CF_D$ *puisque* **Cat** *est stricte) : pour tous objets*

(A, B, C, D) *de* $\mathcal{K}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K}$,



pour tous objets (A, B) *de* $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ *(compte tenu que* $d_A : A\longrightarrow A\otimes I$*)*,



On désigne par **Cat** la 2-catégorie monoïdale des petites catégories munies du produit cartésien.

Lemme 6.2. *Un pseudo-foncteur monoïdal sur* $\underline{\mathcal{K}}$ *est un objet de la bicatégorie* $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat})$.

Démonstration. Les points 2) et 3) de la définition précédente correspondent aux pseudo-transformations $\chi = (T, t^{-1})$ et ι de **HBM2** et **HBM3**, 5.1. Les points 4) et 5) correspondent aux modifications inversibles $\omega = \alpha$, $\gamma = G$ et $\delta = D^{-1}$ de **HBM4** et **HBM5**, tandis que le point 6) correspond aux conditions de cohérence de [**17**], HTA1 et HTA2. □

On étend de manière évidente au cas monoïdal les notions de $\underline{\mathcal{K}}$-morphismes cocartésiens et de $\underline{\mathcal{K}}$-transformations naturelles, les objets sous-jacents étant des objets monoïdaux. On désigne par $\mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}}$ la 2-catégorie des cofibrations monoïdales sur $\underline{\mathcal{K}}$. La variante pour le cas moinoïdal de la 2-équivalence (6.0.2) est la suivante :

Théorème 1. *On a une biéquivalence* $\underline{E} : \mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Cat}}) \longrightarrow \mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}}$ *qui est localement un isomorphisme, d'homomorphisme sous-jacent après oubli des structures monoïdales celui de la 2-équivalence (6.0.2).*

Démonstration. L'homomorphisme $\underline{E}$ est donc tel que le diagramme suivant commute, les flèches verticales étant celles d'oublies des structures monoïdales,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Cat}}) & \xrightarrow{\underline{E}} & \mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Cat}) & \xrightarrow[6.0.2]{} & \mathbf{Cofib}_{\mathcal{K}}. \end{array}$$

Soit $\underline{F} = (F,\ \chi,\ \iota,\ \alpha,\ \gamma,\ \delta)$ un objet de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat})$. Soit $p_F : E_F \longrightarrow \mathcal{K}$ la cofibration image par E, (6.0.2) du pseudo-foncteur F. Avec loc. cit. prop. 1.7, cette cofibration est sous-jacente à une cofibration monoïdale $p_{\underline{F}} : \underline{E_F} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$, ce qui définit l'homomorphisme $\underline{E}$ sur les objets. Pour mémoire, en reprenant les notations de 6.1, rappelons que le foncteur $\otimes : E_F \times E_F \longrightarrow E_F$ est défini sur les objets par $(X, A) \otimes (Y, B) = (T_{A,B}(X, Y), A \otimes B)$ et sur les morphismes par $(x, f) \otimes (y, g) = (T_{A',B'}(x, y) \circ t_{f,g}(x, y), f \otimes g)$. La contrainte d'associativité de $(E_F, \otimes)$ est définie en utilisant la modification $\alpha : Fa.(\chi.(\chi \otimes 1)) \Longrightarrow (\chi.(1 \otimes \chi))$, son expression aux objets (X, A), (Y, B) et (Z, C) de E_F est donnée par l'isomorphisme

$$((X, A)(Y, B))(Z, C) \xrightarrow{(\alpha_{A,B,C}(X,Y,Z),\ a)} (X, A)((Y, B)(Z, C)) .$$

Enfin, l'objet $\tilde{I}$ de F_I et les modifications γ et δ permettent de définir la contrainte d'unité. Son expression en (X, A) est donnée par les isomorphismes

$$(\gamma_A(X),\ g_A) : (\tilde{I}, I)(X, A) \longrightarrow (X, A) \quad \text{et} \quad (\delta_A(X),\ d_A) : (X, A) \longrightarrow (X, A)(\tilde{I}, I).$$

On obtient ainsi une cofibration monoïdale pour laquelle $p_{\underline{F}}$ est la projection sur $\underline{\mathcal{K}}$,

$$p_{\underline{F}} : \underline{E_F} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}} . \tag{6.2.1}$$

L'image par $\underline{E}$ d'un 1-morphisme $\underline{\theta} = (\theta, \Pi^\theta, M^\theta) : \underline{F} \longrightarrow \underline{G}$ de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat})$ est construite de la façon suivante. L'image par (6.0.2) de la pseudo-transformation $\theta : F \longrightarrow G$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Cat})$ donne un $\mathcal{K}$-morphisme $\Theta : E_F \longrightarrow E_G$. Les modifications Π^θ et M^θ et leurs conditions de cohérence (5.2.1) et (5.2.2) permettent de munir ce

$\mathcal{K}$-morphisme Θ de contraintes de comparaison et d'unité cohérentes aux structures monoïdales, ce qui définit l'homomorphisme $\underline{E}$ sur les morphismes. La contrainte de comparaison est donnée aux objets (X, A) et (Y, B) par l'isomophisme de $\underline{E_{\mathcal{G}}}$:

$$((\Pi^{\theta}_{A,B}(X,Y))^{-1} \circ i_{AB}, 1_{AB}) : \Theta((X,A)(Y,B)) \longrightarrow \Theta(X,A)\Theta(Y,B) \qquad (6.2.2)$$

dont la première composante est l'isomorphisme de G_{AB} :

$$G_{1_{AB}}\theta_{AB}T^F_{A,B}(X,Y) \xrightarrow{\ i_{AB}\ } \theta_{AB}T^F_{A,B}(X,Y) \xrightarrow{(\Pi^{\theta}_{A,B}(X,Y))^{-1}} T^G_{A,B}(\theta_A(X), \theta_B(Y)).$$

La contrainte d'unité est donnée par $(M^{\theta} \circ i_I, 1_I) = \Theta(\tilde{I}, I) \longrightarrow (\tilde{I}, I)$ dont la première composante est l'isomorphisme $M^{\theta} \circ i_I : G_{1_I}(\theta_I(\tilde{I})) \longrightarrow \tilde{I}$. Enfin, l'image par $\underline{E}$ d'un 2-morphisme $\underline{m} : \underline{\theta} \longrightarrow \underline{\theta'}$ de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat})$ est la $\mathcal{K}$-transformation naturelle $M : \Theta \longrightarrow \Theta'$ image de m par la 2-équivalence (6.0.2). La cohérence de $\underline{m}$ permet d'établir que l'on est alors en présence d'une $\mathcal{K}$-transformation monoïdale. Pour deux objets $\underline{F}$ et $\underline{G}$ de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat})$, on obtient ainsi un foncteur

$$\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat})(\underline{F}, \underline{G}) \longrightarrow \mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}}(\underline{E_F}, \underline{E_G}), \qquad (6.2.3)$$

qui définit localement $\underline{E}$. Enfin, en considérant les compositions horizontales on obtient un homomorphisme strict :

$$\underline{E} : \mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat}) \longrightarrow \mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}}.$$

Les résultats de [**7**] montrent que $\underline{E}$ est biessentiellement surjectif. En effet, pour $p : \underline{\mathcal{F}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ une cofibration monoïdale, le choix d'un coclivage (6.0.1) détermine un pseudo-foncteur monoïdal $\underline{F}$ (loc. cit. prop. 1.5 et def. 1.6). L'image par $\underline{E}$ de ce pseudo-foncteur fournit alors une cofibration monoïdale qui est $\underline{\mathcal{K}}$-équivalente à la cofibration $p : \underline{\mathcal{F}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$, (loc. cit. fin de la section 1).

Pour terminer, montrons que $\underline{E}$ est localement un isomorphisme c'est-à-dire que pour tous pseudo-foncteurs monoïdaux $\underline{F}$ et $\underline{G}$, (6.2.3) est un isomorphisme. Ce foncteur est clairement fidèle, montrons qu'il est plein. Soit $\underline{M} : \underline{\Theta} \longrightarrow \underline{\Theta'}$ un morphisme de $\mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}}(\underline{E_F}, \underline{E_G})$. Par oubli des structures monoïdales, $\underline{M}$ définit un morphisme M de $\mathbf{Cofib}_{\mathcal{K}}(E_F, E_G)$. Via l'isomorphisme

$$\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Cat})(F, G) \simeq \mathbf{Cofib}_{\mathcal{K}}(E_F, E_G) \qquad (6.2.4)$$

donné par la 2-équivalence (6.0.2), ce morphisme M provient d'une modification $m : \theta \longrightarrow \theta'$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Cat})$, et, la composante de M en un objet (X, A) de E_F est donnée par l'A-isomorphisme naturel :

$$(m_A(X) \circ i_A(\theta_A(X)), 1_A) : (\theta_A(X), A) \longrightarrow (\theta'_A(X), A).$$

En utilisant la cohérence de $\underline{M}$ aux contraintes de comparaison et d'unité des morphismes $\underline{\Theta}$ et $\underline{\Theta'}$, on vérifie facilement que $m : \underline{\theta} \longrightarrow \underline{\theta'}$ est une modification de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat})$. Ainsi, le foncteur (6.2.3) est plein. Montrons à présent qu'il est bijectif sur les objets. Soit $\underline{\Theta} : \underline{E_F} \longrightarrow \underline{E_G}$ un $\mathcal{K}$-homomorphisme c'est-à-dire un objet de $\mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}}(\underline{E_F}, \underline{E_G})$. Comme précédemment, l'homomorphisme $\Theta : E_F \longrightarrow E_G$ provient, via l'isomorphisme (6.2.4), d'une pseudo-transformation

$\theta : F \longrightarrow G$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Cat})$. Par ailleurs, puisque $\underline{\Theta}$ est un $\mathcal{K}$-homomorphisme soit que $p_{\underline{G}}\underline{\Theta} = p_{\underline{F}}$ et comme les homomorphismes $p_{\underline{G}}$ et $p_{\underline{F}}$ sont stricts, la contrainte de comparaison de $\underline{\Theta}$ exprimée en (X, A) et (Y, B) :

$$\Phi^{\Theta}((X, A), (Y, B)) : \Theta((X, A)(Y, B)) \longrightarrow \Theta((X, A))\Theta((Y, B))$$

ainsi que la contrainte d'unité de $\underline{\Theta}$, $\Phi_o^{\Theta} : \Theta((\tilde{I}, I)) \longrightarrow (\tilde{I}, I)$, sont respectivement un AB-isomorphisme et un I-isomorphisme et sont donc de la forme

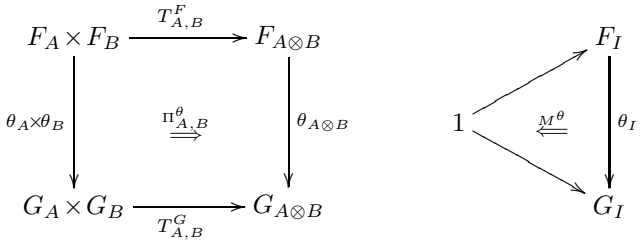
$$\Phi^{\Theta}((X, A), (Y, B)) = (\phi^{\Theta}_{A,B}(X, Y), 1_{AB}) \quad \text{et} \quad \Phi_o^{\Theta} = (\phi_o^{\Theta}, 1_I).$$

En utilisant la naturalité des contraintes de comparaison et d'unité, d'abord exprimée pour des A et B morphismes puis pour des morphismes quelconques, on montre que pour X et Y des A et B-objets, les uniques isomorphismes $\Pi^{\theta}_{A,B}(X, Y)$ et M^{θ} donnés par :

$$\Pi^{\theta}_{A,B}(X, Y) = [\phi^{\Theta}_{A,B}(X, Y) \circ i_{AB}^{-1}]^{-1} : T^{G}_{A,B}(\theta_A(X), \theta_B(Y)) \longrightarrow \theta_{AB} T^{F}_{A,B}(X, Y)$$

$$M^{\theta} = \phi_o^{\Theta} \circ i_I^{-1} : \theta_I(\tilde{I}) \longrightarrow \tilde{I}$$

sont d'une part, les composantes d'isomorphismes naturels :



et d'autre part, que ces isomorphismes sont eux-mêmes les composantes de modifications inversibles, structurant θ en un 1-morphisme de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Cat})$. Ainsi, (6.2.3) est un isomorphisme. □

6.3. Cas des fibrations monoïdales. En passant à la catégorie duale $\mathcal{K}^{op}$ de $\mathcal{K}$, on obtient une 2-équivalence (voir aussi [**18**])

$$\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat}) \longrightarrow \mathbf{Fib}_{\mathcal{K}}, \tag{6.3.1}$$

où $\mathbf{Fib}_{\mathcal{K}}$ est la 2-catégorie des fibrations sur $\mathcal{K}$ dont les objets, les 1-morphismes et les 2-morphismes sont respectivement les $\mathcal{K}$-catégories fibrées, les $\mathcal{K}$-morphismes cartésiens et les $\mathcal{K}$-transformations naturelles. Pour une catégorie monoïdale $\underline{\mathcal{K}}$, on note par $\underline{\mathcal{K}^{op}}$ la structure monoïdale induite sur la catégorie opposée $\mathcal{K}^{op}$ c'est-à-dire où le produit est sur les objets celui de $\mathcal{K}$ et sur les flèches celui de $\mathcal{K}$ sur les flèches opposées, (la notation $\underline{\mathcal{K}}[1]^{co}$ est plus standard [**24**] lorsque $\underline{\mathcal{K}}$ est regardée comme une bicatégorie à un seul objet). On a alors une biéquivalence qui est localement un isomorphisme, d'homomorphisme sous-jaccent (6.3.1),

$$\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}^{op}}, \mathbf{Cat}) \longrightarrow \mathbf{Fibmon}_{\underline{\mathcal{K}}} \tag{6.3.2}$$

où $\mathbf{Fibmon}_{\underline{\mathcal{K}}}$ est la 2-catégorie dont les objets, les 1-morphismes et les 2-morphismes sont respectivement les fibrations monoïdales sur $\underline{\mathcal{K}}$, les $\underline{\mathcal{K}}$-homomorphismes cartésiens et les $\underline{\mathcal{K}}$-transformations naturelles.

7. Torseurs pour l'action d'une gr-catégorie

Une action à gauche (resp. à droite) d'une catégorie monoïdale $\underline{\mathcal{M}}$ sur une catégorie $\mathcal{C}$ consiste classiquement à se donner un homomorphisme de catégories monoïdales ([**10**] par exemple) $\alpha : \underline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{C})$ (resp. $\alpha : \underline{\mathcal{M}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{C})$), où $\mathcal{E}nd(\mathcal{C})$ est la catégorie monoïdale des endomorphismes de $\mathcal{C}$. Un morphisme $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ de catégories munies d'une $\underline{\mathcal{M}}$-action est un foncteur $\underline{\mathcal{M}}$-équivariant c'est-à-dire un foncteur F tel que pour tout objet X de $\mathcal{M}$, on dispose d'un isomorphisme naturel, $F \circ \alpha(X) \simeq \alpha'(X) \circ F$, ces isomorphismes devant satisfaire certaines conditions de compatibilité avec l'action de $\mathcal{M}$. Cela dit, la 2-catégorie des (petites) catégories munie d'une $\underline{\mathcal{M}}$-action à gauche, dont les morphismes sont les foncteurs $\underline{\mathcal{M}}$-équivariants et les 2-morphismes les tranformations naturelles $\underline{\mathcal{M}}$-équivariantes, est la 2-catégorie $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{M}}[1], \mathbf{Cat})$. Cette 2-catégorie est *pointée* par l'objet correspondant à l'action de $\underline{\mathcal{M}}$ sur $\mathcal{M}$ donnée par les translations à gauche $t_g : \underline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{M})$.

7.1. Soit $\alpha : \underline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{C})$ une action à gauche sur $\mathcal{C}$ et soit A un objet de $\mathcal{C}$. Le foncteur $O_A : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$, $X \mapsto {}^X A$ est $\underline{\mathcal{M}}$-équivariant pour l'action sur $\mathcal{M}$ donnée par les translations à gauche t_g. En d'autres termes, le foncteur $O_A : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ est la composante d'une pseudo-transformation de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{M}}[1], \mathbf{Cat})$,

$$O : t_g \Longrightarrow \alpha. \tag{7.1.1}$$

L'isomorphisme structural en un objet X de $\mathcal{M}$ de cette pseudo-transformation, $O_X : O_A \circ t_g(X) \Longrightarrow \alpha(X) \circ O_A$, est donné en un objet Y de $\mathcal{M}$ par la contrainte de comparaison de $\alpha : O_X(Y) := \Phi(X,Y)_A : {}^{(XY)}A \longrightarrow {}^X({}^Y A)$.

7.2. A toute catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une $\underline{\mathcal{M}}$-action est associée fontoriellement une bicatégories. Plus précisément, notons $\mathbf{Bicat}^{[1]}$ la catégorie des bicatégories [**1**] et $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{M}}[1], \mathbf{Cat})^{[1]}$ la catégorie sous-jacente à la 2-catégorie $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{M}}[1], \mathbf{Cat})$. On a un foncteur :

$$E : \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{M}}[1], \mathbf{Cat})^{[1]} \longrightarrow \mathbf{Bicat}^{[1]}, \quad \alpha \longmapsto E_\alpha \ . \tag{7.2.1}$$

La bicatégorie E_α, image de α admet pour objets ceux de $\mathcal{C}$. Un 1-morphisme $A \longrightarrow B$ de E_α est un couple (f, X) où X est un objet de $\mathcal{M}$ et $f : {}^X A \longrightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{C}$. Un 2-morphisme $x : (f, X) \longrightarrow (f', X')$ de E_α est un morphisme $x : X \longrightarrow X'$ de $\mathcal{M}$ tel que $f = f' \circ {}^x A$. L'unité en A est définie par le morphisme $\Phi_o(A) : {}^I A \longrightarrow A$ donné par la contrainte à l'unité de l'homomorphisme α. La composition sur les 1-morphismes $(f, X) : A \longrightarrow B$ et $(g, Y) : B \longrightarrow C$, est donnée par $(g, Y) \circ (f, X) := (g * f, Y \otimes X)$ avec $g * f := g \circ {}^Y f \circ \Phi(X,Y)_A : {}^{(Y \otimes X)}A \longrightarrow {}^Y({}^X A) \longrightarrow {}^Y B \longrightarrow C$, où $\Phi(X,Y)_A$ est la contrainte de comparaison de l'homomorphisme α. Les compositions verticales et horizontales sur les 2-morphismes sont respectivement données par la composition et la tensorisation dans

$\underline{\mathcal{M}}$. Les contraintes de la bicatégorie E_α sont fournies par celles de $\underline{\mathcal{M}}$.

Dans toute la suite de cette section, $\underline{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \otimes, I, a, d, g)$ est une *gr*-catégorie. Puisque les objets de $\underline{\mathcal{G}}$ sont inversibles, une action à gauche de $\underline{\mathcal{G}}$ sur une petite catégorie $\mathcal{C}$ revient à la donnée d'un homomorphisme $\alpha : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{C})$ où $\mathcal{E}q(\mathcal{C})$ est la *gr*-catégorie stricte des équivalences de la catégorie $\mathcal{C}$.

Lemme 7.3. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un objet A de $\mathcal{C}$ tel que le foncteur O_A de (7.1.1) soit une équivalence.*
2. *Pour tout objet A de $\mathcal{C}$ le foncteur O_A est une équivalence.*
3. *$\mathcal{C}$ est un groupoïde et la bicatégorie E_α définie par (7.2.1) est biéquivalente à la bicatégorie $\mathbf{1}$.*

Démonstration. 1$\Longrightarrow$2. Pour B un objet de $\mathcal{C}$, il existe un objet Y de $\mathcal{G}$ et un isomorphisme $i : {}^{Y}A \longrightarrow B$ alors, pour tout objet X de $\mathcal{G}$, l'isomorphisme :

$$\lambda_X : {}^{(XY)}A \xrightarrow{\Phi(X,Y)(A)} {}^{X}({}^{Y}A) \xrightarrow{{}^{X}i} {}^{X}B,$$

constitue la composante en X d'un isomorphisme naturel $\lambda : O_A \circ t_d(Y) \Longrightarrow O_B$, et O_B est une équivalence si O_A en est une.

2$\Longrightarrow$3. $\mathcal{C}$ est un groupoïde puisque $\mathcal{G}$ l'est. E_α est alors un bigroupoïde et il est facile de voir que $\pi_o(E_\alpha) = 1$. Il reste donc à montrer que pour tout objet A de E_α, $\pi_0(E_\alpha(A)) = 1$ et $\pi_1(E_\alpha(A)) = 1$ c'est-à-dire que pour tout objet A, la *gr*-catégorie $E_\alpha(A)$ a des groupes d'homotopie triviaux. Pour cela, considérons le noyau homotopique $N(1_{\underline{\mathcal{G}}})$ (2.3) de l'isomorphisme $1_{\underline{\mathcal{G}}} : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$. Les groupes d'homotopie de $N(1_{\underline{\mathcal{G}}})$ sont triviaux. Par ailleurs, on dispose d'un homomorphisme strict,

$$\Delta_A : N(1_{\underline{\mathcal{G}}}) \longrightarrow E_\alpha(A),$$

défini à l'objet (X, v) de $N(1_{\underline{\mathcal{G}}})$ par l'objet $(\Phi_o(A) \circ O_A(v), X)$ de $E_\alpha(A, A)$. Si O_A est une équivalence, on montre facilement que Δ_A est un isomorphisme et les groupes d'homotopie de $E_\alpha(A)$ sont donc triviaux.

3$\Longrightarrow$1. Soit A un objet de $\mathcal{C}$, alors O_A est essentiellement surjectif puisque $\pi_o(E_\alpha) = 1$. De plus, la longue suite exacte d'homotopie (2.5) appliquée à Δ_A montre que Δ_A est une équivalence, ce qui ne peut avoir lieu que si O_A est une équivalence. □

On aurait pu mener cette preuve en considérant la catégorie $\mathcal{C}$ comme au-dessus de la catégorie **1** à un objet et utiliser pour une partie, [**10**] proposition 2.2.. Les trois parties du lemme précédent sont équivalentes à la donnée d'une action *simplement transitive* c'est-à-dire que le foncteur induit par l'action $\mathcal{G} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ est une équivalence.

Définition 7.4. *On appelle $\underline{\mathcal{G}}$-torseur à gauche, un groupoïde $\mathcal{C}$ muni d'une $\underline{\mathcal{G}}$-action à gauche vérifiant l'une des propriétés du lemme précédent. On note par* $\mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})$ *la sous 2-catégorie pleine de* $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}[1], \mathbf{Cat})$ *dont les objets sont les $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs à gauche.*

Le groupoïde $\mathcal{G}$ est lui même un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur pour l'action donnée par les translations à gauche $t_g : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$, et, la 2-catégorie $\mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})$ doit être considérée *pointée* par ce $\underline{\mathcal{G}}$-torseur t_g. On note par $\mathcal{E}nd_{\underline{\mathcal{G}}}(t_g)$, la catégorie monoïdale stricte obtenue avec la sous 2-catégorie pleine de $\mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})$ ayant pour seul objet le $\underline{\mathcal{G}}$-torseur $t_g : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$. $\mathcal{E}nd_{\underline{\mathcal{G}}}(t_g)$ est la catégorie monoïdale des endomorphismes de $\mathcal{G}$, $\underline{\mathcal{G}}$-équivariants pour les actions de translation. Pour un objet X de $\mathcal{G}$, la translation à droite par X, $t_d(X) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$, est un endomorphisme de $\mathcal{G}$, $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant pour les translations à gauche, les contraintes de compatibilité à l'action étant données par les contraintes d'associativité et d'unité de $\underline{\mathcal{G}}$. On est en fait en présence d'un homomorphisme (noté T_d pour le différencier de l'homomorphisme $t_d : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{G})$),

$$T_d : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}nd_{\underline{\mathcal{G}}}(t_g),\ X \mapsto t_d(X), \tag{7.4.1}$$

dont les contraintes de comparaison et d'unité sont définies à partir de celles d'associativité et d'unité de $\underline{\mathcal{G}}$.

Lemme 7.5. *L'homomorphisme T_d est une équivalence monoïdale.*

Démonstration. T_d est clairement fidèle. On montre la pleinitude et l'essentielle surjectivité en utilisant la $\underline{\mathcal{G}}$-équivariance des objets considérés. □

Soient $\mathcal{C}$ un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur pour l'action $\alpha : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{C})$ et A un objet de $\mathcal{C}$. le foncteur O_A étant une équivalence (7.3), la pseudo-transformation $O : t_g \Longrightarrow \alpha$ de (7.1.1) est une équivalence de $\mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})$, (1.2.4). Tout $\underline{\mathcal{G}}$-torseur est ainsi équivalent au $\underline{\mathcal{G}}$-torseur t_g, et l'inclusion canonique

$$\mathcal{E}nd_{\underline{\mathcal{G}}}(t_g)[1] \hookrightarrow \mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}}) \tag{7.5.1}$$

est une 2-équivalence. Avec le lemme précédent on obtient en conclusion:

Proposition 7.6. *l'homomorphisme $\underline{\mathcal{G}}[1]^{op} \longrightarrow \mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})$ composé de (7.4.1) et (7.5.1) est une biéquivalence de bicatégorie.*

Corollaire 7.7. *La 2-catégorie $\mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})$ est un 2-groupoïde.*

8. Bitorseurs pour l'action d'une gr-catégorie

Dans toute la suite, $\underline{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \otimes, I, a, d, g)$ et $\underline{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}, \otimes, I, a, d, g)$ sont des gr-catégories. Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\alpha : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{C})$ une action à droite de $\underline{\mathcal{G}}$ sur $\mathcal{C}$, on peut alors faire agir $\underline{\mathcal{H}}$ à gauche sur $\mathcal{C}$ avec une action compatible avec celle de $\underline{\mathcal{G}}$ (voir par exemple [**3**, def. 3.1.8] pour les conditions de compatibilité). On parle alors de $(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{G}})$-action. Les catégories munies d'une $(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{G}})$-action et les foncteurs $(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{G}})$-équivariants sont les objets et les 1-morphismes de la 2-catégorie $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{H}}[1], \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}[1]^{op}, \mathbf{Cat}))$. On s'intéresse ici à la 2-catégorie

$$\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{H}}[1], \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})), \tag{8.0.1}$$

des petites catégories $\mathcal{C}$ munies d'une $(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{G}})$-action pour lesquelles la $\underline{\mathcal{G}}$-action donne un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur à droite.

Notation 8.1. *Soit $\mathcal{C}$ un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur à droite pour l'action $\alpha : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{C})$. On note par $\mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)$ la gr-catégorie stricte des auto-équivalences $\underline{\mathcal{G}}$-équivariantes de $\mathcal{C}$, obtenue avec la sous 2-catégorie pleine de $\mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})$ dont le seul objet est α.*

L'ensemble des résultats obtenus pour les torseurs à gauche se transpose aux torseurs à droite. En particulier, l'équivalence momoïdale $T_g : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(t_d)$ composée avec l'inclusion canonique $i_{t_d} \colon \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(t_d)[1] \hookrightarrow \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})$ donne une biéquivalence:

$$\underline{\mathcal{G}}[1] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}}). \tag{8.1.1}$$

Un objet $\beta[1]$ de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{H}}[1], \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}}))$ correspond à la donnée d'un torseur à droite $\alpha : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{C})$ et d'un homomorphisme $\beta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)$ définissant l'action à gauche de $\underline{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{C}$ compatible avec celle de α. Un exemple important de tel objet est celui obtenu à partir d'un homomorphisme, $(r, \Phi^r) : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$. Un tel homomorphime détermine une action à gauche sur le $\underline{\mathcal{G}}$-torseur t_d obtenue par la composition $T_g \circ r : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(t_d)$. On notera par (r, T_g) la $(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{G}})$-action ainsi définie. Cela dit, la biéquivalence de (8.1.1) donne une biéquivalence (les [1] seront souvent omis dans la suite)

$$\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{H}}, \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})), \tag{8.1.2}$$

et toute $\underline{\mathcal{H}}$-action compatible sur un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur est donc équivalente à une action de la forme (r, T_g). Le résultat suivant est bien connu dans la cadre (faisceautique) des bitorseurs pour l'action d'un groupe G (par ex. [**2**, p. 405]).

Lemme 8.2. *Soit $\mathcal{C}$ un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur à droite pour l'action $\alpha : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{C})$ et $\beta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)$, une $\underline{\mathcal{H}}$-action sur $\mathcal{C}$ compatible avec celle de $\underline{\mathcal{G}}$ c'est-à-dire soit $\beta[1]$ un objet de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{H}}, \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}}))$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ est un $\underline{\mathcal{H}}$-torseur à gauche pour l'action induite par β.*
2. *$\beta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)$ est une équivalence.*

Démonstration. Soit A un objet de $\mathcal{C}$. Pour l'action à droite, le foncteur $O_A : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}$, $X \mapsto A^X$ est une équivalence $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante, en d'autres termes, la pseudo-transformation $O : t_d \Longrightarrow \alpha$ simimlaire à celle de (7.1.1) pour les actions à gauche est une équivalence de $\mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})$. On suppose choisi une équivalence quasi-inverse $O_A^* : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{G}$ de O_A tel que l'on ait une adjonction $O_A^* \dashv O_A$. Ce choix détermine par *accouplement* (voir 1.2.4) des données de $\underline{\mathcal{G}}$-équivariance pour l'équivalence O_A^*, définissant une équivalence $O^* : \alpha \Longrightarrow t_d$ de $\mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})$ quasi-inverse de O. Les choix précédents permettent de construire un homomorphisme de *gr*-catégories:

$$d_A : \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha) \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}. \tag{8.2.1}$$

Pour un objet F et un morphisme $m : F \longrightarrow F'$ de $\mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)$, soit pour un foncteur $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant $F : \alpha \longrightarrow \alpha$ et une $\underline{\mathcal{G}}$-transformation $m : F \Longrightarrow F'$, l'objet $d_A(F)$ et le morphisme $d_A(m)$ de $\underline{\mathcal{G}}$ sont respectivement définis par les égalités

$$d_A(F) = O_A^*(F(A)) \quad \text{et} \quad d_A(m) = O_A^*(m_A),$$

où $m_A : F(A) \longrightarrow F'(A)$ est la composante en A de la transformation naturelle m. La contrainte de comparaison de d est obtenue en utilisant la $\underline{\mathcal{G}}$-transformation $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Longrightarrow O_A O_A^*$ intervenant dans l'adjonction dont l'expression en $F(A)$ est l'isomorphisme fonctoriel en F (on note à présent d pour d_A) :

$$F(A) \overset{\eta_{F(A)}}{\longrightarrow} A^{d(F)}. \tag{8.2.2}$$

Cet homomorphisme d est une équivalence de gr-catégories et peut être vu comme la localisation en α d'une biéquivalence quasi-inverse de (8.1.1). L'homomorphisme composé

$$\mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)[1] \overset{d[1]}{\longrightarrow} \underline{\mathcal{G}}[1] \overset{8.1.1}{\longrightarrow} \mathbf{Tors}_d(\mathcal{G}) \tag{8.2.3}$$

est équivalent dans $\mathbf{Bicat}(\mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)[1], \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}}))$ à l'homomorphisme inclusion cano-nique $i_\alpha : \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)[1] \hookrightarrow \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})$. Cette équivalence $i_{t_g} \circ T_g \circ d \Longrightarrow i_\alpha$ admet pour composante le foncteur O_A et son expression en F est donnée par la modification

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{t_g(d(F))} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle O_A}\downarrow & \Downarrow O_F & \downarrow{\scriptstyle O_A} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow[F]{} & \mathcal{C} \end{array} \tag{8.2.4}$$

où pour tout objet X de $\mathcal{G}$,

$$O_F(X) : A^{d(F)X} \approx (A^{d(F)})^X \overset{(\eta_F^{-1})^X}{\longrightarrow} (F(A))^X \approx F(A^X). \tag{8.2.5}$$

Avec l'homomorphisme définissant l'action à gauche de $\underline{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{C}$, $\beta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)$, on dispose alors d'un homomorphisme

$$r = d \circ \beta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}} \tag{8.2.6}$$

et ainsi d'une $(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{G}})$-action de la forme (r, T_g). Cette action est équivalente à la $(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{G}})$-action définie par l'homomorphisme β. Plus précisément, l'image de la pseudo-équivalence définie en (8.2.4) par l'homomorphisme prés multiplication par $\beta[1]$: $\mathbf{Bicat}(\mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}^{op}}(\alpha)[1], \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{H}}[1], \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}}))$, est une pseudo-équivalence de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{H}}[1], \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}}))$ (les inclusions canoniques sont omises)

$$T_g \circ r \Longrightarrow \beta \tag{8.2.7}$$

de composante l'équivalence O_A et dont l'expression en un objet H de $\mathcal{H}$ est donnée par la modification $O_H : O_A t_g r(H) \Longrightarrow \beta(H) O_A$ de $\mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}})$ déduite de (8.2.4). En un objet X de $\mathcal{G}$ on a (l'action $\beta(H)$ est notée par exponentiation à gauche de H),

$$O_H(X) : A^{r(H)X} \approx (A^{r(H)})^X \xrightarrow{\sim} ({}^H A)^X \approx {}^H(A^X). \tag{8.2.8}$$

Notons par $O'_A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{C}$, $H \mapsto {}^H A$ le foncteur $\underline{\mathcal{H}}$-équivariant pour l'action à gauche de $\underline{\mathcal{H}}$ sur $\mathcal{C}$ induite par β. Les composantes en $X = I$ de (8.2.8) déterminent un isomorphisme naturel $n : O_A r \Longrightarrow O'_A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{C}$ défini en un objet H de $\mathcal{H}$ par

l'isomorphisme :

$$n_H : A^{r(H)} \approx A^{r(H)I} \overset{O_H(I)}{\longrightarrow} {}^H(A^I) \approx {}^H(A).$$

Enfin, on sait que $\mathcal{C}$ est un $\underline{\mathcal{H}}$-torseur à gauche pour l'action induite par β si et seulement si O'_A est une équivalence ce qui a lieu, avec l'isomorphisme naturel précédent, si seulement si r est une équivalence puisque $O_A : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}$ en est une. Or $r = d \circ \beta$ est une équivalence si et seulement si β en est une puisque d en est une. □

Définition 8.3. *On appelle $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseur, un groupoïde $\mathcal{C}$ muni d'une $(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{G}})$-action tel que pour les actions à gauche et à droite, $\mathcal{C}$ soit un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur. On note par* $\mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}})$ *la sous 2-catégorie pleine de* $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Tors}_d(\underline{\mathcal{G}}))$ *dont les objets sont les $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs.*

Comme exemple de $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseur, on a celui du bitorseur trivial $\mathcal{G}_{tri} = (1_{\underline{\mathcal{G}}}, T_g)$. Par (8.1.2), $\mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}})$ est donc biéquivalente à une sous 2-catégorie pleine de $\underline{\mathbf{Biend}}(\underline{\mathcal{G}})$. Par le lemme (8.2) on a le résultat essentiel suivant.

Proposition 8.4. *L'homomorphisme* $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}})$, $r \mapsto (r, T_g)$ *est une biéquivalence.*

Ce résultat est à comparer avec ceux de L. Breen obtenus dans un cadre faisceautique, [**2**, th. 4.5.] pour un groupe G et [**3**, prop. 3.1.12.] pour un *gr*-champ $\mathcal{G}$. La biéquivalence précédente devrait être sous-jacente à une biéquivalence monoïdale utilisant la bicatégorie monoïdale des $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs $\underline{\mathbf{Bitors}}(\underline{\mathcal{G}})$. La structure monoïdale pour la bicatégorie des bitorseurs serait obtenue en introduisant un produit contracté de deux $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs.

9. Fibration en torseurs et bitorseurs

Une catégorie cofibrée sur $\mathcal{K}$ munie d'une $\underline{\mathcal{G}}$-action (à gauche) compatible, un $\mathcal{K}$-foncteur cocartésien $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant entre de telles catégories, et une $\mathcal{K}$-transformation $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante entre de tels morphismes sont respectivement un objet , un 1-morphisme et un 2-morphisme de la 2-catégorie $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cofib}_{\mathcal{K}})$. Une catégorie cofibrée sur $\mathcal{K}$ munie d'une $\underline{\mathcal{G}}$-action compatible consiste donc en la donnée d'une cofibration $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{K}$ et d'une action $\alpha : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{E})$ telles que, pour tout objet X de $\mathcal{G}$ le foncteur $\alpha(X) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est un $\mathcal{K}$-foncteur cocartésien, pour tout morphisme $u : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{G}$, $\alpha(u) : \alpha(X) \longrightarrow \alpha(Y)$ est une $\mathcal{K}$-transformation naturelle, et où les contraintes de comparaison et d'unité de l'homomorphisme α sont des $\mathcal{K}$-isomorphismes naturels. Une telle action induit sur la fibre $p^{-1}(A)$ d'un objet A de $\mathcal{K}$, une action $\alpha_A : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(p^{-1}(A))$ et donc détermine pour un objet A de $\mathcal{K}$ un objet α_A de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat})$. Plus précisément, la 2-équivalence (6.0.2) et l'isomorphisme canonique (3.7.1) définissent une biéquivalence:

$$\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cofib}_{\mathcal{K}}).$$

Définition 9.1. *La 2-catégorie des $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs sur $\mathcal{K}$, notée* $\mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$, *est la sous 2-catégorie pleine de* $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cofib}_K)$ *dont les objets sont les cofibrations $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{K}$, munies d'une $\underline{\mathcal{G}}$-action à gauche, pour lesquelles pour tout objet A de $\mathcal{K}$, la fibre $\mathcal{E}_A$ est un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur (à gauche) pour l'action induite par celle de $\underline{\mathcal{G}}$ sur $\mathcal{E}$.*

Cette définition et la biéquivalence mentionnée plus haut donne une nouvelle biéquivalence :

$$\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}}). \tag{9.1.1}$$

Par la proposition (7.6), on obtient :

Proposition 9.2. *On a une biéquivalence :* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}}^{op}) \longrightarrow \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$.

La catégorie$\mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})^{[1]}$ est la catégorie $\mathbf{T}ors(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$ des $\mathcal{K}$-torseurs sur $\underline{\mathcal{G}}$ définie dans [**10**, def. 2.5]. La proposition précédente affine le résultat de loc. cit. sur la classification des $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs sur $\mathcal{K}$. On obtient en particulier une bijection sur les classes d'isomorphismes $\pi_o(\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}}^{op}) \simeq \pi_o(\mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}}))$, ce qui redonne le théorème 3.3 de [**10**]. Un objet à contrainte d'unité stricte (resp. un 1-morphisme entre de tels objets) de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}}^{op})$ est appelé par ces auteurs un 2-cocycle (resp. un cobord).

Aux adaptations près, l'homomorphisme de (9.2) est construit comme celui de (9.2.1) que nous préférons expliciter pour la suite de ce travail. En considérant les torseurs à droite, on obtient une biéquivalence entre la bicatégorie $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$ et la 2-catégorie des $\mathcal{K}$-cofibrations en $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs à droite. Cela dit, par l'isomorphisme canonique $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}}) \simeq \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}}^{op})^{op}$, la bicatégorie $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$ est aussi biéquivalente à la 2-catégorie opposée des $\mathcal{K}$-fibrations en $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs à gauche. Plus précisèment, on a une biéquivalence

$$E : \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}})^{op}, \tag{9.2.1}$$

où $\mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}})$ est la sous 2-catégorie pleine de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Fib}_K)$ dont les objets sont les fibrations sur $\mathcal{K}$, munies d'une $\underline{\mathcal{G}}$-action à gauche pour laquelle les fibres sont des $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs pour l'action induite. Détaillons cet homomorphisme.

Image des objets par (9.2.1). Soit c un objet de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$. On note par θ_f l'objet de $\mathcal{G}$ image par c d'un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$, par $C_{f,g} : \theta_{gf} \longrightarrow \theta_g\theta_f$ la contrainte de comparaison de c exprimée aux morphismes composables f et g de $\mathcal{K}$, enfin on note par $i_A : \theta_{1_A} \longrightarrow I$ la contrainte d'unité exprimée à l'objet A de $\mathcal{G}$. La cohérence de ces contraintes est donnée, pour tous morphismes composables $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ et tout objet A de $\mathcal{K}$, avec la commutativité des diagrammes de $\underline{\mathcal{G}}$ suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
\theta_{hgf} & \xrightarrow{C_{f,hg}} & \theta_{hg}\theta_f & \xrightarrow{C_{g,h}\theta_f} & (\theta_h\theta_g)\theta_f \\
\| & & & & \downarrow a \\
\theta_{hgf} & \xrightarrow{C_{gf,h}} & \theta_h\theta_{gf} & \xrightarrow{\theta_h C_{f,g}} & \theta_h(\theta_g\theta_f)
\end{array} \tag{9.2.2}$$

$$\begin{array}{ccc}
\theta_{1_B}\theta_f & \xleftarrow{C_{f,1_B}} & \theta_f \\
\downarrow{\scriptstyle i_B\theta_f} & & \| \\
I\theta_f & \xrightarrow{g} & \theta_f
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\theta_f & \xrightarrow{C_{1_A,f}} & \theta_f\theta_{1_A} \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \theta_f i_A} \\
\theta_f & \xrightarrow{d} & \theta_f I
\end{array} \tag{9.2.3}$$

L'image par E, (9.2.1), d'un tel objet est la $\mathcal{K}$-fibration en $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs

$$p : E_c \longrightarrow \mathcal{K}, \tag{9.2.4}$$

définie de la manière suivante. La catégorie E_c a pour objets ceux du produit $\mathcal{G} \times \mathcal{K}$. Les morphismes de E_c au-dessus d'un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$ sont ceux de la forme $(u, f) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ où $u : X \longrightarrow Y\theta_f$ est un morphisme de $\mathcal{G}$. La composition $(v, g)(u, f) = (v.u, gf)$ dans E_c est définie par la composée gf de $\mathcal{K}$ et par la composition dans $\mathcal{G}$:

$$v.u : X \xrightarrow{u} Y\theta_f \xrightarrow{v1} (Z\theta_g)\theta_f \xrightarrow{a} Z(\theta_g\theta_f) \xrightarrow{1C^{-1}_{f,g}} Z\theta_{gf}.$$

L'unité en un objet (X, A) est l'isomorphisme $((Xi_A^{-1})d_X, 1_A)$. L'action à gauche $\beta_g : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(E_c)$ de $\underline{\mathcal{G}}$ sur E_c est donnée en un objet Z de $\mathcal{G}$ par la $\mathcal{K}$-équivalence de E_c qui au morphisme $(u, f) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ associe le morphisme

$$^Z(u, f) = (^Z u, f) : (ZX, A) \longrightarrow (ZY, B) \tag{9.2.5}$$

où $^Z u$ est le morphisme: $ZX \xrightarrow{1u} Z(Y\theta_f) \xrightarrow{a^{-1}} (ZY)\theta_f$. Au morphisme $z : Z \longrightarrow Z'$, cette action est donnée par le $\mathcal{K}$-isomorphisme naturel ayant pour composante en (X, A) l'isomorphisme au dessus de A de première composante : $(1i_A^{-1}) \circ d \circ (z1)$. Enfin, la contrainte de comparaison de cette action $\beta_g : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(E_c)$, est définie aux objets Y et Z de $\mathcal{G}$, par le $\mathcal{K}$-isomorphisme $^{(ZY)}_ \longrightarrow {}^Z(^Y_)$ d'expression en (X, A) le A-isomorphisme de première composante est la composée : $(1i_A^{-1}) \circ d \circ a$.

Image des morphismes par (9.2.1). Soit $\lambda : c \longrightarrow c'$ un 1-morphisme de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$. Un tel morphisme correspond à la donnée d'une famille d'objets λ_A de $\mathcal{G}$, A objet de $\mathcal{K}$, et d'une famille d'isomorphismes de $\mathcal{G}$

$$\lambda_f : \lambda_B\theta_f \longrightarrow \theta'_f\lambda_A, \quad f : A \longrightarrow B \text{ morphisme de } \mathcal{K},$$

cohérentes à la composition et aux unités. L'image de λ par E, (9.2.1), est la $\mathcal{K}$-équivalence $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante

$$E_\lambda : E_{c'} \longrightarrow E_c \tag{9.2.6}$$

définie au morphisme $(u, f) : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ de $E_{c'}$ par le morphisme de E_c $(Y\lambda_f^{-1} * u\lambda_A, f) : (X\lambda_A, A) \longrightarrow (Y\lambda_B, B)$ de E_c où $Y\lambda_f^{-1} * u\lambda_A$ est le morphisme de $\mathcal{G}$ défini par la composée :

$$X\lambda_A \xrightarrow{u\lambda_A} (Y\theta'_f)\lambda_A \xrightarrow{a} Y(\theta'_f\lambda_A) \xrightarrow{Y\lambda_f^{-1}} Y(\lambda_B\theta_f) \xrightarrow{a^{-1}} (Y\lambda_B)\theta_f.$$

La $\underline{\mathcal{G}}$-équivariance de E_λ est donnée à l'objet (Y, A) et pour l'action de X par le A-isomorphisme de E_c dont la première composante est la composée :

$$(XY)\lambda_A \xrightarrow{a} X(Y\lambda_A) \xrightarrow{1i_A^{-1}} (X(Y\lambda_A))\theta_{1_A} \tag{9.2.7}$$

Enfin, l'image d'un 2-morphisme $m : \lambda \longrightarrow \lambda'$, correspondant à la donnée d'une famille d'isomorphismes $m_A : \lambda_A \longrightarrow \lambda'_A$ où $(\theta'_f m_A)\lambda_f = \lambda'_f(m_B\theta_f)$, est la $\mathcal{K}$-transformation $\mathcal{G}$-équivariante

$$E_m : E_\lambda \Longrightarrow E_{\lambda'} \tag{9.2.8}$$

dont la composante à l'objet (X, A) de $E_{c'}$ est le A-isomorphisme de E_c dont la première composante est : $X\lambda_A \xrightarrow{1m_A} X\lambda'_A \xrightarrow{d} (X\lambda'_A)I \xrightarrow{1i_A^{-1}} (X\lambda'_A)\theta_{1_A}$.

Pour terminer la description indiquons les contraintes de l'homomorphisme E. La contrainte d'unité est donnée pour un objet c de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$ par la $\mathcal{K}$-transformation $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante,

$$\Phi_o^c : E_{I_c} \Longrightarrow 1_{E_c}, \tag{9.2.9}$$

définie en (X, A) par le A-isomorphisme de première composante $1i_A^{-1}$: $XI \longrightarrow X\theta_{1_A}$. Enfin, pour deux morphismes λ et β composables de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$, la contrainte de comparaison en λ et β est la $\mathcal{K}$-transformation $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante,

$$\Phi^E(\beta, \lambda) : E_{\beta.\lambda} \Longrightarrow E_\lambda E_\beta, \tag{9.2.10}$$

d'expression en (X, A) :

$$X(\beta_A\lambda_A) \xrightarrow{a^{-1}} (X\beta_A)\lambda_A \xrightarrow{d} ((X\beta_A)\lambda_A)I \xrightarrow{1i_A^{-1}} ((X\beta_A)\lambda_A)\theta_{1_A}.$$

9.3. $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs sur $\mathcal{K}$.

Pour $\mathcal{K}$ une petite catégorie et $\underline{\mathcal{G}}$ une gr-catégorie, (8.4) donne une nouvelle biéquivalence

$$\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}})).$$

La bicatégorie $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$ est ainsi un équivalent algébrique de la 2-catégorie des (co)-fibrations sur $\mathcal{K}$ où les fibres sont des $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs. Cela dit, via les biéquivalences

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})) & \simeq & \mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}^{op})^{op}) & (3.7.2) \\ & \simeq & \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}^{op}))^{op} & (3.7.1) \\ & \simeq & \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op}))^{op} & (8.4), \end{array}$$

la bicatégorie $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$ est aussi un équivalent algébrique de la 2-catégorie opposée des fibrations sur $\mathcal{K}$ où les fibres sont des $\underline{\mathcal{G}}^{op}$-bitorseurs. On note G cette biéquivalence, soit :

$$G : \mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op}))^{op}. \tag{9.3.1}$$

On va s'intéresser à cette dernière biéquivalence. Formellement $\mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}^{op}})$ est avec (8.3) la 2-catégorie des torseurs à gauche munis d'une $\underline{\mathcal{G}}$-action à droite compatible. Comme pour les $\mathcal{K}$-fibrations en $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs, une $\mathcal{K}$-fibration en $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs est aussi une $\mathcal{K}$-fibration en $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs munie d'une $\underline{\mathcal{G}}$-action compatible pour laquelle les fibres deviennent des $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs. Ce dernier point de vue s'obtient ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op})) & \hookrightarrow & \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op},\ \mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}}))) & (8.3) \\ & \simeq & \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op},\ \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}}))) & (3.7.1) \\ & \simeq & \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op},\ \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op},\ \underline{\mathcal{G}})) & (9.1.1). \end{array}$$

On dispose donc d'un homomorphisme qui est localement une équivalence,

$$S : \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op},\ \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op},\ \underline{\mathcal{G}})). \tag{9.3.2}$$

La composée $F = S^{op} \circ G$ de (9.3.1) et (9.3.2), donne un homomorphisme,

$$F : \mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op},\ \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}}))^{op}, \tag{9.3.3}$$

qui est localement une équivalence. Il est facile de voir que cet homomorphisme s'obtient aussi de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})) & \hookrightarrow & \mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{G}})) & \\ & \simeq & \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}},\ \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})) & (3.7.1) \\ & \simeq & \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}},\ \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}})^{op}) & (9.2.1) \\ & \simeq & \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op},\ \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}}))^{op} & (3.7.2). \end{array}$$

On se propose à présent pour préparer la suite de donner une description des homomorphismes G (9.3.1) et F (9.3.3).

Images des objets. Soit (θ, C, i) un objet de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$. Un tel objet consiste en la donnée d'une famille d'équivalences monoïdales (que l'on notera en exposant),

$$(\theta(A), \Phi^{\theta(A)}) : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}, \quad A \text{ objet de } \mathcal{K} \tag{9.3.4}$$

et d'une famille de pseudo-équivalences de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$

$$\theta(f) : \theta(A) \longrightarrow \theta(B), \quad f : A \longrightarrow B \text{ morphisme de } \mathcal{K}, \tag{9.3.5}$$

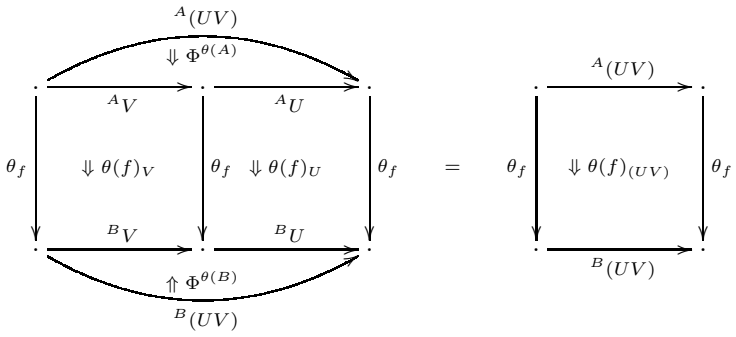
cohérentes à la composition et aux unités via les contraintes de comparaison C et d'unité i de θ. Ces contraintes sont des modifications inversibles de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$

$$C_{f,g} : \theta(gf) \Longrightarrow \theta(g).\theta(f) \quad \text{et} \quad i_A : \theta(1_A) \Longrightarrow I_{\theta(A)} \tag{9.3.6}$$

cohérentes aux unités et la composition de $\mathcal{K}$. De manière plus détaillée, la pseudo-équivalences $\theta(f)$ (9.3.5) consiste en la donnée d'une famille d'objets θ_f de $\mathcal{G}$ et d'une famille d'isomorphismes naturels (on note ${}^AU$ pour $\theta(A)(U)$)

$$\theta(f)_U : \theta_f\ {}^AU \longrightarrow {}^B U \theta_f, \quad U \text{ objet de } \mathcal{G}, \tag{9.3.7}$$

d'une part cohérente à la structure de $\underline{\mathcal{G}}$ en particulier par l'égalité dans $\underline{\mathcal{G}}$



(9.3.8)

pour tous objets U et V de $\mathcal{G}$ et d'autre part compatible à la composition et aux unités de $\mathcal{K}$ via les modifications (9.3.6). Ces modifications correspondent à la donnée d'une famille d'isomorphismes de $\underline{\mathcal{G}}$

$$C_{f,g} : \theta_{gf} \longrightarrow \theta_g \theta_f, \quad i_A : \theta_{1_A} \longrightarrow I, \tag{9.3.9}$$

telle que les conditions de cohérences (9.2.2) et (9.2.3) aient lieu. La compatiblité à la composition et aux unités de $\mathcal{K}$ des pseudo-équivalences $\theta(f)$, s'exprime par la commutativité dans $\mathcal{G}$, pour tout objet U de $\mathcal{G}$ et morphismes f et g composables de $\mathcal{K}$, des deux diagrammes suivants (les contraintes d'associativité sont omises) :

$$\begin{array}{ccccc}
\theta_{gf}\ {}^{A}U & & \xrightarrow{\quad\theta(gf)_U\quad} & & {}^{C}U\ \theta_{gf} \\
{\scriptstyle C_{f,g}\ 1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 1\ C_{f,g}} \\
\theta_g\ \theta_f\ {}^{A}U & \xrightarrow[1\ \theta(f)_U]{} & \theta_g\ {}^{B}U\ \theta_f & \xrightarrow[\theta(g)_U\ 1]{} & {}^{C}U\theta_g\ \theta_f
\end{array} \tag{9.3.10}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\theta_{1_A}\ {}^{A}U & & \xrightarrow{\quad\theta(1_A)_U\quad} & & {}^{A}U\ \theta_{1_A} \\
{\scriptstyle i_A\ 1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 1\ i_A} \\
I\ {}^{A}U & \xrightarrow[g]{} & {}^{A}U & \xrightarrow[d]{} & {}^{A}U\ I\ .
\end{array}$$

L'image d'un tel objet (θ, C, i) par la biéquivalence G, (9.3.1), est l'homomorphisme

$$G(\theta) : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op}) \tag{9.3.11}$$

qui associe à un objet A de $\mathcal{K}$ le bitorseur $(\theta(A), T_d)$ que l'on notera noté $\mathcal{G}_{\theta(A)}$ dans la suite. L'action à droite (au dessus de A) est donc définie par la composée

$$\beta_A : \underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{\theta(A)} \underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{T_d} \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}}(t_g).$$

De même, l'image $G(\theta)(f)$, (9.3.11), d'un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$, est le foncteur $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant (pour les deux actions) donné par la translation à droite par θ_f, $t_d(\theta_f) : \mathcal{G}_{\theta(B)} \longrightarrow \mathcal{G}_{\theta(A)}$. L'équivariance à gauche est évidente, celle de droite s'obtient par tensorisation à droite des isomorphismes $\theta(f)^{-1}$, (9.3.7), ce qui correspond à la famille d'isomorphismes naturels de $\mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}}(t_g)$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G} & \xrightarrow{t_d({}^{B}U)} & \mathcal{G} \\
{\scriptstyle t_d(\theta_f)}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle t_d(\theta(f)_U^{-1})} & \downarrow{\scriptstyle t_d(\theta_f)} \\
\mathcal{G} & \xrightarrow[t_d({}^{A}U)]{} & \mathcal{G}\ ,
\end{array}$$

où U est un objet de $\mathcal{G}$. La cohérence à l'action de cette famille est donnée par (9.3.8). Enfin, les contraintes de comparaison et d'unité de l'homomorphisme $G(\theta)$, (9.3.11), sont définies par tensorisation de (9.3.9), la fonctorialité est obtenue avec (9.3.10), leurs cohérences avec (9.2.2) et (9.2.3).

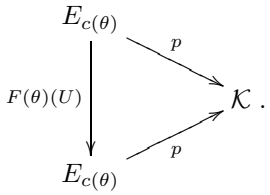
Décrivons de manière similaire l'image par l'homomorphisme F, (9.3.3), de l'objet (θ, C, i) :

$$F(\theta) : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}}). \tag{9.3.12}$$

Les familles d'objets θ_f et d'isomorphismes $C_{f,g} : \theta_{gf} \longrightarrow \theta_g.\theta_f$ et $i_A : \theta_{1_A} \longrightarrow I$, définissent un objet $c(\theta)$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$ qui détermine avec (9.2.4), un objet

$$E_{c(\theta)} \xrightarrow{p} \mathcal{K} \tag{9.3.13}$$

de $\mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}})$ c'est-à-dire une $\mathcal{K}$-fibration en $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs à gauche. Cette fibration est l'image par $F(\theta)$ de l'unique objet de la bicatégorie $\underline{\mathcal{G}}$. Décrivons à présent l'action à droite de $\underline{\mathcal{G}}$ sur cette fibration. Un objet U de $\mathcal{G}$ détermine un morphisme $c(U) : c(\theta) \longrightarrow c(\theta)$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$, donné à l'objet A de $\mathcal{K}$ par l'objet ${}^AU$ et au morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$ par l'isomorphisme $\theta(f)_U^{-1} : {}^BU\theta_f \longrightarrow \theta_f \, {}^AU$, (9.3.7). Les contraintes de $c(U)$ sont données par (9.3.10). Ce morphisme $c(U)$ détermine avec (9.2.6) une $\mathcal{K}$-équivalence $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour l'action à gauche, $E_{c(U)}$, notée ici $F(\theta)(U)$:



Enfin, un morphisme $u : U \longrightarrow V$ détermine un $\mathcal{K}$-isomorphisme naturel $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant pour l'action à gauche dont on laisse la description au lecteur. Pour un objet (θ, C, i) de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$, on dispose alors d'un homomorphisme de gr-catégories, pleinement fidèle

$$(F(\theta), \Phi^{F(\theta)}) : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}})(E_{c(\theta)}) \, .$$

La contrainte de comparaison $\Phi^{F(\theta)}$ considérée aux objets U et V de $\mathcal{G}$ est donnée par le $\mathcal{K}$-isomorphisme $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant $\Phi^{F(\theta)}(U, V) : F(\theta)(UV) \longrightarrow F(\theta)(V)F(\theta)(U)$, donné à l'objet (X, A) de $E_{c(\theta)}$ par le A-isomorphisme dont la première composante est le morphisme de $\mathcal{G}$ (où la contrainte d'associativité est omise)

$$X \, {}^A(UV) \xrightarrow{1\Phi^{\theta(A)}} X({}^AU)({}^AV) \xrightarrow{d} X({}^AU)({}^AV)I \xrightarrow{1i^{-1}} X({}^AU)({}^AV)\theta_{1_A},$$

la naturalité provenant pour l'essentiel de (9.3.8). Ceci termine la description de F sur les objets. Pour la suite de ce travail, l'action à droite sur $E_{c(\theta)}$ ainsi définie sera notée par

$$\beta_d : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}q(E_{c(\theta)}). \tag{9.3.14}$$

Images des morphismes. Soit $s : (\theta, C, i) \longrightarrow (\psi, C', i')$ un morphisme de la bi-

catégorie $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$. On a donc une famille de pseudo-équivalences de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$

$$s(A) : (\theta(A), \Phi^{\theta(A)}) \longrightarrow (\psi(A), \Phi^{\psi(A)}), \quad A \text{ objet de } \mathcal{K} \tag{9.3.15}$$

et une famille de modifications inversibles de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$

$$s(f) : s(B).\theta(f) \Longrightarrow \psi(f).s(A), \quad f : A \longrightarrow B \text{ morphisme de } \mathcal{K}, \tag{9.3.16}$$

cohérentes à la composition et aux unités de $\mathcal{K}$. Plus précisément, la pseudo-équivalence $s(A)$, (9.3.15), correspond à la donnée d'un objet s_A de $\mathcal{G}$ et d'une famille d'isomorphismes naturels, où l'on note ${}^{A}U$ (resp. ${}^{A\cdot}U$) pour $\theta(A)(U)$ (resp. $\psi(A)(U)$),

$$s(A)_U : s_A \, {}^{A}U \longrightarrow {}^{A\cdot}U s_A, \quad U \text{ objet de } \mathcal{G}, \tag{9.3.17}$$

cohérente à la structure de $\underline{\mathcal{G}}$ comme en (9.3.8). La modification $s(f)$, (9.3.16), correspond à la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{G}$

$$s(f) : s_B \theta_f \longrightarrow \psi_f s_A \tag{9.3.18}$$

tel que pour tout objet U de $\mathcal{G}$ le diagramme suivant commute (les contraintes d'associativités sont omises),

$$\begin{array}{ccccc} s_B \, \theta_f \, {}^{A}U & \xrightarrow{1 \, \theta(f)_U} & s_B \, {}^{B}U \, \theta_f & \xrightarrow{s(B)_U \, 1} & {}^{B\cdot}U \, s_B \, \theta_f \\ {\scriptstyle s(f)1}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 1 \, s(f)} \\ \psi_f \, s_A \, {}^{A}U & \xrightarrow[1 \, s(A)_U]{} & \psi_f \, {}^{A\cdot}U \, s_A & \xrightarrow[\psi(f)_U \, 1]{} & {}^{B\cdot}U \, \psi_f \, s_A \, . \end{array} \tag{9.3.19}$$

Enfin, la cohérence à la composition et aux unités de $\mathcal{K}$, correspond respectivement à la commutativité dans $\underline{\mathcal{G}}$ des diagrammes (les contraintes d'associativité sont omises),

$$\begin{array}{ccccc} s_C \theta_{gf} & & \xrightarrow{\quad s(gf) \quad} & & \psi_{gf} s_A \\ {\scriptstyle 1 \, C_{f,g}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle C'_{f,g} \, 1} \\ s_C \, \theta_g \, \theta_f & \xrightarrow[s(g) \, 1]{} & \psi_g \, s_B \, \theta_f & \xrightarrow[1 \, s(f)]{} & \psi_g \, \psi_f \, s_A \end{array} \tag{9.3.20}$$

$$\begin{array}{ccccc} s_A \theta_{1_A} & & \xrightarrow{\quad s(1_A) \quad} & & \psi_{1_A} s_A \\ {\scriptstyle 1 \, i_A}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle i'_A \, 1} \\ s_A \, I & \xleftarrow[d]{} & s_A & \xleftarrow[g]{} & I \, s_A \end{array}$$

La pseudo-équivalence de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op}))$ image de s par G, (9.3.11),

$$G(s) : G(\psi) \longrightarrow G(\theta) \tag{9.3.21}$$

admet pour composante en un objet A de $\mathcal{K}$ la translation par l'objet s_A,

$$\mathcal{G}_{\psi(A)} \overset{t_d(s_A)}{\longrightarrow} \mathcal{G}_{\theta(A)},$$

où l'équivariance pour l'action à droite est obtenue avec (9.3.17) et dont l'expession en U correspond à l'isomorphisme naturel de $\mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}}(t_g)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{t_d({}^{A\cdot}U)} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle t_d(s_A)}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle t_d(s(A)_U^{-1})} & \downarrow{\scriptstyle t_d(s_A)} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow[t_d({}^{A}U)]{} & \mathcal{G}\ . \end{array}$$

L'expression de $G(s)$, (9.3.21), au morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$ est obtenue avec (9.3.18) et (9.3.19) et correspond à l'isomorphisme naturel de $\mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op})$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_{\psi(B)} & \xrightarrow{t_d(\psi_f)} & \mathcal{G}_{\psi(A)} \\ {\scriptstyle t_d(s_B)}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle t_d(s(f)^{-1})} & \downarrow{\scriptstyle t_d(s_A)} \\ \mathcal{G}_{\theta(B)} & \xrightarrow[t_d(\theta_f)]{} & \mathcal{G}_{\theta(A)}\ , \end{array}$$

dont la cohérence à la composition et aux unités de $\mathcal{K}$ est obtenue avec (9.3.20).

Décrivons de la même manière la pseudo-équivalence $F(s) : F(\psi) \longrightarrow F(\theta)$ de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}}))$, image par F de s. A l'unique objet de la bicatégorie $\underline{\mathcal{G}}$, correspond la $\mathcal{K}$-équivalence $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour l'action à gauche

$$\begin{array}{ccc} E_{c(\psi)} & & \\ & \searrow^{p} & \\ {\scriptstyle E_s}\downarrow & & \mathcal{K}\ , \\ & \nearrow_{p} & \\ E_{c(\theta)} & & \end{array} \tag{9.3.22}$$

obtenue avec (9.2.6) à partir de la pseudo-équivalence $c(s) : c(\theta) \longrightarrow c(\theta')$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$ définie par la famille d'objets s_A, (9.3.17) et la famille d'isomorphismes $s(f)$, (9.3.18) données par s. Les contraintes de $c(s)$ sont données par (9.3.20). A chaque objet U de $\underline{\mathcal{G}}$, correspond une $\mathcal{K}$-transformation $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour l'action à gauche, définissant en particulier la $\underline{\mathcal{G}}$-équivariance du foncteur E_s pour l'action

à droite,

$$\begin{array}{ccc} E_{c(\psi)} & \xrightarrow{F(\psi)(U)} & E_{c(\psi)} \\ {\scriptstyle E_s}\downarrow & \Downarrow F(s)(U) & \downarrow{\scriptstyle E_s} \\ E_{c(\theta)} & \xrightarrow[F(\theta)(U)]{} & E_{c(\theta)}\ . \end{array} \tag{9.3.23}$$

Cette $\mathcal{K}$-transformation est définie à l'objet (X, A) de $E_{c(\psi)}$par le A-isomorphisme de $E_{c(\theta)}$ naturel en $(X, A) : F(s)(U)_{(X,A)} : ((X^{A\cdot}U)s_A, A) \longrightarrow ((Xs_A)^A U, A)$, dont la première composante est le morphisme de $\underline{\mathcal{G}}$ (les contraintes d'associativités sont omises),

$$(X^{A\cdot}U)s_A \overset{1\ s(A)_U^{-1}}{\longrightarrow} X\ s_A\ {}^A U \overset{d}{\longrightarrow} X\ s_A\ {}^A U\ I \overset{1i_A^{-1}}{\longrightarrow} ((Xs_A)^A U)\theta_{1_A},$$

la naturalité provenant pour l'essentiel de (9.3.19). Enfin, la cohérence des pseudo-transformations $s(A)$ à la structure de $\underline{\mathcal{G}}$ (comme en 9.3.8), fournit celle de la pseudo-transformation $F(s)$. La cohérence à l'unité I de $\underline{\mathcal{G}}$ est laissée au lecteur.

Images des 2-morphismes. Pour terminer, rappelons qu'un 2-morphisme i.e. une modification $m : s \Longrightarrow s'$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$, consiste à se donner une famille de modifications de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$,

$$m(A) : s(A) \Longrightarrow s'(A), \quad A \text{ objet de } \mathcal{K}, \tag{9.3.24}$$

telle que l'on ait l'égalité dans $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$

$$\begin{array}{ccc} \theta(A) & \xrightarrow{\theta(f)} & \theta(B) \\ {\scriptstyle s'(A)}\ (\overset{m}{\Leftarrow}\ \downarrow & s(A) \Downarrow s(f)\ s(B) & \downarrow\ \overset{m}{\Rightarrow})\ {\scriptstyle s'(B)} \\ \psi(A) & \xrightarrow[\psi(f)]{} & \psi(B) \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} \theta(A) & \xrightarrow{\theta(f)} & \theta(B) \\ {\scriptstyle s'(A)}\downarrow & \Downarrow s'(f) & \downarrow{\scriptstyle s'(B)} \\ \psi(A) & \xrightarrow[\psi(f)]{} & \psi(B) \end{array} \tag{9.3.25}$$

pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$. La transcription sur $\underline{\mathcal{G}}$ est laissée au soin du lecteur.

L'image de m par G (9.3.1), $G(m) : G(s) \Longrightarrow G(s')$ est donné à l'objet A de $\mathcal{K}$ par le 2-morphisme de $\mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op})$, obtenu par tensorisation à droite de l'isomorphisme $m_A : s_A \longrightarrow s'_A$, soit :

$$\mathcal{G}_{\psi(A)} \underset{t_d(s'_A)}{\overset{t_d(s_A)}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{\ t_d(m_A) \Downarrow\ }}}} \mathcal{G}_{\theta(A)}\ . \tag{9.3.26}$$

On laisse au lecteur le soin d'exprimer la condition de cohérence au morphisme

de $G(m)$ obtenue avec (9.3.25). Enfin, concernant l'homorphisme F (9.3.3), un 2-morphisme $m : s \Longrightarrow s'$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$ détermine une modification de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$, soit une famille d'isomorphismes $m_A : s_A \longrightarrow s'_A$ telle que $(\psi_f m_A)s(f) = s'(f)(m_B \theta_f)$. La modification $F(m) : F(s) \Longrightarrow F(s')$ est alors donnée par son unique composante, la $\mathcal{K}$-transformation $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour l'action à gauche E_m obtenue avec (9.2.8) qui est à présent aussi $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour l'action à droite,

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{c(\psi)} & & \\ & \swarrow & & \searrow^{p} & \\ E_{s'} & \Leftarrow^{E_m} & & E_s & \mathcal{K} \\ & \searrow & & \nearrow_{p} & \\ & & E_{c(\theta)} & & \end{array} \tag{9.3.27}$$

• Pour terminer avec cette description, il convient à présent d'indiquer les contraintes de comparaison et d'unité de F, celles de G étant laissées au lecteur. Une unité $I_\theta : (\theta, C, i) \longrightarrow (\theta, C, i)$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$ est constituée, pour tout objet A et morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$, de la pseudo-équivalence unité en $\theta(A)$ de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$: $I_{\theta(A)} : (\theta(A), \Phi^{\theta(A)}) \longrightarrow (\theta(A), \Phi^{\theta(A)})$ et de la modification inversible $I(f) : I_{\theta(B)}.\theta(f) \Longrightarrow \theta(f).I_{\theta(A)}$, correspondant à l'isomorphisme de $\mathcal{G}$, $I_{\theta_f} : I\theta_f \longrightarrow \theta_f I$. La contrainte d'unité de F en $I_\theta : (\theta, C, i) \longrightarrow (\theta, C, i)$ est donnée par la modification $\Phi^F(I_\theta) : F(I_\theta) \Longrightarrow 1_{F(\theta)}$ définie par le $\mathcal{K}$-isomorphisme $\Phi^{c(\theta)} : E_{I_{c(\theta)}} \Longrightarrow 1_{E_{c(\theta)}}$ de (9.2.9). Enfin, pour deux morphismes composables t et s de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$, la contrainte de comparaison $\Phi^F(t, s) : F(t.s) \Longrightarrow F(s)F(t)$ est la modification donnée par le $\mathcal{K}$-isomorphisme $\Phi(t, s) : E_{t.s} \Longrightarrow E_s E_t$ de (9.2.10).

10. Extensions de *gr*-catégories

Les résultats concernant le noyau $(N(p), j, \epsilon)$, (2.3), d'un homomorphisme p de *gr*-catégories, nous conduisent très naturellement à poser la définition suivante.

Définition 10.1. *Soit $\underline{\mathcal{G}}$ et $\underline{\mathcal{K}}$ des gr-catégories. On appelle extension de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$ la donnée d'une gr-catégorie $\underline{\mathcal{H}}$, d'un homomorphisme $p : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ essentiellement surjectif et d'une équivalence monoïdale $q : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow N(p)$. On note par (q, p) une telle extension.*

Par la proposition (2.4), une extension de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$ consiste en la donnée d'une suite

$$\underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{r} \underline{\mathcal{H}} \xrightarrow{p} \underline{\mathcal{K}} \tag{10.1.1}$$

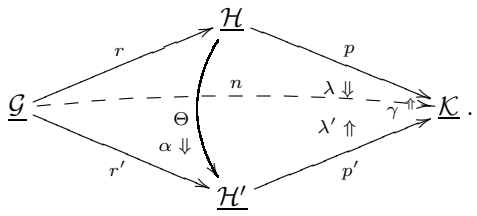
d'homomorphismes où p est essentiellement surjectif et d'une transformation naturelle $\lambda : p \circ r \Longrightarrow n$, telle que l'homomorphisme $q = F(r, \lambda) : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow N(p)$ défini par l'isomorphisme (2.4.1), soit une équivalence de catégories. Pour simplifier, on notera dans la suite $q = (r, \lambda)$ et l'on pourra désigner une telle extension par les notations (q, p) ou (r, λ, p).

Définition 10.2. *Soit $\underline{\mathcal{G}}$ et $\underline{\mathcal{K}}$ deux gr-catégories.*

1. *Un 1-morphisme* $(\alpha, \Theta, \gamma) : (q,p) \longrightarrow (q',p')$ *d'extensions de* $\underline{\mathcal{K}}$ *par* $\underline{\mathcal{G}}$ *consiste en la donnée, d'un homomorphisme* $\Theta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}'}$*, d'un isomorphisme naturel* $\gamma : p'\Theta \Longrightarrow p$ *et enfin d'un isomorphisme naturel* $\alpha : \Theta_I q \Longrightarrow q'$*, où l'homomorphisme* $\Theta_I : N(p) \longrightarrow N(p')$ *est défini pour un objet* (X,f) *du noyau* $N(p)$ *par* $\Theta_I(X,f) = (\Theta(X), f\gamma_X)$.
2. *Un 2-morphisme* $m : (\alpha, \Theta, \gamma) \Longrightarrow (\alpha', \Theta', \gamma')$ *est une transformation naturelle* $m : \Theta \Longrightarrow \Theta'$ *telle que* $\gamma'.(p'm) = \gamma$ *et* $\alpha'.(mr) = \alpha$.

Si l'on pose $q = (r, \lambda)$ et $q' = (r', \lambda')$, un 1-morphisme (α, Θ, γ) consiste en la donnée d'un homomorphisme $\Theta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}'}$, d'un isomorphisme naturel $\gamma : p'\Theta \Longrightarrow p$ et d'un isomorphisme fonctoriel $\alpha : \Theta r \Longrightarrow r'$ tel que $\lambda'.(p'\alpha) = \lambda.(\gamma r)$, ce dernier point correspondant à la commutativité du diagramme suivant :

(10.2.1)



Pour des 1-morphismes $(\alpha, \Theta, \gamma) : (q,p) \longrightarrow (q',p')$ et $(\alpha', \Theta', \gamma') : (q',p') \longrightarrow (q'',p'')$ la composition est définie naturellement par :

$$(\alpha',\ \Theta',\ \gamma') \circ (\alpha,\ \Theta,\ \gamma) = (\alpha'.\Theta'_I\alpha,\ \Theta'\Theta,\ \gamma.\gamma'\Theta).$$

Les compositions verticales et horizontales des 2-morphismes sont définies par les compositions verticales et horizontales des transformations naturelles sous-jacentes. On obtient ainsi une 2-catégorie que l'on notera $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ dans la suite.

Proposition 10.3. *La 2-catégorie* $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ *est un bigroupoïde.*

Démonstration. Il est clair que les 2-morphismes sont inversibles. Il reste donc à montrer que les 1-morphismes sont des équivalences ce qui découle des trois lemmes suivants.

Lemme 10.4. *Soit* $(\alpha, \Theta, \gamma) : (q,p) \longrightarrow (q',p')$ *un 1-morphisme de* $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ *pour lequel* $\Theta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}'}$ *est une équivalence alors le 1-morphisme* (α, Θ, γ) *est une équivalence de* $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$.

Démonstration. Soit Θ^* une équivalence quasi inverse de Θ et $\eta : \Theta\Theta^* \Longrightarrow 1_{\underline{\mathcal{H}'}}$, $\epsilon : 1_{\underline{\mathcal{H}}} \Longrightarrow \Theta^*\Theta$ les isomorphismes intervenants dans l'adjonction. On possède alors des isomorphismes naturels, $\gamma^* = (p'\eta).(\gamma^{-1}\Theta^*) : p\Theta^* \Longrightarrow p'$ et $\alpha^* = (\epsilon r).(\Theta^*\alpha^{-1}) : \Theta^* r' \Longrightarrow r$, qui déterminent un morphisme d'extensions $(\alpha^*, \theta^*, \gamma^*) : (q',p') \longrightarrow (q,p)$. Les isomorphismes naturels η et ϵ déterminent des 2-isomorphismes de $\mathbf{Ext}(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ $\eta : (\alpha, \Theta, \gamma)(\alpha^*, \Theta^*, \gamma^*) \Longrightarrow 1_{(q',p')}$ et $\epsilon : 1_{(q,p)} \Longrightarrow (\alpha^*, \Theta^*, \gamma^*)(\alpha, \Theta, \gamma)$ et (α, Θ, γ) est une équivalence de $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$. □

Lemme 10.5. *Soit* $(\alpha, \Theta, \gamma) : (q,p) \longrightarrow (q',p')$ *un 1-morphisme de* $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$*, alors* $\Theta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}'}$ *est une équivalence.*

Démonstration. Il suffit de montrer que Θ induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopies de $\underline{\mathcal{H}}$ et $\underline{\mathcal{H}'}$. Pour (q,p) une extension de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$, l'équivalence $q : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow N(P)$ fournit un isomorphisme $\pi_o(q) : \pi_o(\underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \pi_o(N(P))$. En posant

$$d = \pi_o(q)^{-1} \circ \delta, \tag{10.5.1}$$

où $\delta : \pi_1(\underline{\mathcal{K}}) \longrightarrow \pi_o(N(P))$ est l'homomorphisme intervenant dans la longue suite exacte d'homotopie (2.5) associée à l'homomorphime $p : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$, on vérifie que la suite

$$0 \longrightarrow \pi_1(\underline{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\pi_1(r)} \pi_1(\underline{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\pi_1(p)} \pi_1(\underline{\mathcal{K}}) \xrightarrow{d} \pi_o(\underline{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\pi_o(r)} \pi_o(\underline{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\pi_o(p)} \pi_o(\underline{\mathcal{K}}) \longrightarrow 0. \tag{10.5.2}$$

est exacte. En utilisant le lemme ci-dessous, on conclut alors en appliquant au diagramme (10.2.1) les foncteurs π_o et π_1.

Lemme 10.6. *l'homomorphisme $d : \pi_1(\underline{\mathcal{K}}) \longrightarrow \pi_o(\underline{\mathcal{G}})$ défini pour une extension (q,p) en (10.5.1), ne dépend que de la composante connexe dans $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ de cette extension.*

En effet, soient $(\alpha, \Theta, \gamma) : (q,p) \longrightarrow (q',p')$ un 1-morphisme de $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ et $\Theta_I : N(p) \longrightarrow N(p')$ l'homomorphisme induit par Θ sur les noyaux homotopiques. Notons $\delta' : \pi_1(\underline{\mathcal{K}}) \longrightarrow \pi_o(N(P))$ l'homomorphisme associé par (2.5) à l'homomorphime p'. On montre en utilisant la définition des morphismes δ et δ' que $\pi_o(\Theta_I) \circ \delta = \delta'$ et ainsi on conclut puisque :

$$d' = \pi_o(q')^{-1} \circ \delta' = \pi_o(q')^{-1} \circ \pi_o(\Theta_I) \circ \delta = \pi_o(q) \circ \delta = d$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. □

11. Extensions (co)fibrées

On montre ici que toute extension est équivalente à une extension de type cofibrée, c'est-à-dire une extension pour laquelle l'homomorphisme p est une cofibration. Ce résultat est le point de départ pour obtenir l'essentielle surjectivité du théorème de classification (p. 516). Dans des cas où des hypothèses de commutativité sont prises, ce type d'extension à été étudié, dans [**7**] pour le cas central et dans [**8**] pour $\underline{\mathcal{G}}$ munie d'une structure de $\underline{\mathcal{K}}$-module.

Définition 11.1. *Soit $\underline{\mathcal{G}}$ et $\underline{\mathcal{K}}$ des gr-catégories.*

1. *Une extension (r, λ, p) de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$ est dite cofibrée si p est une cofibration et si la transformation naturelle $\lambda : pr \Longrightarrow n$ est une identité. On notera par (r,p) une telle extension.*
2. *Un 1-morphisme $(\alpha, \Theta, \gamma) : (r,p) \longrightarrow (r',p')$ d'extensions cofibrées est un 1-morphisme d'extensions pour lequel la transformation naturelle $\gamma : p'\Theta = p$ est une identité . On notera par (α, Θ) un tel morphisme.*

On note par $\mathbf{Ext}_{cof}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ la sous 2-catégrie localement pleine de $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ dont les objets sont les extensions cofibrées et les 1-morphismes les morphismes d'extensions cofibrées.

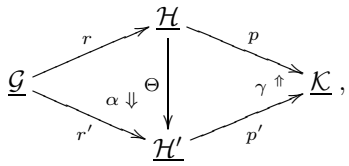
Pour une extension cofibrée (r,p) de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$, l'homomorphisme r est à valeur dans la catégorie $p^{-1}(I)$, fibre stricte de p au dessus de l'unité I de $\underline{\mathcal{K}}$. Comme p est une cofibration, la catégorie $p^{-1}(I)$ est équivalente à la catégorie $\mathcal{H}_{(I)}$, fibre homotopique de p au dessus de l'unité. Un 1-morphisme $(\alpha,\Theta) : (r,p) \longrightarrow (r',p')$ d'extensions cofibrées est déterminé par la donnée d'un $\underline{\mathcal{K}}$-morphisme : $\Theta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}'}$ et d'un isomorphisme fonctoriel $\alpha : \Theta r \Longrightarrow r'$ pour lequel $p'\alpha$ est une identiré. Un 2-morphisme d'extensions cofibrées donne une $\underline{\mathcal{K}}$-transformation, on obtient en particulier un 2-foncteur ˝oubli˝ :

$$\underline{O} : \mathbf{Ext}_{cof}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Cofmon}_{\underline{\mathcal{K}}} \tag{11.1.1}$$

localement fidéle. Le résultat essentiel sur les extensions cofibrées est le suivant :

Proposition 11.2. *le 2-foncteur inclusion $i : \mathbf{Ext}_{cof}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})$, est une biéquivalence.*

Démonstration. Soit $E = (r,p)$ et $E' = (r',p')$ deux extensions cofibrées. Montrons que le foncteur $i_{E,E'} : \mathbf{Ext}_{cof}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})(E,E') \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})(E,E')$ est une équivalence. Ce foncteur est pleinement fidèle. Il reste à montrer qu'il est essentiellement surjectif. Soit $(\alpha,\Theta,\gamma) : E \longrightarrow E'$,



un objet de $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})(E,E')$. Choisissons un coclivage R' de p',(6.0.1). Ce choix détermine un foncteur $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$. Pour un objet H de $\mathcal{H}$, l'objet $F(H)$ de $\mathcal{H}'$ est défini par le but $b_{\gamma_H}(\Theta(H))$ du relèvement, $R'_{\gamma_H}(\Theta(H)) : \Theta(H) \longrightarrow b_{\gamma_H}(\Theta(H))$ du morphisme $\gamma_H : p'\Theta(H) \longrightarrow p(H)$. Pour un morphisme $f : H \longrightarrow H'$, on a $F(f) := R'_{\gamma'_H}(\Theta(H')) \circ \Theta(f) \circ R'^{-1}_{\gamma_H}(\Theta(H))$. Les morphismes $R'_{\gamma_H}(\Theta(H)) : \Theta(H) \longrightarrow F(H)$ constituent alors les composantes d'un isomorphisme naturel $m : \Theta \Longrightarrow F$ ce qui permet par transport de structurer F en un homomorphisme $\underline{F} : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{H}'}$ pour lequel m devient une transformation monoïdale. La transformation monoïdale $\alpha' := \alpha.m^{-1}r$ détermine alors un morphisme $(\alpha',F) : E \longrightarrow E'$ de $\mathbf{Ext}_{cof}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})$, isomorphe dans $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})$ au morphisme $(\alpha,\Theta,\gamma) : E \longrightarrow E'$ via la transformation naturelle $m : \Theta \Longrightarrow F$. Celle-ci est alors un 2-morphisme d'extensions et $i_{E,E'}$ est ainsi essentiellement surjectif.
Pour finir, montrons que l'inclusion canonique i est biessentiellement surjectif. Puisque $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})$ est un bigroupoïde, il suffit de montrer qu'une extension quelconque (r,λ,p) de $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})$

$$\underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{r} \underline{\mathcal{H}} \xrightarrow{p} \underline{\mathcal{K}}\,, \tag{11.2.1}$$

est dans la composante connexe d'une extension cofibrée. L'homomorphisme p : $\underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ détermine une cofibration monoïdale :

$$\pi : \underline{E}_p \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}. \tag{11.2.2}$$

La catégorie E_p admet pour objets les couples $((X,g),A)$ où A est un objet de $\mathcal{K}$ et (X,g) est un objet de $\mathcal{H}_{(A)}$ fibre homotopique de p au-dessus de A. Un morphisme $(x,f) : ((X,g),A) \longrightarrow ((X',g'),A')$ est constitué d'un morphisme $f : A \longrightarrow A'$ de $\mathcal{K}$ et d'un morphisme $x : X \longrightarrow X'$ de $\mathcal{H}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p(X) & \xrightarrow{g} & A \\ {\scriptstyle p(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ p(X') & \xrightarrow[g']{} & A' \end{array} .$$

L'unité en $((X,g),A)$ est $(1_X, 1_A)$. La composition des morphismes est définie par le collage vertical des diagrammes du type précédent : $(x',f')(x,f) := (x'x, f'f)$. L'objet unité de $\underline{E}_p$ est $((I,\Phi_o),I)$. Le produit dans E_p est défini sur les objets par

$$((X,g),A) \otimes ((Y,h),B) := ((X \otimes Y, (g \otimes h)\Phi^p(X,Y)), A \otimes B)$$

et sur les morphismes par $(x,f) \otimes (y,e) := (x \otimes y, f \otimes e)$; ainsi :

$$\begin{array}{ccc} p(X) & \xrightarrow{g} & A \\ {\scriptstyle p(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ p(X') & \xrightarrow[g']{} & A' \end{array} \quad \otimes \quad \begin{array}{ccc} p(Y) & \xrightarrow{h} & B \\ {\scriptstyle p(y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ p(Y') & \xrightarrow[h']{} & B' \end{array}$$

$$\Vert$$

$$\begin{array}{ccccc} p(X \otimes Y) & \xrightarrow{\Phi^p} & p(X) \otimes p(Y) & \xrightarrow{g \otimes h} & A \otimes B \\ {\scriptstyle p(x \otimes y)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle f \otimes e} \\ p(X' \otimes Y') & \xrightarrow{\Phi^p} & p(X') \otimes p(Y') & \xrightarrow{g' \otimes h'} & A' \otimes B' \end{array}$$

Enfin, les contraintes d'associativité et d'unité sont respectivement données par les isomorphismes de $\underline{E}_p$

$$[((X,g),A)((Y,h),B)]((Z,k),C) \overset{(a_{X,Y,Z}, a_{A,B,C})}{\longrightarrow} ((X,g),A)[((Y,h),B)((Z,k),C)]$$

$$((I,\Phi),I)((X,g),A) \overset{(g_X, g_A)}{\longrightarrow} ((X,g),A) \quad \text{et} \quad ((X,g),A) \overset{(d_X, d_A)}{\longrightarrow} ((X,g),A)((I,\Phi),I)$$

L'homomorphisme $\pi : \underline{E}_p \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ est la projection sur $\underline{\mathcal{K}}$. C'est une cofibration puisque pour un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$ et un objet $((X,g),A)$ au dessus de A, le morphisme $(1_X, f) : ((X,g),A) \longrightarrow ((X,fg),B)$ est un morphisme de E_p au dessus de f. La fibre stricte $\pi^{-1}(I)$ de π est isomorphe à la fibre homotopique $\mathcal{H}_{(I)}$ de p, ce qui définit d'une part un homomorphisme $i : N(p) \longrightarrow \underline{E}_p$ de contraintes évidentes et d'autre part une extension cofibrée :

$$N(p) \xrightarrow{i} \underline{E}_p \xrightarrow{\pi} \underline{\mathcal{K}}.$$

Enfin, par composition de i avec l'équivalence $q = (r, \lambda) : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow N(p)$ intervenant dans l'extension (11.2.1), l'extension précédente donne une nouvelle extension cofibrée :

$$\underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{s} \underline{E}_p \xrightarrow{\pi} \underline{\mathcal{K}}. \tag{11.2.3}$$

Pour terminer, montrons à présent que les extensions (11.2.1) et (11.2.3) sont dans une même composante connexe c'est-à-dire qu'il existe un morphisme d'extension $(\alpha, \Theta, \gamma) : (q, p) \longrightarrow (s, \pi)$. L'homomorphisme $\Theta : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{E}_p$ est défini sur les objets par $\Theta(H) = ((H, 1_{p(H)}), p(H))$ et sur les morphismes $h : H \longrightarrow H'$ par $\Theta(h) = (h, p(h))$. La contrainte de comparaison est définie en H et H' de $\mathcal{H}$ par le morphisme de E_p : $\Phi^{\Theta}(H, H') := (1_{HH'}, \Phi^p(H, H'))$. L'isomorphisme naturel $\gamma : \pi\Theta \Longrightarrow p$ est une identité. Enfin, l'isomorphisme naturel $\alpha : \Theta r \Longrightarrow s$ est défini pour l'objet X de $\mathcal{G}$ par le morphisme $\alpha_X = (1_{r(X)}, \lambda_X)$ de E_p. On a ainsi défini un morphisme $(\alpha, \Theta, 1) : (q, p) \longrightarrow (s, \pi)$. □

Proposition 11.3. *Soit (q, p) une extension de $\underline{\mathcal{G}}$ par $\underline{\mathcal{K}}$. Pour tout objet A de $\mathcal{K}$ la fibre homotopique de p au dessus de A est équivalente à $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Soit (s, π) l'extension cofibrée (11.2.3) associée à l'extension (q, p). On sait, [**7**] prop. 3.2 (où le caractère central de n'intervient pas), que la fibre stricte de π au dessus de A est équivalente à $\mathcal{G}$. Cette fibre stricte est la fibre homotopique de p au dessus de A. □

11.4. Remarque. La cofibration $\pi : \underline{E}_p \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ de (11.2.2) provient - via les fibres homotopiques $\mathcal{H}_{(A)}$ - d'un pseudo-foncteur monoïdal défini sur $\underline{\mathcal{K}}$. Plus généralement, pour deux *gr*-catégories $\underline{\mathcal{H}}$ et $\underline{\mathcal{K}}$, on a un foncteur

$$\mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{K}}) \longrightarrow \mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Cat}})^{[1]} ,$$

construit pour un homomorphisme $p : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ de la façon suivante.

1. L'homomorphisme $F \in \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Cat})$ est *strict*. Il envoie l'objet A de $\mathcal{K}$ vers la catégorie $F_A := \mathcal{H}_{(A)}$ et le morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$ vers le foncteur $F_f : \mathcal{H}_{(A)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(B)}$, $(X, g) \mapsto F_f(X, g) = (X, fg)$.
2. Pour toute paire d'objets A et B de $\mathcal{K}$, le foncteur (noté quelquefois comme dans [**7**] par $\overline{\otimes}$)
$$T_{A,B} : \mathcal{H}_{(A)} \times \mathcal{H}_{(B)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(A \otimes B)},$$
envoie l'objet $(X, g) \times (Y, h)$ de $\mathcal{H}_{(A)} \times \mathcal{H}_{(B)}$ sur l'objet $(X \otimes Y, (g \otimes h) \circ \Phi^p(X, Y))$ et le morphisme $x \times y : (X, g) \times (Y, h) \longrightarrow (X', g') \times (Y', h')$ sur le morphisme
$$x \otimes y : (X \otimes Y, (g \otimes h) \circ \Phi^p(X, Y)) \longrightarrow (X' \otimes Y', (g' \otimes h') \circ \Phi^p(X', Y')).$$
3. Pour toute paire de morphismes $f : A \longrightarrow A'$ et $g : B \longrightarrow B'$ de $\mathcal{K}$, l'isomorphisme naturel $t_{f,g}$ est l'identité, $t_{f,g} : F_{f \otimes g} \circ T_{A,B} = T_{A',B'} \circ (F_f \times F_g)$.
4. L'objet $\tilde{I}$ de F_I est l'objet (I, Φ_o) de $\mathcal{H}_{(I)}$.

5. Pour tout triplet d'objets A, B et C de $\mathcal{K}$, l'isomorphisme naturel :

$$\alpha_{A,B,C} : F_{a_{A,B,C}} \circ T_{AB,C} \circ (T_{A,B} \times 1_{F_C}) \Longrightarrow T_{A,BC} \circ (1_{F_A} \times T_{B,C}),$$

est défini sur l'objet $(X,g) \times (Y,h) \times (Z,k)$ de $\mathcal{H}_{(A)} \times \mathcal{H}_{(B)} \times \mathcal{H}_{(C)}$ par le morphisme $a_{X,Y,Z} : F_{a_{A,B,C}}(((X,g)\overline{\otimes}(Y,h))\overline{\otimes}(Z,k)) \longrightarrow (X,g)\overline{\otimes}((Y,h)\overline{\otimes}(Z,k))$ de $\mathcal{H}_{A\otimes(B\otimes C)}$.

6. Enfin, pour tout objet A de $\mathcal{K}$, les isomorphismes naturels :

$$G_A : F_{g_A} \circ T_{I,A}(\tilde{I}, .) \Longrightarrow 1_{F_A} \quad \text{et} \quad D_A : T_{A,I}(., \tilde{I}) \Longrightarrow F_{d_A}$$

sont respectivement définis pour l'objet (X,g) de $\mathcal{H}_{(A)}$ par les morphismes :

$$g_X : F_{g_A}((I,\Phi_o)\overline{\otimes}(X,g)) \longrightarrow (X,g), \quad \text{et} \quad d_X : (X,g)\overline{\otimes}(I,\Phi_o) \longrightarrow F_{d_A}((X,g)) \ .$$

11.5. Cas des fibrations. Puisque $\mathcal{K}$ est un groupoïde, la discussion précédente sur les extensions cofibrées se transpose au cas fibré. En particulier, le 2-foncteur inclusion

$$i : \mathbf{Ext}_{Fib}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}}) \tag{11.5.1}$$

est une biéquivalence. L'essentielle surjectivité se montre exactement comme pour le cas cofibré (11.2) et aboutit à l'extension (11.2.3). La fibration monoïdale π obtenue dans cette extension provient alors du pseudo-foncteur monoïdal image de $p : \underline{\mathcal{H}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ par le foncteur :

$$\mathbf{Mon}(\underline{\mathcal{H}}, \underline{\mathcal{K}}) \longrightarrow \mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}^{op}, \mathbf{Cat})^{[1]} \ , p \mapsto \underline{G}_p \ , \tag{11.5.2}$$

de description identique à celle qui vient d'être donnée dans la précédente remarque mais où le foncteur $F_{f^{-1}} : \mathcal{H}_{(B)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(A)}$ est celui qu'il faut, dans le cas fibré, associer au morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$. Enfin notons qu'une biéquivalence quasi-inverse de (11.5.1) composée avec l'homorphisme canonique $\mathbf{Ext}_{fib}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Fibmon}_{\underline{\mathcal{K}}}$ donne un homomorphisme localement fidèle :

$$\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Fibmon}_{\underline{\mathcal{K}}} \tag{11.5.3}$$

12. Le morphisme $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}}(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})^{op}$

On construit dans cette section l'homomorphisme qui intervient pour le théorème de classification (p. 516). On souhaitait une description explicite, ce qui est obtenu mais nécessite une discussion longue et technique. Pour plus de lisibilité, on traîte seulement le cas où la *gr*-catégorie $\underline{\mathcal{G}}$ est unitaire et où les biéquivalences de $\underline{\mathcal{G}}$ sont strictes sur les unités. Dans la suite, $\underline{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \otimes, I, a, 1, 1)$ est donc une *gr*-catégorie dont les contraintes d'unité sont strictes. On note par $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$, la sous bicatégorie pleine de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$ des auto-équivalences de $\underline{\mathcal{G}}$ strictes sur les unités. La bicatégorie monoïdale $\underline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}})$, (4), admet une contrainte d'unité stricte et une contrainte d'associativité cohérente strictement (la modification π est une égalité). Ces simplifications permettent de donner une description complète de l'homomorphisme de classification

$$\underline{F} : \mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})^{op} \tag{12.0.1}$$

où $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}}))$ est la bicatégorie des co-homomorphismes définie en (5). Pour cette construction, on montre que l'on dispose d'un homomorphisme localemenent fidèle,

$$\underline{G} : \mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}^{op}}, \underline{\mathbf{Cat}})^{op} \tag{12.0.2}$$

12.1. Construction de $\underline{G}$ et $\underline{F}$ sur les objets

On commence par donner une description d'un objet $\underline{\theta}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))$. On construit ensuite son image $\underline{G}(\underline{\theta})$ par l'homomorphisme $\underline{G}$, (12.0.2). Enfin, l'image de $\underline{G}(\underline{\theta})$ par la biéquivalence (6.3.2) donne une fibration monoïdale que l'on complète pour obtenir l'extension $\underline{F}(\underline{\theta})$ cherchée.

- Description des objets de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))$

Soit $\underline{\theta} = (\theta, \chi, \iota, \omega, \gamma, \delta)$ un objet de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))$. Suivant [**3**] (déf. 2.2.2), on peut appeler un tel objet, un cocycle (non normalisé) de $\underline{\mathcal{K}}$ à valeur dans $\underline{\mathcal{G}}$. On retrouve, dans le cas où la *gr*-catégorie $\underline{\mathcal{K}}$ est discrète et modulo le choix d'objets quasi-inverses dans $\underline{\mathcal{G}}$, les cocycles définis dans loc. cit.. Les points nouveaux sont ici essentiellement dus aux morphismes de $\underline{\mathcal{K}}$. Avec (5.1), un ˋˋcocycle ´´ est donc défini par les cinq points (**HBM1**-**HBM5**) et les deux conditions de cohérence (**HTA1** et **HTA2**) adaptés au cas des co-homomorphismes (5.4). Plus précisément, un tel objet $\underline{\theta} = (\theta, \chi, \iota, \omega, \gamma, \delta)$ correspond aux données (**C1**-**C5**) et (**CA1** et **CA2**) suivantes (on utilise les notations introduites pour les $\underline{\mathcal{G}}$-bitorseurs sur $\mathcal{K}$, (9)).

• **C1** : Un objet $\theta = (\theta, C, i)$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$ (voir 9.3.4 - 9.3.10). Lorsque $\mathcal{K}$ est discrète, on obtient le foncteur $j : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}q(\underline{\mathcal{G}})$ (2.2.1.4) de [**3**].

• **C2** : Une pseudo-équivalence de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}\times\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}\times\mathcal{K} & \xrightarrow{\theta\times\theta} & \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})\times\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}) \\ {\scriptstyle\otimes}\downarrow & \overset{\chi^\theta}{\Rightarrow} & \downarrow{\scriptstyle\otimes} \\ \mathcal{K} & \xrightarrow[\theta]{} & \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}). \end{array}$$

C'est-à-dire une famille de pseudo-équivalences de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$,

$$\chi^\theta(A,B) : \theta(A\otimes B)\longrightarrow\theta(A)\otimes\theta(B), \tag{12.1.1}$$

(A,B) objet de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, et une famille de modifications de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$,

$$\chi^\theta(f\otimes g) : \chi^\theta(A',B').\theta(f\otimes g)\Longrightarrow(\theta(f)\otimes\theta(g)).\chi^\theta(A,B),$$

$(f,g) : (A,B)\longrightarrow(A',B')$ morphisme de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, cohérentes aux unités et à la composition de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$. Pour fixer les notations, rappelons que la pseudo-équivalence $\chi^\theta(A,B)$ est donnée par un objet $\chi^\theta(A,B)$ de $\underline{\mathcal{G}}$ et une famille d'isomorphismes,

$$\chi^\theta_X : \chi^\theta(A,B)\ {}^{AB}X\longrightarrow{}^{A}({}^{B}X)\chi^\theta(A,B), \tag{12.1.2}$$

naturels en X et cohérents à la structure de $\underline{\mathcal{G}}$, via les contraintes de comparaison $\Phi^{\theta(AB)}$, $\Phi^{\theta(A)}$ et $\Phi^{\theta(B)}$ des équivalences $\theta(AB)$, $\theta(A)$ et $\theta(B)$. Lorsque $\mathcal{K}$ est discrète et modulo des choix d'objets quasi-inverses dans $\underline{\mathcal{G}}$, (12.1.1) exprimé par les conditions (12.1.2), correspond dans [**3**] déf. (2.2.2) à la flèche $\underline{\lambda}_{A,B}$ de (2.2.1.8). Avec le produit défini sur $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$ en (4.1.1), la modification $\chi^\theta(f\otimes g)$ est donnée par un isomorphisme de $\mathcal{G}$,

$$\chi^\theta(f\otimes g) : \chi^\theta(A',B').\theta_{f\otimes g}\longrightarrow(\theta_f\,{}^{A}\theta_g)\chi^\theta(A,B), \tag{12.1.3}$$

tel que pour tout objet X de $\mathcal{G}$, on ait la commutativité du diagramme, (dans la suite, les contraintes d'associativité et les identités sont omises) :

$$\begin{array}{ccccc} (\chi^\theta(A',B')\theta_{f\otimes g})^{AB}X & \xrightarrow{\theta(f\otimes g)X} & \chi^\theta(A',B')^{A'B'}X\theta_{f\otimes g} & \xrightarrow{\chi^\theta_X} & {}^{A'}({}^{B'}X)\chi^\theta(A',B')\theta_{f\otimes g} \\ {\scriptstyle\chi^\theta(f\otimes g)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\chi^\theta(f\otimes g)} \\ \theta_f\,{}^{A}\theta_g\chi^\theta(A,B)^{AB}X & \xrightarrow[\chi^\theta_X]{} & \theta_f\,{}^{A}\theta_g\,{}^{A}({}^{B}X)\chi^\theta(A,B) & \xrightarrow[(\theta(f)\otimes\theta(g))_X]{} & {}^{A'}({}^{B'}X)[(\theta_f\,{}^{A}\theta_g)\chi^\theta(A,B)] \end{array} \tag{12.1.4}$$

où la flèche $(\theta(f)\otimes\theta(g))_X$ est celle de (4.1.3), qui s'exprime ici avec la composition dans $\mathcal{G}$,

$$\begin{array}{ccc} (\theta_f\,{}^{A}\theta_g)^{A}({}^{B}X) & \dashrightarrow^{(\theta(f)\otimes\theta(g))_X} & {}^{A'}({}^{B'}X)(\theta_f\,{}^{A}\theta_g) \\ {\scriptstyle(\Phi^{\theta(A)})^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle\theta(f)_{B'X}} \\ \theta_f\,{}^{A}(\theta_g\,{}^{B}X) & \xrightarrow[{}^{A}(\theta(g)_X)]{} \theta_f\,{}^{A}({}^{B'}X\theta_g) & \xrightarrow[\Phi^{\theta(A)}]{} \theta_f\,{}^{A}({}^{B'}X)^{A}\theta_g\ . \end{array} \tag{12.1.5}$$

Enfin, les conditions de cohérence à la composition et aux unités de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ de la pseudo-équivalence χ^θ s'expriment avec la commutativité des diagrammes de $\mathcal{G}$

suivants, l'isomorphisme $C^{\otimes}$ étant celui de (4.1.4),

$$\begin{array}{ccc}
\chi^\theta(A'',B'')\theta_{(f'\otimes g')(f\otimes g)} & \xrightarrow{\chi^\theta(f'f\otimes g'g)} & \theta_{f'f}{}^A\theta_{g'g}\chi^\theta(A,B) \\
\downarrow{\scriptstyle C_{(f\otimes g),(f'\otimes g')}} & & \downarrow{\scriptstyle C_{f,f'}{}^A C_{g,g'}} \\
\chi^\theta(A'',B'')\theta_{(f'\otimes g')}\theta_{(f\otimes g)} & & \theta_{f'}\theta_f{}^A(\theta_{g'}\theta_g)\chi^\theta(A,B) \\
\downarrow{\scriptstyle \chi^\theta(f'\otimes g')} & & \downarrow{\scriptstyle C^{\otimes}} \\
\theta_{f'}{}^{A'}\theta_{g'}\chi^\theta(A',B')\theta_{(f\otimes g)} & \xrightarrow[\chi^\theta(f\otimes g)]{} & ((\theta_{f'}{}^{A'}\theta_{g'})(\theta_f{}^A\theta_g))\chi^\theta(A,B)
\end{array} \tag{12.1.6}$$

pour deux morphismes $(f,g) : (A,B) \longrightarrow (A',B')$ et $(f',g') : (A',B') \longrightarrow (A'',B'')$ composables de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, et,

$$\begin{array}{ccc}
\chi^\theta(A,B)\theta_{1_{AB}} & \xrightarrow{\chi^\theta(1_A\otimes 1_B)} & \theta_{1_A}{}^A\theta_{1_B}\chi^\theta(A,B) \\
\downarrow{\scriptstyle 1 i_{AB}} & & \downarrow{\scriptstyle i_A{}^A i_B 1} \\
\chi^\theta(A,B) & = & \chi^\theta(A,B)
\end{array}$$

pour tout objet (A,B) de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$.

• **C3** : Une pseudo-équivalence de $\mathbf{Bicat}(\mathbb{1},\ \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$, $\iota : \theta\circ I \longrightarrow I$. Ce qui correspond à la donnée d'une pseudo-équivalence de $\mathbf{Bieq_u}(\underline{\mathcal{G}})$, $\iota : \theta(I) \longrightarrow 1_{\underline{\mathcal{G}}}$, c'est-à-dire d'un objet $\tilde{I}$ de $\mathcal{G}$ et d'une famille d'isomorphismes de $\mathcal{G}$, naturels en X,

$$\iota_X : \tilde{I}\ {}^I X \longrightarrow X\tilde{I}\ . \tag{12.1.7}$$

La condition de cohérence aux unités de cette pseudo-équivalence s'exprime avec l'égalité

$$\iota_{1_I} = \tilde{I} i_I : \tilde{I}\theta_{1_I} \longrightarrow \tilde{I}. \tag{12.1.8}$$

• **C4** : Une modification inversible de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$,

$$\omega^\theta : a.((\chi^\theta\otimes 1).\chi^\theta) \Longrightarrow ((1\otimes\chi^\theta).\chi^\theta).\theta a. \tag{12.1.9}$$

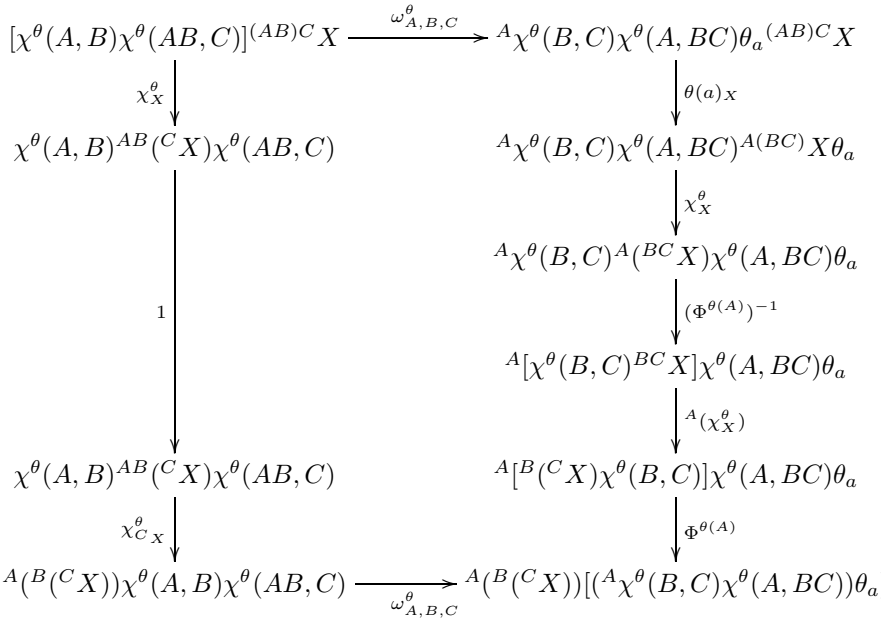
En un objet (A,B,C) de $\mathcal{K}^3$, la composante de cette modification est une modification de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$,

$$\begin{array}{ccccc}
\theta((AB)C) & \xrightarrow{\chi^\theta(AB,C)} & \theta(AB)\theta(C) & \xrightarrow{\chi^\theta(A,B)\otimes I} & (\theta(A)\theta(B))\theta(C) \\
\downarrow{\scriptstyle \theta(a)} & & & \overset{\omega^\theta_{A,B,C}}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle a} \\
\theta(A(BC)) & \xrightarrow[\chi^\theta(A,BC)]{} & \theta(A)\theta(BC) & \xrightarrow[I\otimes\chi^\theta(B,C)]{} & \theta(A)(\theta(B)\theta(C)),
\end{array} \tag{12.1.10}$$

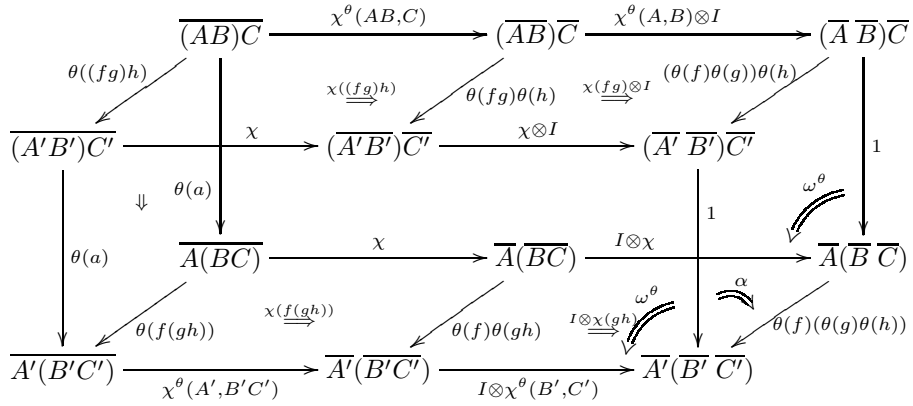
donnée par un isomorphisme de $\underline{\mathcal{G}}$,

$$\omega^{\theta}_{A,B,C} : \chi^{\theta}(A,B)\chi^{\theta}(AB,C) \longrightarrow [{}^{A}\chi^{\theta}(B,C)\chi^{\theta}(A,BC)]\theta_a, \tag{12.1.11}$$

tel que, pour tout objet X de $\mathcal{G}$, le diagramme suivant de $\mathcal{G}$ commute,



Lorsque $\mathcal{K}$ est discrète et toujours modulo des choix d'objets quasi-inverses dans $\underline{\mathcal{G}}$, l'isomorphisme (12.1.11) induit par (12.1.10), correspond dans [**3**] à la flèche $a_{A,B,C}$ de (2.2.1.10) induisant (2.2.1.11). Poursuivons cette description. La condition de cohérence de la modification ω^{θ} au morphisme $(f\times g\times h) : (A,B,C) \longrightarrow (A',B',C')$ de $\mathcal{K}^3$, (où l'on a noté $\overline{X}$ pour $\theta(X)$),



(12.1.12)

donne le diagramme commutatif de $\mathcal{G}$ suivant,

$$\begin{array}{ccc}
[\chi^\theta(A',B')\chi^\theta(A'B',C')]\theta_{(fg)h} & \xrightarrow{\omega^\theta_{A',B',C'}} & {}^{A'}\chi^\theta(B',C')\chi^\theta(A',B'C')\theta_a\theta_{(fg)h} \\
\downarrow{\scriptstyle \chi^\theta((f\otimes g)\otimes h)} & & \downarrow{\scriptstyle C^{-1}_{(f\otimes g)\otimes h,a}C_{a,f\otimes(g\otimes h)}} \\
\chi^\theta(A',B')\theta_{fg}{}^{AB}\theta_h\chi^\theta(AB,C) & & {}^{A'}\chi^\theta(B',C')\chi^\theta(A',B'C')\theta_{f(gh)}\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \chi^\theta(f\otimes g)\boxtimes I_{\theta(h)}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi^\theta(f\otimes(g\otimes h))} \\
\theta_f{}^A\theta_g{}^A({}^B\theta_h)\ \chi^\theta(A,B)\chi^\theta(AB,C) & & {}^{A'}\chi^\theta(B',C')\theta_f{}^A\theta_{gh}\chi^\theta(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_{\theta(f),\theta(g),\theta(h)}} & & \downarrow{\scriptstyle I_{\theta(f)}\boxtimes\chi^\theta(g\otimes h)} \\
\theta_f{}^A(\theta_g{}^B\theta_h)\ \chi^\theta(A,B)\chi^\theta(AB,C) & \xrightarrow[\omega^\theta_{A,B,C}]{} & [\theta_f{}^A(\theta_g{}^B\theta_h)][({}^A\chi^\theta(A,B)\chi^\theta(A,BC))\theta_a]\ .
\end{array} \tag{12.1.13}$$

Les flèches $\chi^\theta(f\otimes g)\boxtimes I_{\theta(h)}$ et $I_{\theta(f)}\boxtimes\chi^\theta(g\otimes h)$ sont obtenues avec (4.0.1). La flèche $\alpha_{\theta(f),\theta(g),\theta(h)} : (\theta_f{}^A\theta_g)^A({}^B\theta_h)\longrightarrow\theta_f{}^A(\theta_g{}^B\theta_h)$ est donnée par la contrainte d'associativité (4.1.5).

• **C5** : Des modifications inversibles de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K};\ \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$,

$$\gamma : g_{\theta(-)}.(\iota\otimes I_{\theta(-)}).\chi^\theta(I,-)\Longrightarrow\theta(g_-) : \theta(I-)\longrightarrow\theta(-)$$

$$\delta : d_{\theta(-)}\Longrightarrow(I_{\theta(-)}\otimes\iota).\chi^\theta(-,I).\theta(d_-) : \theta(-)1_G\longrightarrow\theta(-)\ .$$

Etant donné que $\underline{\mathcal{G}}$ et $\theta(I)$ sont unitaires, la composante en A de la modification γ est la modification $\gamma(A)$ de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})(\theta(IA),\theta(A))$ donnée par l'isomorphisme

$$\gamma_A : \tilde{I}\chi^\theta(I,A)\longrightarrow\theta_{g_A} \tag{12.1.14}$$

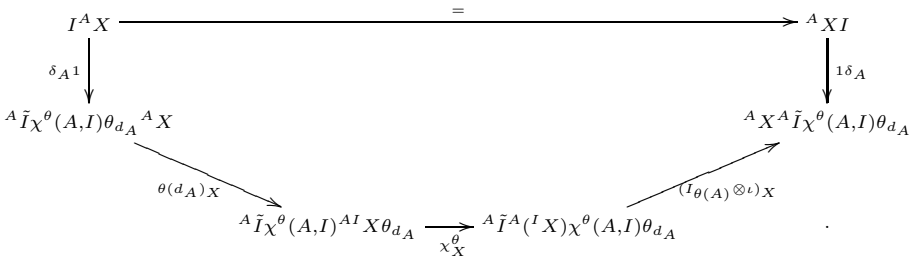
tel que pour tout objet X de $\mathcal{G}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
[\tilde{I}\chi^\theta(I,A)]^{IA}X & \xrightarrow{\chi^\theta_X} & \tilde{I}^I({}^AX)\chi^\theta(I,A) & \xrightarrow{\iota_{AX}} & {}^AX\tilde{I}\chi^\theta(I,A) \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_A 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle 1\gamma_A} \\
\theta_{g_A}{}^{IA}X & & \xrightarrow[\theta(g_A)_X]{} & & {}^AX\theta_{g_A}\ .
\end{array}$$

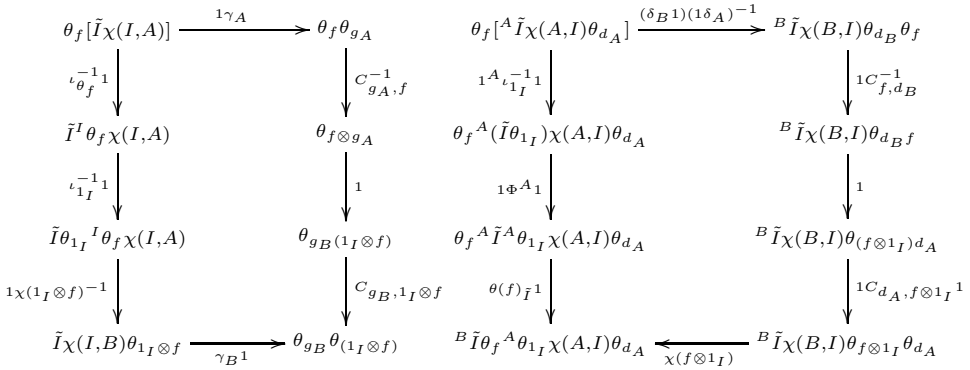
De même, la composante en A de la modification δ est la modification $\delta(A)$ de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})(\theta(A),\theta(A))$ donnée par l'isomorphisme

$$\delta_A : I\longrightarrow{}^A\tilde{I}\chi^\theta(A,I)\theta_{d_A} \tag{12.1.15}$$

tel que pour tout objet X de $\mathcal{G}$

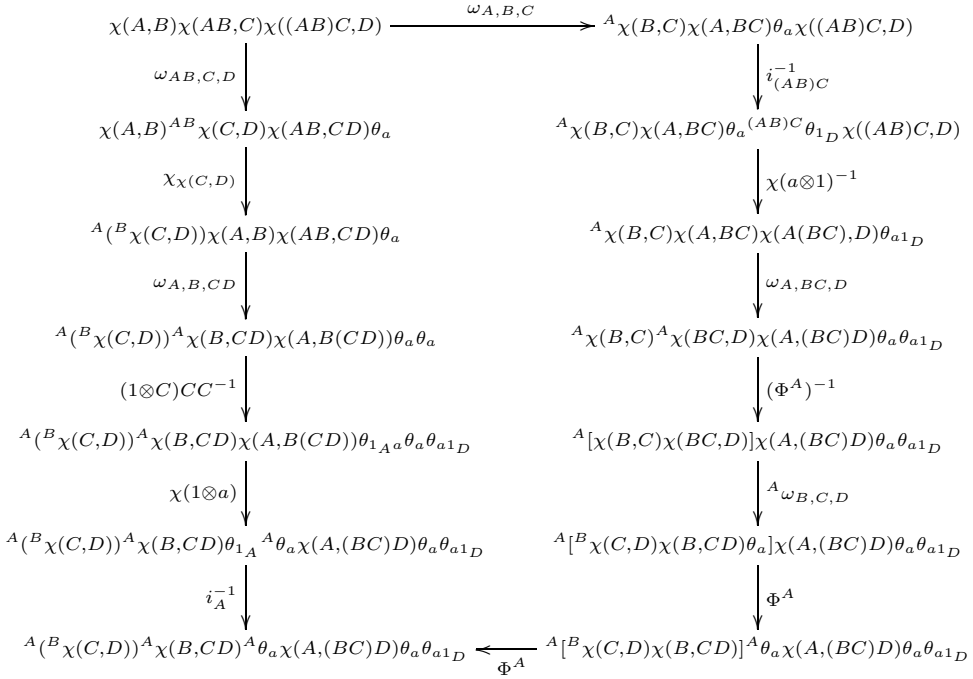


Enfin, les conditions de cohérence des modifications γ et δ s'expriment au morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$, avec les diagrammes commutatifs de $\mathcal{G}$ suivants :



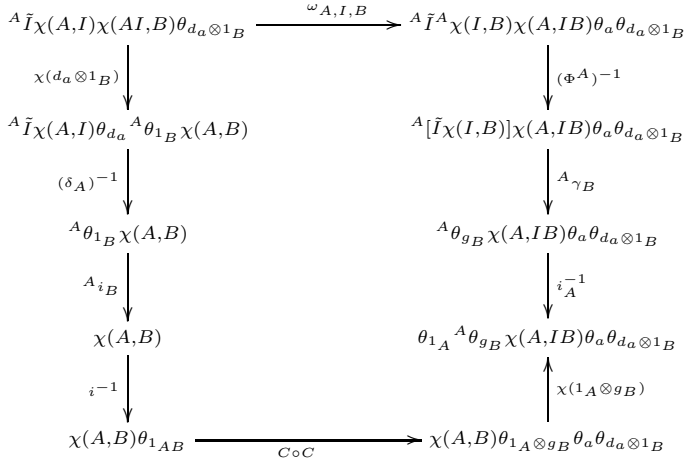
(12.1.16)

• **CA1** et **CA2** : Pour finir cette description d'un objet $(\theta, \chi, \iota, \omega, \gamma, \delta)$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}}))$, il reste à énoncer les conditions de cohérence, [**17**], **HTA1** et **HTA2**, que doivent respecter les données précédentes. La première condition exprime la cohérence des contraintes d'associativité et de la modification ω. Pour $\mathcal{K}$ discrète, elle correspond à la condition (2.2.1.12) de [**3**]. Pour le cas présent, cette dernière s'énonce avec la commutativité, pour tout objet (A, B, C, D) de $\underline{\mathcal{K}}^4$, du diagramme de $\underline{\mathcal{G}}$:



(12.1.17)

La deuxième condition exprime la cohérence des modifications ω, γ et δ. Elle s'énonce avec la commutativité, pour tout objet (A,B) de $\underline{\mathcal{K}}^2$, du diagramme de $\underline{\mathcal{G}}$:



Ce qui clôt la description d'un objet $\underline{\theta} = (\theta, \chi, \iota, \omega, \gamma, \delta)$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}}))$.

- Le pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G}(\underline{\theta})$ image de $\underline{\theta}$ par $\underline{G}$, (12.0.2).

Un objet $\underline{\theta}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$ détermine un pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G(\theta)}$ i.e. un objet de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\overline{\mathcal{K}^{op}}}, \mathbf{Cat})$ (voir 5.1 et 6.1) de la façon suivante.

• **PS1** Le pseudo-foncteur $(G(\theta), i, C) : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ sous-jacent à $\underline{G(\underline{\theta})}$ est obtenu avec **C1**, (9.3.1) et oubli des actions. Les images par $G(\theta)$ d'un objet A (noté $\mathcal{G}_A$) et d'un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$ sont respectivement la catégorie $\mathcal{G}$ et l'auto-équivalence, $G_f : \mathcal{G}_B \longrightarrow \mathcal{G}_A$, tensorisation à droite par l'objet θ_f. Les contraintes de comparaison et d'unité de $G(\theta)$ sont définies par tensorisation à droite de (9.3.9).

• **PS2** La pseudo-équivalence T^θ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})$ est définie à partir de celle donnée par **C2**, p. 490. Sa composante en un objet (A, B) de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, est le foncteur

$$T^\theta_{A,B} : \mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B \overset{1\times\theta(A)}{\longrightarrow} \mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B \overset{\otimes}{\longrightarrow} \mathcal{G}_{AB} \overset{t_d(\chi(A,B))}{\longrightarrow} \mathcal{G}_{AB} \ . \tag{12.1.18}$$

La contrainte au morphisme $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (A', B')$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ de cette pseudo-équivalence est l'isomorphisme naturel, $t_{f,g} : T^\theta_{A,B} \circ (G_f \times G_g) \Longrightarrow G_{f\otimes g} \circ T^\theta_{A',B'}$ défini par le collage dans **Cat**

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G}_{A'} \times \mathcal{G}_{B'} & \xrightarrow{1\times\theta(A')} & \mathcal{G}_{A'} \times \mathcal{G}_{B'} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{G}_{A'B'} & \xrightarrow{t_d(\chi(A',B'))} & \mathcal{G}_{A'B'} \\
\downarrow{\scriptstyle t_d(\theta_f)\times t_d(\theta_g)} & \Uparrow t_{f*g} & & & \downarrow{\scriptstyle t_d(\theta_f{}^A\theta_g)} & \Uparrow t_d(\chi(f\otimes g)^{-1}) & \downarrow{\scriptstyle t_d(\theta_{f\otimes g})} \\
\mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B & \xrightarrow[1\times\theta(A)]{} & \mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B & \xrightarrow[\otimes]{} & \mathcal{G}_{AB} & \xrightarrow[t_d(\chi(A,B))]{} & \mathcal{G}_{AB} \ ,
\end{array} \tag{12.1.19}$$

où t_{f*g} est l'isomorphisme naturel de **Cat** dont la composante en l'objet (X, Y) de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est donnée par la composée :

$$t_{f*g}(X, Y) : (X\theta_f)^A (Y\theta_g) \overset{\Phi^A}{\longrightarrow} X\theta_f{}^A Y^A \theta_g \overset{\theta(f)_Y}{\longrightarrow} (X^{A'}Y)(\theta_f{}^A\theta_g) \ . \tag{12.1.20}$$

L'expression en un objet (X, Y) de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ de $t_{f,g}$ est donc l'isomorphisme de $\mathcal{G}$ obtenu par la composée :

$$\begin{array}{ccc}
[(X\theta_f)^A (Y\theta_g)]\chi(A, B) & \overset{t_{f,g}(X,Y)}{\longrightarrow} & [(X^{A'}Y)\chi(A', B')]\theta_{f\otimes g} \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi^A} & & \uparrow{\scriptstyle \chi(f\otimes g)^{-1}} \\
X\theta_f{}^A Y^A \theta_g \chi(A, B) & \xrightarrow[\theta(f)_Y]{} & X^{A'}Y\theta_f{}^A\theta_g\chi(A, B) \ .
\end{array} \tag{12.1.21}$$

Les conditions de cohérence aux unités et à la composition s'obtiennent sans difficultés. En effet, la famille t_{f*g}, indexée par les morphismes de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, est cohérente aux unités et à la composition de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ avec pour seule donnée **C1**, p. 489. Par ailleurs, les contraintes liées à la cohérence des isomorphismes t_{f*g} et $\chi(f \otimes g)$ (12.1.6) coïncident suivant le collage (12.1.19). Un collage vertical de (12.1.19) donne que les cohérences de $\chi(f \otimes g)$ et de $t_{f,g}$ sont équivalentes puisque celles de t_{f*g} ne dépendent que de **C1**.

• **PS3** La pseudo-équivalence de $\mathbf{Bicat}(\mathbb{1}, \mathbf{Cat})$ est juste donnée par l'objet $\tilde{I}$ de $\mathcal{G}$ intervenant dans la pseudo-équivalence ι (12.1.7).

• **PS4** La modification

$$\alpha : T.(T \times 1) \Longrightarrow G_a.T.(1 \times T) \tag{12.1.22}$$

admet pour composante en (A, B, C) de $\mathcal{K}^3$, l'isomorphisme naturel :

$$\alpha^{\theta}_{A,B,C} : T_{AB,C} \circ (T_{A,B} \times 1_{\mathcal{G}}) \Longrightarrow G_{a_{A,B,C}} \circ T_{A,BC} \circ (1_{\mathcal{G}} \times T_{B,C}) \ , \tag{12.1.23}$$

d'expression en (X, Y, Z) de $\mathcal{G}^3$, l'isomorphisme $\alpha_{A,B,C}(X, Y, Z)$ de $\mathcal{G}$ obtenu par la composition

$$\begin{array}{ccc}
[((X^A Y)\chi(A,B))^{AB} Z]\chi(AB,C) & \overset{\alpha_{A,B,C}(X,Y,Z)}{- - - - - - \rightarrow} & ((X^A[(Y^B Z)\chi(B,C)])\chi(A,BC))\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \chi_Z} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi^{-1}\circ\Phi^{-1}} \\
X^A Y^A({}^B Z)\chi(A,B)\chi(AB,C) & \xrightarrow[\omega_{A,B,C}]{} & X^A Y^A({}^B Z)^A \chi(B,C)\chi(A,BC)\theta_a
\end{array} \tag{12.1.24}$$

Cet isomorphisme est clairement fonctoriel. Il reste à montrer que les isomorphismes $\alpha_{A,B,C}$ déterminent bien une modification. Ce dernier point s'obtient en montrant que pour tout morphisme $(f, g, h) : (A, B, C) \longrightarrow (D, E, F)$ de $\mathcal{K}^3$ le diagrame suivant de $\mathcal{G}$ commute

$$\begin{array}{ccc}
X{\theta_f}^A (Y\theta_g)\chi(A,B)^{AB}(Z\theta_h)\chi(AB,C) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}(X\theta_f, Y\theta_g, Z\theta_h)} & X{\theta_f}^A[Y{\theta_g}^B(Z\theta_h)\chi(B,C)]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle t_{f,g}} & & \downarrow{\scriptstyle {}^A t_{g,h}} \\
X^D Y\chi(D,E){\theta_{f\otimes g}}^{AB}(Z\theta_h)\chi(AB,C) & & X{\theta_f}^A[(Y^E Z)\chi(E,F)\theta_{g\otimes h}]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle t_{f\otimes g,h}} & & \downarrow{\scriptstyle C\circ C^{-1}\circ t_{f,g\otimes h}} \\
X^D Y\chi(D,E)^{DE} Z\chi(DE,F)\theta_{(f\otimes g)\otimes h} & \xrightarrow[\alpha_{D,E,F}(X,Y,Z)\ 1]{} & (X^D[Y^E Z\chi(E,F)]\chi(D,EF)\theta_a)\theta_{(f\otimes g)\otimes h}
\end{array} \tag{12.1.25}$$

ce qui équivaut, avec la définition des isomorphismes $\alpha_{A,B,C}(X, Y, Z)$, à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
X{\theta_f}^A (Y\theta_g)^A({}^B(Z\theta_h))\chi(A,B)\chi(AB,C) & \xrightarrow{\omega_{A,B,C}} & X{\theta_f}^A (Y\theta_g)^A({}^B(Z\theta_h))^A \chi(B,C)\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \chi^{-1}_{Z\theta_h}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{-1}\circ\Phi^{-1}} \\
X{\theta_f}^A (Y\theta_g)\chi(A,B)^{AB}(Z\theta_h)\chi(AB,C) & & X{\theta_f}^A[Y{\theta_g}^B(Z\theta_h)\chi(B,C)]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle t_{f,g}} & & \downarrow{\scriptstyle {}^A t_{g,h}} \\
X^D Y\chi(D,E){\theta_{f\otimes g}}^{AB}(Z\theta_h)\chi(AB,C) & \mathbf{I} & X{\theta_f}^A[(Y^E Z)\chi(E,F)\theta_{g\otimes h}]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle t_{f\otimes g,h}} & & \downarrow{\scriptstyle C\circ C^{-1}\circ t_{f,g\otimes h}} \\
X^D Y\chi(D,E)^{DE} Z\chi(DE,F)\theta_{(f\otimes g)\otimes h} & & (X^D[Y^E Z\chi(E,F)]\chi(D,EF)\theta_a)\theta_{(f\otimes g)\otimes h} \\
\downarrow{\scriptstyle \chi_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi\circ\Phi} \\
X^D Y^D({}^E Z)\chi(D,E)\chi(DE,F)\theta_{(f\otimes g)\otimes h} & \xrightarrow[\omega_{D,E,F}]{} & X^D Y^D({}^E Z)^D \chi(E,F)\chi(D,EF)\theta_a\theta_{(f\otimes g)\otimes h} \ .
\end{array}$$

On applique sur l'arête supérieure le morphisme (où les contraintes relatives aux homomorphismes $\theta(A)$, $\theta(B)$, etc. sont omises)

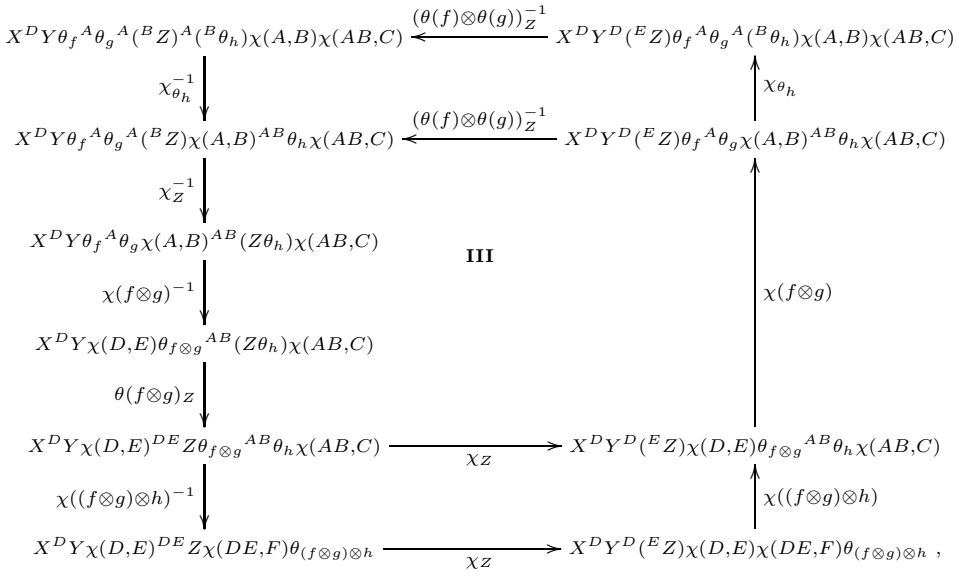
$$X\theta_f{}^A(Y\theta_g)^A({}^B(Z\theta_h)) \xrightarrow{\theta(f)_Y} X^DY\theta_f{}^A\theta_g{}^A({}^B(Z\theta_h)) \xrightarrow{(\theta(f)\otimes\theta(g))_Z} X^DY^D({}^EZ)\theta_f{}^A\theta_g{}^A({}^B\theta_h)$$

et la commutativité de (**I**) équivaut alors à celle du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
X^DY^D({}^EZ)\theta_f{}^A\theta_g{}^A({}^B\theta_h)\chi(A,B)\chi(AB,C) & \xrightarrow{1\otimes(1\omega_{A,B,C})} & X^DY^D({}^EZ)\theta_f{}^A\theta_g{}^A({}^B\theta_h)^A\chi(B,C)\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle (\theta(f)\otimes\theta(g))_Z^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle (\theta(f)\otimes\theta(g))_Z^{-1}} \\
X^DY\theta_f{}^A\theta_g{}^A({}^B(Z\theta_h))\chi(A,B)\chi(AB,C) & & X^DY\theta_f{}^A\theta_g{}^A({}^B(Z\theta_h))^A\chi(B,C)\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle (\theta(f)_Y)^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle (\theta(f)_Y)^{-1}} \\
X\theta_f{}^A(Y\theta_g)^A({}^B(Z\theta_h))\chi(A,B)\chi(AB,C) & & X\theta_f{}^A(Y\theta_g)^A({}^B(Z\theta_h))^A\chi(B,C)\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \chi^{-1}_{Z\theta_h}} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{-1}\circ\Phi^{-1}} \\
X\theta_f{}^A(Y\theta_g)\chi(A,B)^{AB}(Z\theta_h)\chi(AB,C) & \textbf{II} & X\theta_f{}^A[Y\theta_g{}^B(Z\theta_h)\chi(B,C)]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle t_{f,g}} & & \downarrow{\scriptstyle {}^At_{g,h}} \\
X^DY\chi(D,E)\theta_{f\otimes g}{}^{AB}(Z\theta_h)\chi(AB,C) & & X\theta_f{}^A[(Y^EZ)\chi(E,F)\theta_{g\otimes h}]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle t_{f\otimes g,h}} & & \downarrow{\scriptstyle C\circ C^{-1}\circ t_{f,g\otimes h}} \\
X^DY\chi(D,E)^{DE}Z\chi(DE,F)\theta_{(f\otimes g)\otimes h} & & (X^D[Y^EZ\chi(E,F)]\chi(D,EF)\theta_a)\theta_{(f\otimes g)\otimes h} \\
\downarrow{\scriptstyle \chi_Z} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi\circ\Phi} \\
X^DY^D({}^EZ)\chi(D,E)\chi(DE,F)\theta_{(f\otimes g)\otimes h} & \xrightarrow[1\otimes(\omega_{D,E,F}1)]{} & X^DY^D({}^EZ)^D\chi(E,F)\chi(D,EF)\theta_a\theta_{(f\otimes g)\otimes h}\ .
\end{array}$$

Pour finir, on montre que la commutativité de (**II**) équivaut à la condition de cohérence de la modification ω exprimée au morphisme (f,g,h), (12.1.13), multipliée à gauche par $X^DY^D({}^EZ)$. Pour cela, il suffit que les compositions verticales de (**II**) soient celles intervenant pour la cohérence de ω. Pour l'arête de gauche, après avoir explicité celle-ci, le résultat est obtenu avec le diagramme suivant (les contraintes

relatives aux homomorphismes $\theta(-)$ sont omises) :



l'arête droite de ce diagramme est celle qui intervient à gauche pour la cohérence de ω, multipliée par $X^DY^D({}^EZ)$. Le reste du parcours extérieur est l'arête gauche de (**II**). Enfin, ce diagramme est commutatif car (**III**) est l'expression en Z de la modification $\chi^\theta(f\otimes g)$ (12.1.3). Pour l'arête droite de (**II**), on procède de la même façon et la vérification est laissée au lecteur.

• **PS5** Enfin, les composantes en un objet A de $\mathcal{K}$ des modifications de (5.1, **HBM5**), notées ici par Γ et Δ, sont données par les isomorphismes naturels, (6.1, pt. 5 pour le cas d'une cofibration)

$$\Gamma_A : T_{I,A}(\tilde{I},.)\Longrightarrow G_{g_A} \quad \text{et} \quad \Delta_A : 1_{\mathcal{G}}\Longrightarrow G_{d_A}\circ T_{A,I}(.,\tilde{I}),$$

respectivement définis en un objet X de $\mathcal{G}$ par les isomorphismes de $\mathcal{G}$:

$$\Gamma_A(X) : \tilde{I}^I X\chi(I,A) \xrightarrow{\iota_X} X\tilde{I}\chi(I,A) \xrightarrow{X\gamma_A} X\theta_{g_A} \tag{12.1.26}$$

$$\Delta_A(X) : X \xrightarrow{X\delta_A} X^A\tilde{I}\chi(A,I)\theta_{d_A}. \tag{12.1.27}$$

Les conditions de cohérence de Γ et Δ s'obtiennent en utilisant celles des modifications γ et δ (12.1.16). Pour un morphisme $f : A\longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$, elles correspondent à

la commutativité dans $\mathcal{G}$ des diagrammes :

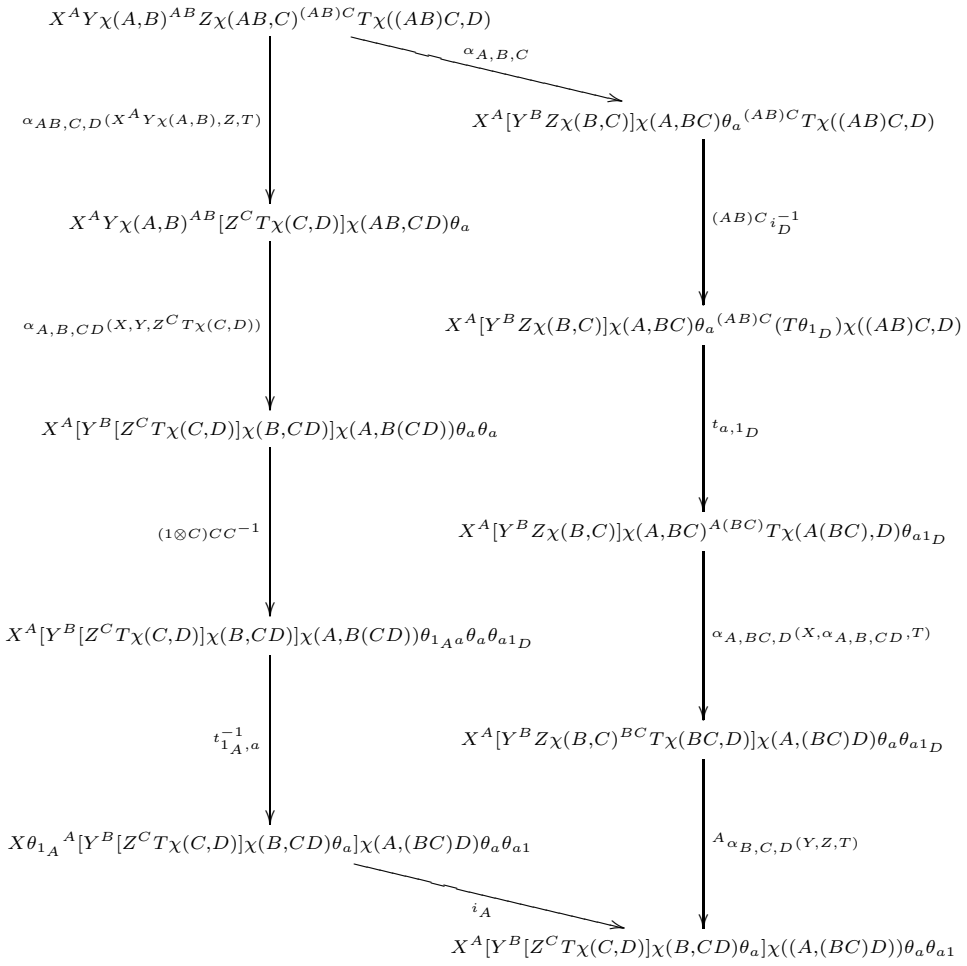
$$\begin{array}{ccc}
\tilde{I}^I(X\theta_f)\chi(I,A) & \xrightarrow{\Gamma_A(X\theta_f)} & X\theta_f\theta_{g_A} \\
{\scriptstyle i_I^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C} \\
\tilde{I}(I\theta_{1_I})^I(X\theta_f)\chi(I,A) & & X\theta_{fg_A} \\
{\scriptstyle t_{1_I,f}(I,X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C} \\
\tilde{I}^I X\chi(I,B)\theta_{1_I\otimes f} & \xrightarrow[\Gamma_B(X)1]{} & X\theta_{g_B}\theta_{(1_I\otimes f)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
X\theta_f{}^A\tilde{I}\chi(A,I)\theta_{d_A} & \xleftarrow{\Delta_A(X\theta_f)} & X\theta_f \\
{\scriptstyle i_I^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_B(X)} \\
X\theta_f{}^A(\tilde{I}\theta_{1_I})\chi(A,I)\theta_{d_A} & & X^B\tilde{I}\chi(B,I)\theta_{d_B}\theta_f \\
{\scriptstyle t_{f,1_I}(X,\tilde{I})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C^{-1}} \\
X^B\tilde{I}\chi(B,I)\theta_{f\otimes 1_I}\theta_{d_A} & \xleftarrow{C} & X^B\tilde{I}\chi(B,I)\theta_{(f\otimes 1_I)d_A}
\end{array}
\tag{12.1.28}$$

Pour terminer, il faut vérifier que la modification α (12.1.22) est cohérente à l'associativité et aux modifications Γ et Δ. La cohérence des modifications α, Γ et Δ correspond à la commutativité, pour tout objet (X, Z) de $\mathcal{G}^2$, du diagramme suivant de $\underline{\mathcal{G}}$:

$$\begin{array}{ccc}
X^A\tilde{I}\chi(A,I)^{AI}Z\chi(AI,B)\theta_{d_A\otimes 1_B} & \xrightarrow{\alpha_{A,I,B}(X,\tilde{I},Z)} & X^A[\tilde{I}^I Z\chi(I,B)]\chi(A,IB)\theta_a\theta_{d_A\otimes 1_B} \\
{\scriptstyle t^{-1}_{d_A,1_B}(X^A\tilde{I}\chi(A,I),\ Z)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_A^{-1}\otimes^A\Gamma_B(Z)} \\
X^A\tilde{I}\chi(A,I)\theta_{d_A}{}^A(Z\theta_{1_B})\chi(A,B) & & X\theta_{1_A}{}^A(Z\theta_{g_B})\chi(A,IB)\theta_a\theta_{d_A\otimes 1_B} \\
{\scriptstyle (\Delta_A(X))^{-1}\otimes^A(Zi_B)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_{1_A,g_B}(X,Z)} \\
X^A Z\chi(A,B) & \xrightarrow[C\circ C\circ i_{AB}^{-1}]{} & X^A Z\chi(A,B)\theta_{1_A\otimes g_B}\theta_a\theta_{d_A\otimes 1_B}\ .
\end{array}$$

La cohérence à l'associativité de la modification α correspond à la commutativité,

pour tout objet (X,Y,Z,T) de $\mathcal{G}^4$, du diagramme suivant de $\underline{\mathcal{G}}$:



(12.1.29)

Les détails sur la commutativité de ces deux derniers diagrammes sont laissés au lecteur. La commutativité du premier s'obtient avec la cohérence des modifications ω, γ et δ, celle du second avec à la cohérence à l'associativité de la modification ω.

- L'extension $\underline{F}(\underline{\theta})$, image de $\underline{\theta}$ par l'homomorphisme (12.0.1).

L'image de $\underline{\theta}$ par (12.0.1) est une extension fibrée (r,p) de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$,

$$\underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{r} \underline{E}_{c(\theta)} \xrightarrow{p} \underline{\mathcal{K}} \tag{12.1.30}$$

où p est la fibration monoïdale image par la biéquivalence (6.3.2) du pseudo-foncteur précédent. La fibration $p : E_{c(\theta)} \longrightarrow \mathcal{K}$ sous jacente est exactement celle de (9.3.13) (et oubli des actions) construite avec l'objet (θ, C, i) fourni par **C1** (p. 489). La structure de *gr*-catégorie de $\underline{E}_{c(\theta)}$ obtenue par (6.3.2) est la suivante. Le produit

$\otimes : E_{c(\theta)} \times E_{c(\theta)} \longrightarrow E_{c(\theta)}$ est défini sur les objets par l'égalité

$$(X, A) \otimes (Y, B) = ((X^A Y)\chi^\theta(A, B),\ A \otimes B)$$

et au morphisme $(x, f) \times (y, g) : (X, A) \times (Y, B) \longrightarrow (X', A') \times (Y', B')$ par l'égalité

$$(x, f) \otimes (y, g) = (t_{f,g}(X', Y') \circ x^A y, f \otimes g),$$

où la première composante correspond plus précisément à la composition (les contraintes d'associativité et les unités sont toujours omises) :

$$\begin{array}{ccccc}
(X^A Y)\chi^\theta(A,B) & - - - - - - - - - - - - - - - - - \rightarrowtail & & & [(X'^{A'}Y')\chi^\theta(A',B')]\theta_{f\otimes g} \\
{\scriptstyle x^A y}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \chi(f\otimes g)^{-1}} \\
X'\theta_f{}^A(Y'\theta_g)\chi^\theta(A,B) & \xrightarrow[\Phi^A]{} & X'\theta_f{}^A Y'^A\theta_g\chi^\theta(A,B) & \xrightarrow[\theta(f)_{Y'}]{} & X'^{A'}Y'\theta_f{}^A\theta_g\chi^\theta(A,B)\ .
\end{array}$$

La contrainte d'associativité est donnée aux objets (X, A), (Y, B) et (Z, C) de $E_{c(\theta)}$ par l'isomorphisme :

$$[(X, A) \otimes (Y, B)] \otimes (Z, C) \xrightarrow{(\alpha_{A,B,C}(X,Y,Z),\ a)} (X, A) \otimes [(Y, B) \otimes (Z, C)]\ .$$

Enfin, $(\tilde{I}, I)$ est l'objet unité et les contraintes d'unité sont données en (X, A) par les isomorphismes

$$(\tilde{I}, I) \otimes (X, A) \xrightarrow{(\Gamma_A(X),\ g_A)} (X, A) \qquad \text{et} \qquad (X, A) \xrightarrow{(\Delta_A(X),\ d_A)} (X, A) \otimes (\tilde{I}, I).$$

Passons à la définition de l'homomorphisme $(r, \Phi^r) : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \underline{E}_{c(\theta)}$ (10.1.1, pour un rappel) intervenant dans l'extension (12.1.30). Le foncteur r est à valeur sur la fibre stricte de p au dessus de l'objet unité I de $\underline{\mathcal{K}}$. L'image d'un morphisme $x : X \longrightarrow X'$ est définie par le morphisme de $\underline{E}_{c(\theta)}$

$$r(x) = ((x \otimes \tilde{I}) \otimes i_{1_I}^{-1}), 1_I) : (X\tilde{I}, I) \longrightarrow (X'\tilde{I}, I). \tag{12.1.31}$$

Il est clair que l'image d'une identité en est une et, en utilisant la cohérence aux unités de l'homomorphisme $c(\theta)$ fournie par **C1**, r est strict pour la composition. La contrainte de comparaison de r aux objets X et Y de $\underline{\mathcal{G}}$ est définie par le d_I-morphisme

$$\Phi^r(X, Y) = (\varphi^r(X, Y), d_I) : ((XY)\tilde{I}, I) \longrightarrow (X\tilde{I}, I) \otimes (Y\tilde{I}, I) \tag{12.1.32}$$

de première composante le morphisme $\varphi^r(X, Y)$ de $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{ccccc}
(XY)\tilde{I} & - - - - - - - - - - \overset{\varphi^r(X,Y)}{- - - - - - - - - - \rightarrowtail} & & & [((X\tilde{I})^I(Y\tilde{I}))\chi(I,I)]\theta_{d_I} \\
{\scriptstyle a\otimes\delta_I}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \Phi^I} \\
X(Y\tilde{I})[({}^I\tilde{I}\chi(I,I))\theta_{d_I}] & \xrightarrow[\iota_Y^{-1}\ 1]{} & X(\tilde{I}^I Y)[({}^I\tilde{I}\chi(I,I))\theta_{d_I}] & \xrightarrow{\sim} & [((X\tilde{I})({}^I Y^I\tilde{I}))\chi(I,I)]\theta_{d_I}
\end{array}$$

où ι_Y est donné par (**C3**, 12.1.7). La cohérence de cette contrainte au morphisme $(x, y) : (X, Y) \longrightarrow (X', Y')$ de $\mathcal{G}^2$, correspond à la commutativité dans $\mathcal{G}$ du dia-

gramme (les contraintes d'associativité et les unités sont omises):

$$\begin{array}{ccc}
(XY)\tilde{I} & \xrightarrow{\varphi^r(X,Y)} & (X\tilde{I})^I(Y\tilde{I})\chi(I,I)\theta_{d_I} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle xy\tilde{I}i_I^{-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x\tilde{I}i_I^{-1\,I}(y\tilde{I}i_I^{-1})} \\
 & & (X\tilde{I}\theta_I)^I(Y\tilde{I}\theta_I))\chi(I,I)\theta_{d_I} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle C^{-1}\circ t_{1_I,1_I}(X'\tilde{I},Y'\tilde{I})} \\
(X'Y')\tilde{I}\theta_{1_I} & \xrightarrow[C^{-1}\circ\varphi^r(X',Y')]{} & X'\tilde{I}^I(Y'\tilde{I})\chi(I,I)\theta_{d_I}\ .
\end{array}$$

En utilisant la définition des morphismes φ^r, cette commutativité équivaut à celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
(X\tilde{I})^I(Y\tilde{I})\chi(I,I)\theta_{d_I} & \xrightarrow{(1\ i_I^{-1})^I(1\ i_I^{-1})} & (X\tilde{I}\theta_I)^I(Y\tilde{I}\theta_I)\chi(I,I)\theta_{d_I} \\
 & \overset{i_{I\otimes I}^{-1}}{\searrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle t_{1_I,1_I}(X'\tilde{I},Y'\tilde{I})} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle i_I^{-1}} & & (X\tilde{I})^I(Y\tilde{I})\chi(I,I)\theta_{1_{I\otimes I}}\theta_{d_I} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle C^{-1}} \\
(X\tilde{I})^I(Y\tilde{I})\chi(I,I)\theta_{d_I}\theta_{1_I} & \xrightarrow[C^{-1}]{} & X'\tilde{I}^I(Y'\tilde{I})\chi(I,I)\theta_{d_I}.
\end{array}$$

Elle est obtenue avec la cohérence aux unités de t et de C.

Pour terminer cette construction sur les objets de l'homomorphisme (12.0.1), il reste à montrer que la suite (12.1.30) est bien une extension au sens de (10.1.1). La composée $pr : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ est l'homomorphisme "nul" et r définit avec (2.4.1) un homomorphisme $q = F(r,1) : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow N(p)$. Il reste à montrer que q est une gr-équivalence. Puisque p est une fibration, il est suffisant de montrer que r réalise une équivalence sur la fibre stricte $p^{-1}(I)$ de p au dessus de l'objet unité de $\underline{\mathcal{K}}$. Sur $p^{-1}(I)$, r est clairement pleinement fidèle. Ensuite, soient $\tilde{I}^*$ un objet quasi inverse de $\tilde{I}$ et e un isomorphisme $e : I \longrightarrow \tilde{I}^*\tilde{I}$. Pour tout objet X de $\mathcal{G}$, considérons l'isomorphisme :

$$\epsilon_X : X \xrightarrow{1e} X(\tilde{I}^*\tilde{I}) \xrightarrow{1i_I^{-1}} [X(\tilde{I}^*\tilde{I})]\theta_{1_I} \xrightarrow{\sim} [(X\tilde{I}^*)\tilde{I})]\theta_{1_I}.$$

Pour tout objet (X,I) de $p^{-1}(I)$, on a un isomorphisme $p^{-1}(I) : (X,I) \overset{(\epsilon_X,1_I)}{\longrightarrow} (r(X\tilde{I}^*),I)$ et r est essentiellement surjectif sur $p^{-1}(I)$. Ce qui termine la construction sur les objets de l'homomorphisme de classification (12.0.1). □

12.2. Construction globale de $\underline{F}$ et $\underline{\mathcal{G}}$

Soit $\underline{\theta}$ et $\underline{\psi}$ deux objets de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))$. On note $\underline{G}(\underline{\theta})$ et $\underline{G}(\underline{\psi})$ les pseudo-foncteurs monoïdaux associés décrits plus haut. On commence par donner une description de la catégorie $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Bieq_u})(\underline{\theta}, \underline{\psi})$. On montre ensuite que

l'on dispose d'un foncteur fidèle $\underline{G} = \underline{G}_{\underline{\theta},\underline{\psi}}$

$$\underline{G} : \mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi}) \longrightarrow \mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}^{op}}, \mathbf{Cat})(\underline{G}(\underline{\psi}), \underline{G}(\underline{\theta})). \tag{12.2.1}$$

Par la biéquivalence (6.3.2), on obtient un foncteur fidèle,

$$\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi}) \longrightarrow \mathbf{Fibmon}_{\underline{\mathcal{K}}}(\underline{E}_{\underline{G}(\underline{\psi})}, \underline{E}_{\underline{G}(\underline{\theta})}), \tag{12.2.2}$$

qui permet de définir en définitive un foncteur $\underline{F} = \underline{F}_{\underline{\theta},\underline{\psi}}$

$$\underline{F} : \mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi}) \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})(\underline{F}(\underline{\psi}), \underline{F}(\underline{\theta})), \tag{12.2.3}$$

localisation au couple $(\underline{\theta},\underline{\psi})$ de l'homomorphisme de classification (12.0.1).

- Description de la catégorie $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi})$.

On utilise toujours les notations introduites en (9). Suivant (5.2) et (5.4), un objet $\underline{s} = (s,\ \Pi^s,\ M^s)$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi})$ est une pseudo-transformation naturelle de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq_u}(\underline{\mathcal{G}}))$,

$$s : \theta \longrightarrow \psi, \tag{12.2.4}$$

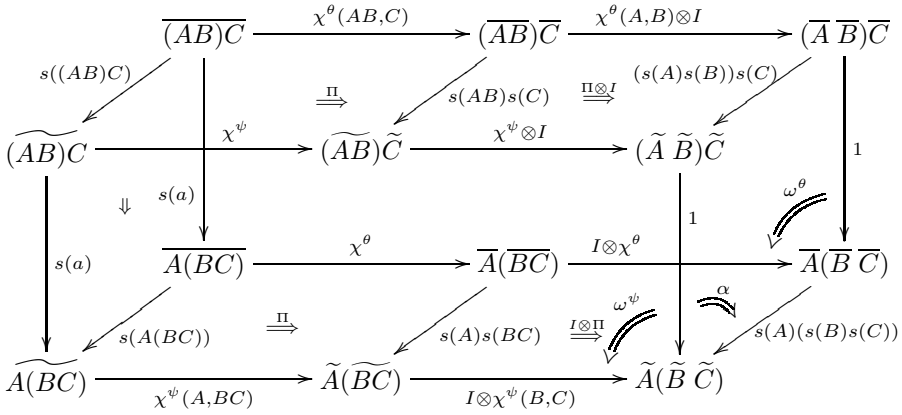
une modifications inversible de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}\times\mathcal{K}, \mathbf{Bieq_u}(\underline{\mathcal{G}}))$,

$$\Pi^s : \chi^{\psi}.(s\otimes) \Longrightarrow (s\otimes s).\chi^{\theta} \tag{12.2.5}$$

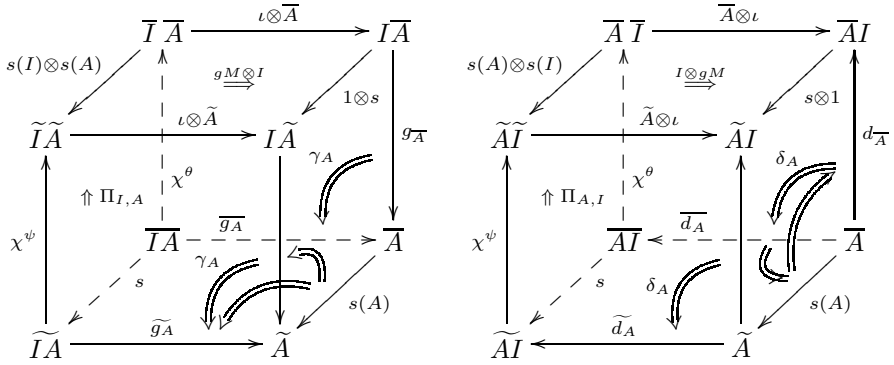
et une modification inversible de $\mathbf{Bicat}(\mathbb{1}, \mathbf{Bieq_u}(\underline{\mathcal{G}}))$

$$M^s : \iota^{\psi}.(s\circ I) \Longrightarrow \iota^{\theta}, \tag{12.2.6}$$

satisfaisant aux conditions de cohérence à l'associativité et aux unités du type (5.2.1) et (5.2.2), adaptées au cas des (co)-morphismes (5.4). Ces cohérences s'énoncent avec la commutativité des diagrammes de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$ suivants, pour tout objet (A,B,C) de $\mathcal{K}^3$ où l'on a noté $\overline{X}$ et $\widetilde{X}$ pour $\theta(X)$ et $\psi(X)$:



(12.2.7)

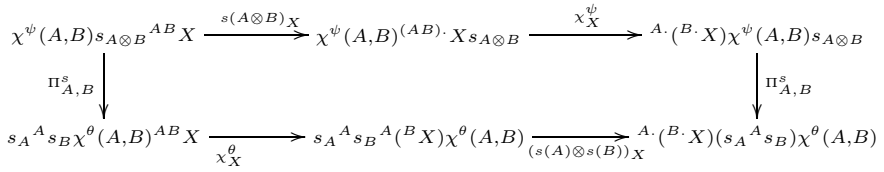


(12.2.8)

Explicitons ces données. On renvoie le lecteur à (9.3.15) pour une description de la pseudo-transformation $s : \theta \longrightarrow \psi$. Pour tout objet (A, B) de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, la composante en (A, B) de la modification Π^s (12.2.5) est une modification $\Pi^s_{A,B}$ de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$. Cette dernière est donnée par un isomorphisme de $\mathcal{G}$,

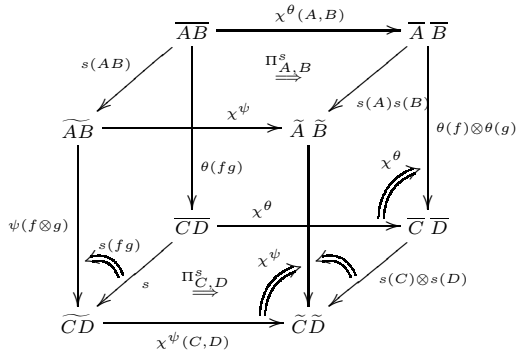
$$\Pi^s_{A,B} : \chi^\psi(A, B)s_{A\otimes B} \longrightarrow s_A{}^A s_B \chi^\theta(A, B) \tag{12.2.9}$$

tel que pour tout objet X de $\mathcal{G}$ on ait la commutativité du diagramme, (on note respectivement ${}^AX$ et ${}^{A\cdot}X$ pour $\theta(A)(X))$ et $\psi(A)(X))$:



(12.2.10)

la flèche $(s(A) \otimes s(B))_X$ étant celle de (4.1.3). La cohérence au morphisme (f, g) : $(A, B)\longrightarrow(C, D)$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ de la modification Π^s



(12.2.11)

correspond à la commutativité dans $\mathcal{G}$ du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\chi^{\psi}(C,D)s_{CD}\theta_{f\otimes g} & \xrightarrow{s(f\otimes g)} & \chi^{\psi}(C,D)\psi_{f\otimes g}s_{AB} & \xrightarrow{\chi^{\psi}(f\otimes g)} & \psi_f{}^{A\cdot}\psi_g\chi^{\psi}(A,B)s_{A\otimes B} \\
\downarrow{\scriptstyle \Pi^s_{C,D}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Pi^s_{A,B}} \\
s_C{}^C s_D\chi^{\theta}(C,D)\theta_{f\otimes g} & \xrightarrow[\chi^{\theta}(f\otimes g)]{} & s_C{}^C s_D\theta_f{}^A\theta_g\chi^{\theta}(A,B) & \xrightarrow[s(f)\boxtimes s(g)]{} & \psi_f{}^{A\cdot}\psi_g s_A{}^A s_B\chi^{\theta}(A,B)
\end{array}$$

où la flèche $s(f)\boxtimes s(g)$ est obtenue avec (4.0.1).
Passons à présent à la description de la modification M^s (12.2.6). On note par $\tilde{I}$ et $\tilde{J}$ les objets de $\mathcal{G}$ respectivement associés aux pseudo-transformations ι^{θ} et ι^{ψ} de (12.1.7). La modification M^s se réduit juste à la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{G}$:

$$M^s : \tilde{J}s_I \longrightarrow \tilde{I}, \tag{12.2.12}$$

tel que pour tout objet X de $\mathcal{G}$, le diagramme suivant de $\mathcal{G}$ commute,

$$\begin{array}{ccc}
(\tilde{J}s_I)\,{}^I X & \xrightarrow{s(I)_X} & \tilde{J}\,{}^{I\cdot}Xs_I \xrightarrow{\iota^{\psi}_X} X\tilde{J}s_I \\
\downarrow{\scriptstyle M^s} & & \downarrow{\scriptstyle M^s} \\
\tilde{I}\,{}^I X & \xrightarrow[\iota^{\theta}_X]{} & X\tilde{I}
\end{array} \tag{12.2.13}$$

Les conditions de cohérence (12.2.7) et (12.2.8) correspondent à des diagrammes commutatifs comparables à ceux de (12.1.13) et (12.1.16). Par exemple on obtient pour la cohérence à l'associativié :

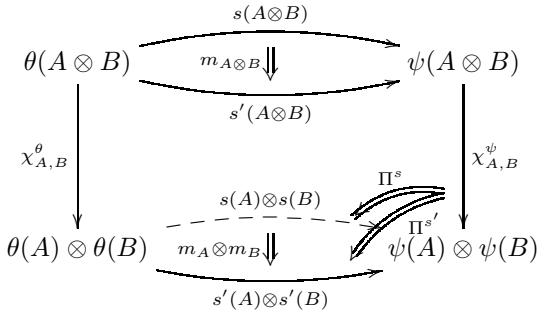
$$\begin{array}{ccc}
[\chi^{\psi}(A,B)\chi^{\psi}(AB,C)]s_{(AB)C} & \xrightarrow{\omega^{\psi}_{A,B,C}} & {}^{A\cdot}\chi^{\psi}(B,C)\chi^{\psi}(A,BC)\psi_a s_{(AB)C} \\
\downarrow{\scriptstyle \Pi^s_{A\otimes B,C}} & & \downarrow{\scriptstyle s(a)^{-1}} \\
\chi^{\psi}(A,B)s_{AB}{}^{AB}s_C\chi^{\theta}(AB,C) & & {}^{A\cdot}\chi^{\psi}(B,C)\chi^{\psi}(A,BC)s_{A(BC)}\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \Pi^s_{A,B}\boxtimes I_{s_C}} & & \downarrow{\scriptstyle \Pi^s(A\otimes(B\otimes C))} \\
s_A{}^A s_B{}^A({}^B s_C)\;\chi^{\theta}(A,B)\chi^{\theta}(AB,C) & & {}^{A\cdot}\chi^{\psi}(B,C)s_A{}^A s_{BC}\chi^{\theta}(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_{s_A,s_B,s_C}} & & \downarrow{\scriptstyle I_{s_A}\boxtimes\Pi^s_{B,C}} \\
s_A{}^A(s_B{}^B s_C)\;\chi^{\theta}(A,B)\chi^{\theta}(AB,C) & \xrightarrow[\omega^{\theta}_{A,B,C}]{} & [s_A{}^A(s_B{}^B s_C)][({}^A\chi^{\theta}(A,B)\chi^{\theta}(A,BC))\theta_a].
\end{array} \tag{12.2.14}$$

Les flèches $\Pi^{\psi}_{A,B}\boxtimes I_{s_C}$ et $I_{s_A}\boxtimes\Pi^s_{B,C}$ sont obtenues avec (4.0.1). La flèche α_{s_A,s_B,s_C} est donnée par la contrainte d'associativité (4.1.5).

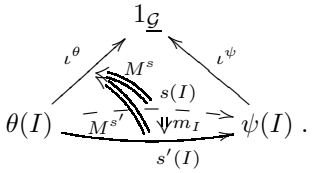
Dans le cas où $\underline{\mathcal{K}}$ est discrète, on peut donner la correspondance entre les *cobords* de L. Breen ([**3**], déf. 2.2.5) et la précédente description. La donnée (2.2.4.2) de loc. cit. correspond ici à (12.2.4), de même (2.2.4.3) et (2.2.4.6) qui s'expriment ici avec

(12.2.9) et (12.2.10), correspondent aux modifications $\Pi^s_{A,B}$ de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$. Enfin, la condition (2.2.4.10) de cohérence à l'associativité s'exprime avec (12.2.14).

Pour finir, rappelons qu'un morphisme $\underline{m} : \underline{s} \Longrightarrow \underline{s'}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta}, \underline{\psi})$ est une modification $m : s \Longrightarrow s'$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$ dont une description est donnée en (9.3.24), telle que pour tout objet (A, B) de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ les diagrammes suivants de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$ commutent, l'expression dans $\mathcal{G}$ de ces conditions est laissée au lecteur :



(12.2.15)



(12.2.16)

- Description du foncteur $\underline{G}$ (12.2.1).

Soit $\underline{s} = (s,\ \Pi^s,\ M^s)$ un objet de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta}, \underline{\psi})$. Son image $\underline{G}(\underline{s}) = (G(s),\ \Pi^{G(s)},\ M^{G(s)})$ est définie à partir de la pseudo-transformation naturelle $G(s)$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})$,

$$G(s) : G(\psi) \longrightarrow G(\theta), \tag{12.2.17}$$

déduite par oubli des actions de la pseudo-transformation (9.3.21). Pour compléter la définition de $\underline{G}(\underline{s})$, il reste à définir les modifications inversibles

$$\Pi^{G(s)} : T^{\theta}.(G(s) \times G(s)) \Longrightarrow (G(s) \otimes).T^{\psi} \tag{12.2.18}$$

$$M^{G(s)} : (G(s) \circ I).\iota^{G(\psi)} \Longrightarrow \iota^{G(\theta)} \tag{12.2.19}$$

respectivement de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})$ et $\mathbf{Bicat}(\mathbb{1}, \mathbf{Cat})$, satisfaisant aux conditions de cohérences attendues. La modification $M^{G(s)}$ correspond juste à la donnée de l'isomorphisme (12.2.12). Pour tout objet (A, B) de $\mathcal{K}^2$, la composante en (A, B)

de la modification $\Pi^{G(s)}$ est définie par le collage dans **Cat**,

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{G}_A\times\mathcal{G}_B & \xrightarrow{1\times\psi(A)} & \mathcal{G}_A\times\mathcal{G}_B & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{G}_{AB} & \xrightarrow{t_d(\chi^{\psi}(A,B))} & \mathcal{G}_{AB} \\
\downarrow{\scriptstyle t_d(s_A)\times t_d(s_B)} & \Uparrow\Pi_{s_A*s_B} & \downarrow{\scriptstyle t_d(s_A{}^A s_B)} & & \downarrow{\scriptstyle t_d((\Pi^s_{A,B})^{-1})} & & \downarrow{\scriptstyle t_d(s_{A\otimes B})} \\
\mathcal{G}_A\times\mathcal{G}_B & \xrightarrow[1\times\theta(A)]{} & \mathcal{G}_A\times\mathcal{G}_B & \xrightarrow[\otimes]{} & \mathcal{G}_{AB} & \xrightarrow[t_d(\chi^{\theta}(A,B))]{} & \mathcal{G}_{AB},
\end{array} \tag{12.2.20}$$

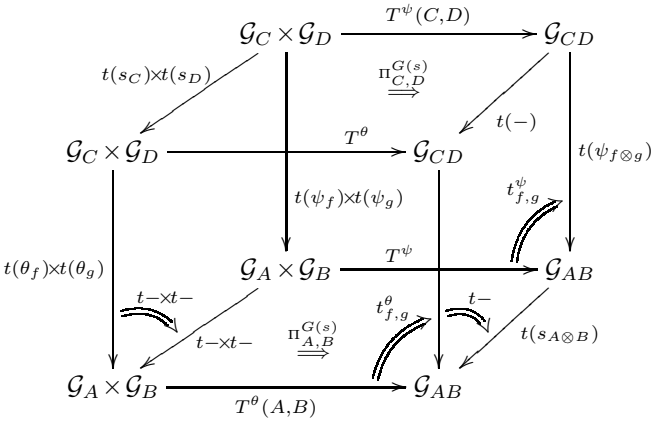
où $\Pi_{s_A*s_B}$ est l'isomorphisme naturel de **Cat** défini, pour tout objet (X,Y) de $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, par la composée :

$$\Pi_{s_A*s_B}(X,Y) : (Xs_A)^A(Ys_B) \xrightarrow{\Phi^A} Xs_A{}^AY^As_B \xrightarrow{s(A)_Y} (X^{A\cdot}Y)(s_A{}^As_B). \tag{12.2.21}$$

La composante $\Pi^{G(s)}_{A,B}$ de la modification $\Pi^{G(s)}$ est donc définie en l'objet (X,Y) de $\mathcal{G}_A\times\mathcal{G}_B$ avec l'isomorphisme de $\mathcal{G}_{AB}$:

$$\begin{array}{ccc}
[(Xs_A)^A(Ys_B)]\chi^{\theta}(A,B) & \overset{\Pi^{G(s)}_{A,B}(X,Y)}{- - - - \rightarrow} & [(X^{A\cdot}Y)\chi^{\psi}(A,B)]s_{A\otimes B} \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi^A} & & \uparrow{\scriptstyle (\Pi^s_{A,B})^{-1}} \\
Xs_A{}^AY^As_B\chi^{\theta}(A,B) & \xrightarrow[s(A)_Y]{} & X^{A\cdot}Ys_A{}^As_B\chi^{\theta}(A,B).
\end{array} \tag{12.2.22}$$

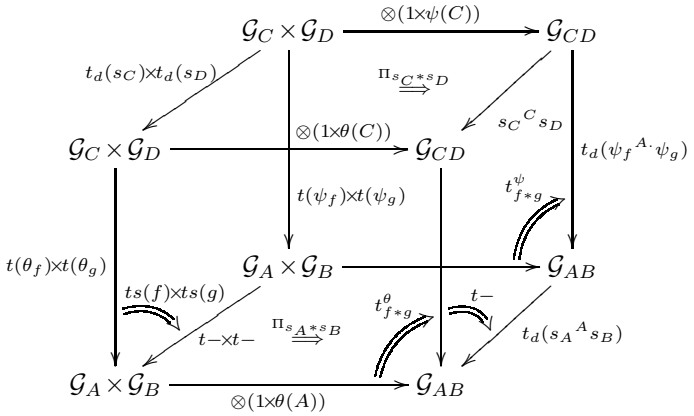
Pour obtenir la modification annoncée, il reste à vérifier que cette famille $\Pi^{G(s)}_{A,B}$ d'isomorphismes naturels est cohérente aux morphismes, c'est-à-dire que, pour tout morphisme $(f,g) : (A,B) \longrightarrow (C,D)$ de $\mathcal{K}^2$, le cube de **Cat**



(12.2.23)

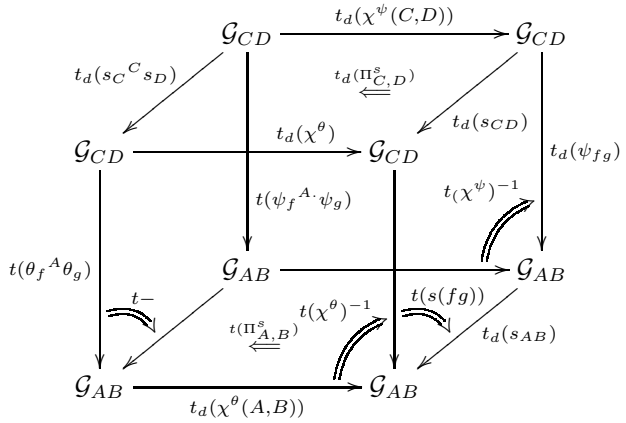
est commutatif. On obtient cette commutativité comme en (12.1.21). En effet, il suffit de remarquer que les isomorphismes $\Pi_{s_A*s_B}$ (12.2.21) et t_{f*g} (12.1.20) sont cohérents (par (9.3.19) pour l'essentiel) avec (12.2.4) comme seule donnée. Ensuite,

le cube exprimant cette cohérence,



(12.2.24)

collé suivant la face commune à celui déduit de (12.2.11) :



(12.2.25)

donne les cohérences de Π^s (12.2.11) et de $\Pi^{G(s)}$ (12.2.23) équivalentes, ce qui termine ce point.

Pour en terminer avec les modifications $\Pi^{G(s)}$ et $M^{G(s)}$, il reste à montrer que $\Pi^{G(s)}$ est cohérente à l'associativité, i.e. à la modification $\alpha : T.(T\times 1)\Longrightarrow G_a.T.(1\times T)$ (12.1.22) et que $\Pi^{G(s)}$ et $M^{G(s)}$ sont cohérentes aux unités. Ces cohérences sont obtenues avec des diagrammes du type (5.2.1) et (5.2.2). La cohérence à l'associativité de $\Pi^{G(s)}$ revient à montrer que pour tout objet (A, B, C) de $\mathcal{K}^3$ et

pour tout objet (X,Y,Z) de $\mathcal{G}^3$, le diagramme suivant de $\underline{\mathcal{G}}$ commute

$$\begin{array}{ccc}
Xs_A{}^A(Ys_B)\chi^\theta(A,B)^{AB}(Zs_C)\chi^\theta(AB,C) & \xrightarrow{\alpha^\theta(Xs_A,Ys_B,Zs_C)} & Xs_A{}^A[Ys_B{}^B(Zs_C)\chi^\theta(B,C)]\chi^\theta(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \Pi^{G(s)}_{A,B}} & & \downarrow{\scriptstyle {}^A\Pi^{G(s)}_{B,C}} \\
X^{A\cdot}Y\chi^\psi(A,B)s_{A\otimes B}{}^{AB}(Zs_C)\chi^\theta(AB,C) & & Xs_A{}^{A\cdot}[(Y^{B\cdot}Z)\chi(B,C)s_{B\otimes C}]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \Pi^{G(s)}_{A\otimes B,C}} & & \downarrow{\scriptstyle (C\circ C^{-1}\otimes s(a))\circ\Pi^{G(s)}_{A,B\otimes C}} \\
X^{A\cdot}Y\chi^\psi(A,B)^{AB\cdot}Z\chi^\psi(AB,C)s_{(A\otimes B)\otimes C} & \xrightarrow[\alpha^\psi(X,Y,Z)]{} & (X^{A\cdot}[Y^{B\cdot}Z\chi^\psi(B,C)]\chi^\psi(A,BC)\psi_a)s_{(A\otimes B)\otimes C\cdot}
\end{array} \tag{12.2.26}$$

Cette commutativité s'obtient de la même façon que celle de (12.1.25) où, (12.2.7), (12.2.22) et (12.2.26) doivent être comparées à (12.1.12), (12.1.21) et (12.1.25). Enfin, la cohérence aux unités s'exprime, pour tout objet A de $\mathcal{K}$ et tout objet X de $\mathcal{G}$, par la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{I}^{\,I}(Xs_A)\chi^\theta(I,A) & \xleftarrow{M^s} & \tilde{J}s_I{}^I(Xs_A)\chi^\theta(I,A) & \xrightarrow{\Pi^{G(s)}_{I,A}} & \tilde{J}^{\,I\cdot}X\chi^\psi(I,A)s_{I\otimes A} \\
\downarrow{\scriptstyle \Gamma^\theta_A(Xs_A)} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma^\psi_A(X)} \\
Xs_A\theta_{g_A} & & \xrightarrow{\qquad\qquad s(g_A)\qquad\qquad} & & X\psi_{g_A}s_{I\otimes A}
\end{array} \tag{12.2.27}$$

$$\begin{array}{ccccc}
Xs_A{}^A\tilde{I}\chi^\theta(A,I)\theta_{d_A} & \xleftarrow{{}^AM^s} & Xs_A{}^A(\tilde{J}s_I)\chi^\theta(A,I)\theta_{d_A} & \xrightarrow{\Pi^{G(s)}_{A,I}} & X^{A\cdot}\tilde{J}\chi^\psi(A,I)s_{A\otimes I}\theta_{d_A} \\
\uparrow{\scriptstyle \Delta^\theta_A(Xs_A)} & & & & \downarrow{\scriptstyle s(d_A)} \\
Xs_A & & \xrightarrow{\qquad\qquad \Delta^\psi_A(X)\qquad\qquad} & & X^{A\cdot}\tilde{J}\chi^\psi(A,I)\psi_{d_A}s_A
\end{array}$$

où les flèches Γ et Δ sont données avec (12.1.26) et (12.1.27). La commutativité de ces deux derniers diagrammes s'obtient avec la commutativité de (12.2.8).

Soit à présent $\underline{m} : \underline{s} \longrightarrow \underline{s'}$ un morphisme de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi})$. Comme pour les objets, son image $\underline{G}(\underline{m}) : \underline{G}(\underline{s}) \longrightarrow \underline{G}(\underline{s'})$ par $\underline{G}$ (12.2.1) est définie à partir de la modification de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})$, $G(m) : G(s) \Longrightarrow G(s')$, déduite de (9.3.1) par oubli des actions. Avec (9.3.26), la composante de $G(m)$ en un objet A de $\mathcal{K}$ est donc l'isomorphisme naturel de $\mathcal{E}q(\mathcal{G})$, tensorisation à droite par l'isomorphisme $m_A : s_A \longrightarrow s'_A$,

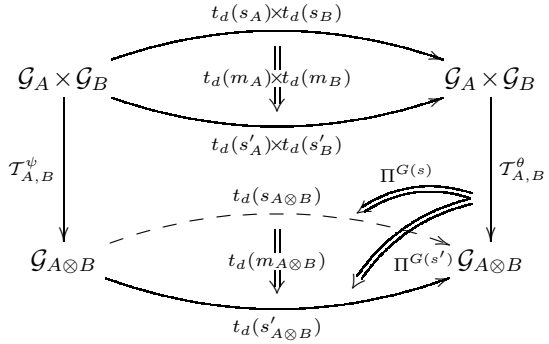
$$\mathcal{G}_A \underset{t_d(m_A)\Downarrow}{\overset{t_d(s_A)}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{}}}} \mathcal{G}_A. \tag{12.2.28}$$
$$t_d(s'_A)$$

La condition de cohérence au morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$ de $G(m)$ correspond juste

à l'égalité dans $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{ccc} s_B\theta_f & \xrightarrow{s(f)} & \psi_f s_A \\ \downarrow{\scriptstyle m_B\theta_f} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_f m_A} \\ s'_B\theta_f & \xrightarrow[s'(f)]{} & \psi_f s'_A \end{array} \tag{12.2.29}$$

En utilisant les conditions (12.2.15) et (12.2.16), cette modification $G(s)$ est structurée en un 2-morphisme $\underline{G}(\underline{m})$ de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}}^{op}, \mathbf{Cat})$ via les commutativités du diagramme suivant de **Cat** :



(12.2.30)

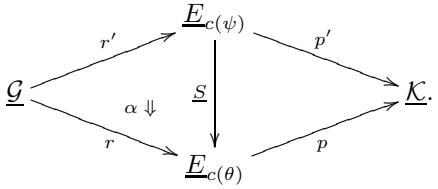
pour tout objet (A, B) de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, et du diagramme suivant de $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{J}s_I & & \\ & \searrow^{M^s} & \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{J}m_I} & & \tilde{I}\,. \\ & \nearrow_{M^{s'}} & \\ \tilde{J}s'_I & & \end{array} \tag{12.2.31}$$

Enfin, il est immédiat que cette définition sur les morphismes, détermine un foncteur fidèle $\underline{G} = \underline{G}_{\underline{\theta},\underline{\psi}}$ (12.2.1).

- Description du foncteur $\underline{F}$ (12.2.3).

• Soit $\underline{s} = (s,\ \Pi^s,\ M^s)$ un objet de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \mathbf{Bieq_u}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi})$. Son image $\underline{F}(\underline{s}) = (\alpha, \underline{S})$ est un morphisme d'extensions fibrées $(\alpha, \underline{S}) : (r', p') \longrightarrow (r, p)$



(12.2.32)

Le $\underline{\mathcal{K}}$-homomorphisme $(S, \Phi^S) : \underline{E}_{c(\psi)} \longrightarrow \underline{E}_{c(\theta)}$ est l'image par (6.3.2) de $\underline{G}(\underline{s})$, défini

par (12.2.1) en (12.2.17)-(12.2.19). Pour mémoire, rappelons (voir aussi (9.2.6)) que les images par (S,Φ^S) de l'objet (X,A) et du f-morphisme $(u,f):(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ de $\underline{E}_{c(\psi)}$ sont respectivement données par l'objet (Xs_A,A) et le f-morphisme $(Ys(f)^{-1}*us_A,f):(Xs_A,A)\longrightarrow(Ys_B,B)$, de $\underline{E}_{c(\theta)}$, où le morphisme $Ys(f)_A^{-1}*us_A$ est la composée dans $\mathcal{G}$:

$$Xs_A \xrightarrow{us_A} (Y\psi_f)s_A \xrightarrow{\sim} Y(\psi_f s_A) \xrightarrow{s(f)^{-1}} Y(s_B\theta_f) \xrightarrow{\sim} (Ys_B)\theta_f.$$

De la même manière qu' en (6.2.2) pour le cas cofibré, la contrainte de comparaison Φ^S est définie aux objets (X,A) et (Y,B) de $\underline{E}_{c(\psi)}$ avec le AB-isomorphisme de $\underline{E}_{c(\theta)}$

$$(1\otimes i_{AB}^{-1}\circ\Pi_{A,B}^{G(s)}(X,Y)^{-1},1_{AB}):S((X,A)(Y,B))\longrightarrow S(X,A)S(Y,B) \quad (12.2.33)$$

de première composante l'isomorphisme de $\mathcal{G}$:

$$[(X^{A\cdot}Y)\chi^{\psi}(A,B)]s_{A\otimes B} \xrightarrow{\Pi_{A,B}^{G(s)}(X,Y)^{-1}} [(Xs_A)^A(Ys_B)]\chi^{\theta}(A,B) \xrightarrow{1\otimes i_{AB}^{-1}} [(Xs_A)^A(Ys_B)]\chi^{\theta}(A,B)\theta_{1_{AB}}.$$

Enfin, la contrainte d'unité $\Phi_o^S = S(\tilde{J},I)\longrightarrow(\tilde{I},I)$ est le I-isomorphisme dont la première composante est l'isomorphisme $1i_I^{-1}\circ M^s:\tilde{J}s_I\longrightarrow\tilde{I}\longrightarrow\tilde{I}\theta_{1_I}$.

Passons à la définition de la transformation α de (12.2.32). On renvoie le lecteur en (12.1.31) et (12.1.32) pour un rappel sur les homomorphismes r et r'. La composante de α en un objet X de $\mathcal{G}$ est l'isomorphisme de $\underline{E}_{c(\theta)}$ au dessus de 1_I,

$$\alpha_X:((X\tilde{J})s_I,I)\longrightarrow(X\tilde{I},I) \quad (12.2.34)$$

de première composante : $(X\tilde{J})s_I \xrightarrow{\sim} X(\tilde{J}s_I) \xrightarrow{XM^s} X\tilde{I} \xrightarrow{1i_I^{-1}} (X\tilde{I})\theta_{1_I}$. Comme r et r' sont stricts sur l'unité, il est clair que α est cohérente aux unités puisque $\alpha_I=\Phi_o^S$. La naturalité provient de la condition de cohérence (9.2.3) explicitée avec (9.3.9). Enfin, il reste à vérifier la cohérence aux contraintes de comparaison, c'est-à-dire que, pour tout objet (X,Y) de $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, le diagramme suivant de $\underline{E}_{c(\theta)}$ commute

$$\begin{array}{ccc} Sr'(XY) & \xrightarrow{\alpha_{XY}} & r(XY) \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi^S*\phi^{r'}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^r} \\ Sr'(X)Sr'(Y) & \xrightarrow[\alpha_X\alpha_Y]{} & r(X)r(Y). \end{array} \quad (12.2.35)$$

En utilisant les conditions de cohérence aux unités de C (9.2.3) et de t (12.1.21),

cette commutativité équivaut à celle du diagramme de $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{ccc}
[(XY)\tilde{J}]s_I & \xrightarrow{M^s} & XY\tilde{I} \\
{\scriptstyle (\iota_Y^\psi)^{-1}\otimes\delta_I^\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_I^\theta} \\
X\tilde{J}\ {}^{I\cdot}Y\ {}^{I\cdot}\tilde{J}\chi^\psi(I,I)\psi_{d_I}s_I & & XY\tilde{I}\ {}^{I}\tilde{I}\chi^\theta(I,I)\theta_{d_I} \\
{\scriptstyle \Phi^{I\cdot}\otimes s(d_I)}\uparrow & \mathbf{I} & \uparrow{\scriptstyle \iota_Y^\theta} \\
X\tilde{J}\ {}^{I\cdot}(Y\tilde{J})\chi^\psi(I,I)s_{I\otimes I}\theta_{d_I} & & X\tilde{I}\ {}^{I}Y\ {}^{I}\tilde{I}\chi^\theta(I,I)\theta_{d_I} \\
{\scriptstyle \Pi^{G(s)}(X\tilde{J},Y\tilde{J})}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Phi^I} \\
X\tilde{J}s_I\ {}^{I}(Y\tilde{J}s_I)\chi^\theta(I,I)\theta_{d_I} & \xrightarrow[XM^s\ {}^{I}(YM^s)]{} & [((X\tilde{I})\ {}^{I}(Y\tilde{I}))\chi^\theta(I,I)]\theta_{d_I}\ .
\end{array}$$

En utilisant la commutativité du diagramme de $\mathcal{G}$

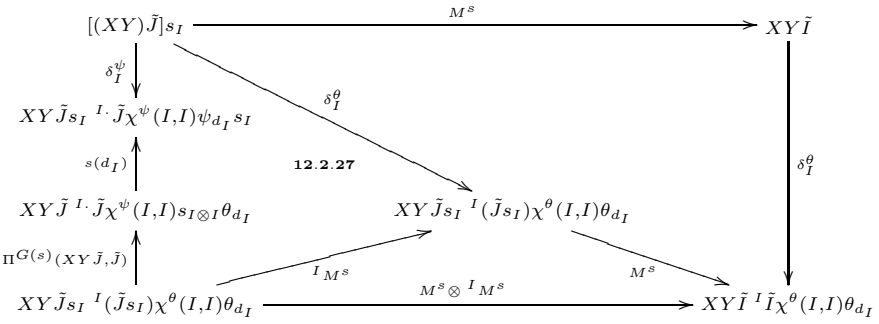
$$\begin{array}{ccccc}
X\tilde{J}s_I\ {}^{I}(Y\tilde{J}s_I)\chi^\theta(I,I) & & \xrightarrow{\Pi^{G(s)}_{I,I}(X\tilde{J},Y\tilde{J})} & & X\tilde{J}\ {}^{I\cdot}(Y\tilde{J})\chi^\psi(I,I)s_{I\otimes I} \\
{\scriptstyle \Phi^I}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{I\cdot}} \\
X\tilde{J}s_I\ {}^{I}Y\ {}^{I}(\tilde{J}s_I)\chi^\theta(I,I) & \xrightarrow{s(I)_Y} & X\tilde{J}\ {}^{I\cdot}Ys_I\ {}^{I}(\tilde{J}s_I)\chi^\theta(I,I) & \xrightarrow{\Pi^{G(s)}_{I,I}(X\tilde{J}^{I\cdot}Y,\tilde{J})} & X\tilde{J}\ {}^{I\cdot}Y\ {}^{I\cdot}\tilde{J}\chi^\psi(I,I)s_{I\otimes I}
\end{array}$$

obtenue avec la définition de $\Pi^{G(s)}$ (12.2.22), la commutativité de (**I**) équivaut alors à celle du diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccccc}
[(XY)\tilde{J}]s_I & & \xrightarrow{M^s} & & XY\tilde{I} \\
{\scriptstyle (\iota_Y^\psi)^{-1}\otimes\delta_I^\psi}\downarrow & \searrow^{\delta_I^\psi} & & & \\
X\tilde{J}\ {}^{I\cdot}Y\ {}^{I\cdot}\tilde{J}\chi^\psi(I,I)\psi_{d_I}s_I & \xrightarrow{\iota_Y^\psi} & XY\tilde{J}s_I\ {}^{I\cdot}\tilde{J}\chi^\psi(I,I)\psi_{d_I}s_I & & \\
{\scriptstyle s(d_I)}\uparrow & & {\scriptstyle s(d_I)}\uparrow & \mathbf{II} & \downarrow{\scriptstyle \delta_I^\theta} \\
X\tilde{J}\ {}^{I\cdot}Y\ {}^{I\cdot}\tilde{J}\chi^\psi(I,I)s_{I\otimes I}\theta_{d_I} & \xrightarrow{\iota_Y^\psi} & XY\tilde{J}\ {}^{I\cdot}\tilde{J}\chi^\psi(I,I)s_{I\otimes I}\theta_{d_I} & & \\
{\scriptstyle \Pi^{G(s)}(X\tilde{J}^{I\cdot}Y,\tilde{J})}\uparrow & & {\scriptstyle \Pi^{G(s)}(XY\tilde{J},\tilde{J})}\uparrow & & \\
X\tilde{J}\ {}^{I\cdot}Ys_I\ {}^{I}(\tilde{J}s_I)\chi^\theta(I,I)\theta_{d_I} & \xrightarrow{\iota_Y^\psi} & XY\tilde{J}s_I\ {}^{I}(\tilde{J}s_I)\chi^\theta(I,I)\theta_{d_I} & \xrightarrow{M^s\otimes\ {}^{I}M^s} & XY\tilde{I}\ {}^{I}\tilde{I}\chi^\theta(I,I)\theta_{d_I} \\
{\scriptstyle s(I)_Y}\uparrow & & \mathbf{12.2.13} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_Y^\theta} \\
X\tilde{J}s_I\ {}^{I}Y\ {}^{I}(\tilde{J}s_I)\chi^\theta(I,I)\theta_{d_I} & & \xrightarrow[(M^s\otimes{}^{I}Y)\otimes\ {}^{I}M^s]{} & & [((X\tilde{I})\ ({}^{I}Y\ {}^{I}\tilde{I}))\chi^\theta(I,I)]\theta_{d_I}
\end{array}$$

Celle ci est obtenue avec la commutativité de (12.2.13) et de (**II**), cette dernière

provenant de la deuxième condition de cohérence de (12.2.27), soit :



• Pour terminer cette construction locale de $\underline{F}$, il reste à donner l'image $\underline{F}(\underline{m}) : \underline{S} \longrightarrow \underline{S'}$ d'un morphisme $\underline{m} : \underline{s} \longrightarrow \underline{s'}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi})$. Celle-ci est juste la $\mathcal{K}$-transformation naturelle image par (6.3.2) de la modification $\underline{G}(\underline{m})$, (12.2.28)-(12.2.31). La condition $\alpha'.(F(m)r) = \alpha$ est obtenue avec (12.2.31). Il est encore immédiat, avec (6.3.2) et la condition $\alpha'.(F(m)r) = \alpha$, que cette définition sur les morphismes, détermine un foncteur $\underline{F} = \underline{F}_{\underline{\theta},\underline{\psi}}$ (12.2.3).

- Construction globale de $\underline{F}$ et $\underline{G}$.

La construction précédente permet de définir l'homomorphisme $\underline{F}$ de (12.0.1), de définition locale la famille de foncteurs (12.2.3). Nous montrerons ici seulement que la famille de foncteurs $\underline{G} = \underline{G}_{\underline{\theta},\underline{\psi}}$ (12.2.1) permet de définir l'homomorphisme $\underline{G}$ de (12.0.2). L'homomorphisme $\underline{F}$ est alors obtenu pour l'essentiel par composition avec la biéquivalence (6.3.2).

Les contraintes de comparaison et d'unité permettant de définir globalement $\underline{G}$ sont obtenues à partir de celles de l'homomorphisme (9.3.1) et oubli des actions (noté encore G par abus) :

$$G : \mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op}))^{op} \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Cat})^{op}$$

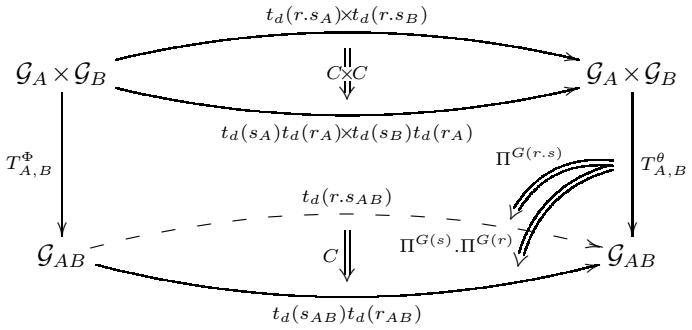
Les contraintes d'unité de G et de $\underline{G}$ sont strictes (puisque celle de $\underline{\mathcal{G}}$ l'est). Rappelons que la contrainte de comparaison de G aux 1-morphismes $s : \theta \longrightarrow \psi$ et $r : \psi \longrightarrow \phi$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$: $C_{s,r} : G(r.s) \Longrightarrow G(s).G(r)$, est définie par tensorisation à droite des contraintes d'associativité de $\underline{\mathcal{G}}$. Elle a pour composante en un objet A de $\mathcal{K}$, l'isomorphisme naturel de **Cat** : $t_d(a^{-1}_{-,r_A,s_A}) : t_d(r.s_A) \longrightarrow t_d(s_A) \circ t_d(r_A)$. Pour deux morphismes composables $\underline{s} = (s, \Pi^s, M^s) : \underline{\theta} \longrightarrow \underline{\psi}$ et $\underline{r} = (r, \Pi^r, M^r) : \underline{\psi} \longrightarrow \underline{\phi}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathbf{Bieq}}_u(\underline{\mathcal{G}}))$, la modification $C_{s,r} : G(r.s) \Longrightarrow G(s).G(r)$ précédente se complète en une modification inversible de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}^{op}},\ \mathbf{Cat})^{op}$:

$$C_{s,r} : \underline{G}(\underline{r}.\underline{s}) \Longrightarrow \underline{G}(\underline{s}).\underline{G}(\underline{r}), \tag{12.2.36}$$

soit, avec la définition locale de $\underline{G}$ (12.2.17-12.2.19) et la définition de la composition (5.5.1), que l'on a une modification

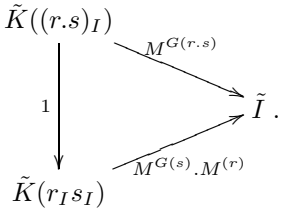
$$C_{s,r} : (G(r.s), \Pi^{G(r.s)}, M^{G(r.s)}) \Longrightarrow (G(s).G(r),\ \Pi^{G(s)}.\Pi^{G(r)},\ M^{G(s)}.M^{G(r)}).$$

Avec la définition (5.3 p. 456), il faut donc vérifier la commutativité du diagramme suivant de **Cat** :



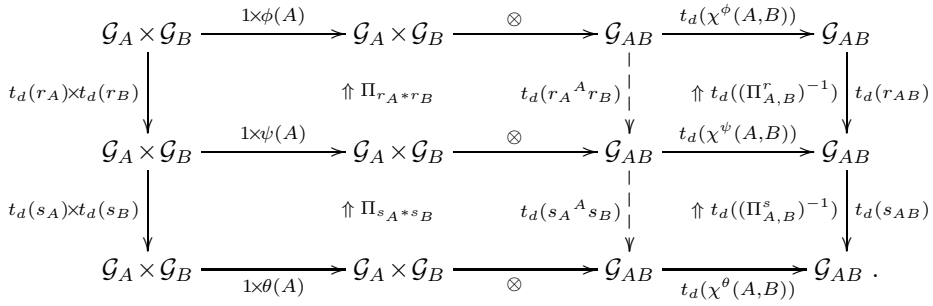
(12.2.37)

pour tout objet (A,B) de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, et du diagramme suivant de $\mathcal{G}$ (où $M^r : \tilde{K}r_I \longrightarrow \tilde{J}$)



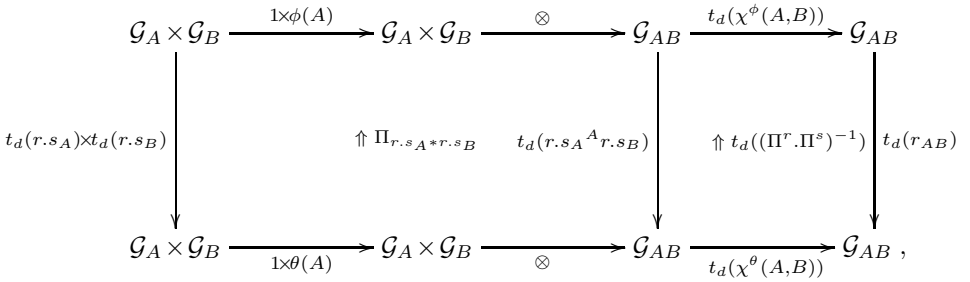
(12.2.38)

Ces commutativités sont faciles à obtenir. Pour (12.2.38), par (12.2.19) et (5.5.1), on obtient $M^{G(r.s)} = M^s.M^r = M^{G(s)}.M^{(r)}$. Pour (12.2.37), l'isomorphisme de la face avant est obtenu avec le collage dans **Cat** (voir 12.2.20 et 12.2.19)

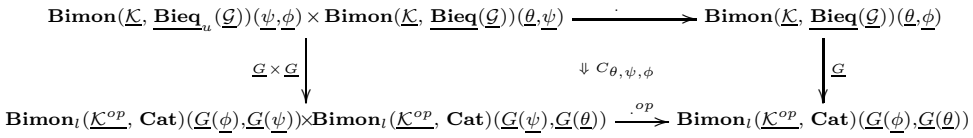


On applique sur les arêtes latérales les contraintes de comparaison ce qui donne

l'isomorphisme de la face arrière de (12.2.37)



puisque les ˝conditions de recollement˝ des isomorphismes $\Pi_{r_A * r_B}$, $\Pi_{s_A * s_B}$ et $(\Pi^r_{A,B})^{-1}$, $(\Pi^r_{A,B})^{-1}$ coïncident sur l'arête $t_d(s_A{}^A s_B)t_d(r_A{}^A r_B)$.
On obtient ensuite que la modification $C_{s,r}$ (12.2.36) est la composante en $(\underline{s},\underline{r})$ d'un isomorphisme naturel :



La naturalité se montre en collant aux diagrammes (12.2.37) et (12.2.38) des diagrammes du type (12.2.30 et 12.2.31 p. 511). Enfin, cette famille d'isomorphismes naturels $C_{\theta,\psi,\phi}$, indexée sur les triplets d'objets, est cohérente à l'associativité. Cette cohérence s'obtient aux morphismes $\underline{s} : \underline{\theta}\longrightarrow\underline{\psi}$, $\underline{r} : \underline{\psi}\longrightarrow\underline{\phi}$ et $\underline{q} : \underline{\psi}\longrightarrow\underline{\omega}$, avec un collage comme celui utilisé plus haut et en utilisant les cohérences à l'associativité des isomorphismes naturels $\Pi_{q_A * q_B}$ $\Pi_{r_A * r_B}$, $\Pi_{s_A * s_B}$ et $(\Pi^q_{A,B})^{-1}$ $(\Pi^r_{A,B})^{-1}$, $(\Pi^r_{A,B})^{-1}$.

13. Le théorème de classification

L'objet de cette section est de démontrer le résultat principal de ce travail :

Théorème 2. *L'homomorphisme de (12.0.1)*

$$\underline{F} : \mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathbf{Bieq}}_u(\underline{\mathcal{G}}))\longrightarrow\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})^{op}$$

est une biéquivalence de bicatégories.

13.1. L'équivalence locale

Soit $((r,\lambda),p) : \underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{r} \underline{\mathcal{H}} \xrightarrow{p} \underline{\mathcal{K}}$. une extension de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$. L'homomorphisme r détermine une $(\underline{\mathcal{G}},\underline{\mathcal{G}})$-action sur la catégorie $\mathcal{H}$. Les actions à gauche et à droite sont respectivement données par les composées $t_g \circ r : \underline{\mathcal{G}}\longrightarrow\underline{\mathcal{H}}\longrightarrow\mathcal{E}q(\mathcal{H})$ et $t_d \circ r : \underline{\mathcal{G}}^{op}\longrightarrow\underline{\mathcal{H}}\longrightarrow\mathcal{E}q(\mathcal{H})$. Leur cohérence est obtenue avec la contrainte d'associativité de $\underline{\mathcal{H}}$. En fait, on a un 2-foncteur,

$$\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})\longrightarrow\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op},\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}},\mathbf{Cat})). \qquad (13.0.1)$$

En effet, soit $(\alpha, \underline{S}, \gamma) : (r, \lambda, p) \longrightarrow (r', \lambda', p')$ un morphisme d'extensions. Par l'isomorphisme fonctoriel (monoïdal) $\alpha : \underline{S}r \Longrightarrow r'$, le foncteur $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ est $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant pour ces actions. Par exemple pour l'action à gauche, la composante en un objet X de $\mathcal{G}$ de la pseudo-transformation $(S, S^g_-) : r \circ t_g \longrightarrow r' \circ t_g$ de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat})$ définissant l'équivariance de $S : S^g_X : S \circ t_g(r(X)) \Longrightarrow t_g(r'(X)) \circ S$, est donnée par l'isomorphisme naturel :

$$S^g_X(-) : S(r(X) \otimes -) \xrightarrow{\Phi^S} S(r(X)) \otimes S(-) \xrightarrow{\alpha_X \otimes 1} r'(X) \otimes S(-) \ .$$

Ensuite, pour tout objet Y de $\mathcal{G}$, l'isomorphisme naturel fourni par la cohérence à l'action à droite $S^d_Y : S \circ t_d(r(Y)) \Longrightarrow t_d(r'(Y)) \circ S$, similaire à celui de l'action à gauche, donne une $\underline{\mathcal{G}}$-transformation de foncteurs $\underline{\mathcal{G}}$-équivariants pour l'action à gauche, ce qui donne (13.0.1) sur les 1-morphismes. Enfin, un 2-morphisme $m : (\alpha, \underline{S}, \gamma) \Longrightarrow (\alpha', \underline{S'}, \gamma')$ d'extensions de $\underline{\mathcal{K}}$ par $\underline{\mathcal{G}}$, via la condition $\alpha'.(mr) = \alpha$ vérifiée par la transformation monoïdale $m : \underline{S} \Longrightarrow \underline{T}$, détermine, avec la tranformation $m : S \Longrightarrow S'$ sous-jacente, une $\underline{\mathcal{G}}$-transformation : $(S, S^g_-) \Longrightarrow (S, S'^g_-)$ cohérente à l'action à droite (via la $\underline{\mathcal{G}}$-transformation induite par m pour l'action à droite), ce qui donne (13.0.1) sur les 2-morphismes. Il est clair que l'image d'une unité en est une et que (13.0.1) est strict pour la composition des 1-morphismes. □

Pour tout objet $\underline{\theta}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}_u(\mathcal{G})})$, la catégorie $E_{c(\theta)}$, intervenant dans l'extension $\underline{F}(\underline{\theta})$ (12.1.30), est à présent munie de deux $(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{G}})$-actions, celle précédemment définie (13.0.1) que l'on notera par $(E_{c(\theta)}, t_g r, t_d r)$ et celle donnée par l'homomorphisme obtenu à partir de l'homomorphisme (9.3.3) et oubli de la fibration,

$$\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op}, \underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))^{op}. \tag{13.0.2}$$

On note $\beta_g : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(E_{c(\theta)})$ et $\beta_d : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}q(E_{c(\theta)})$ les actions à gauche (9.2.5) et à droite (9.3.14) sur $E_{c(\theta)}$ ainsi obtenues. On notera globalement par $(E_{c(\theta)}, \beta_g, \beta_d)$ cette $(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{G}})$-action. On a alors :

Lemme 13.1. *Ces deux $(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{G}})$-actions sont isomorphes.*

Démonstration. On veut établir une équivalence dans $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))$ qui soit un pseudo-isomorphisme. Pour les actions à gauche, on dispose d'un pseudo-isomorphisme (i.e. d'un isomorphisme $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant)

$$(1, \epsilon) : (E_{c(\theta)}, t_g r) \longrightarrow (E_{c(\theta)}, \beta_g) \tag{13.1.1}$$

de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat})$ de composante le foncteur identité $1_{E_{c(\theta)}}$ et dont l'expression à l'objet X de $\mathcal{G}$ est donnée par l'isomorphisme naturel $\epsilon_X : t_g(r(X)) \Longrightarrow \beta_g(X)$ d'expression à l'objet (Y, A) de $E_{c(\theta)}$, l'isomorphisme $\epsilon_X(Y, A)$ de $E_{c(\theta)}$:

$$r(X) \otimes (Y, A) \xrightarrow{(aa,\ 1_{IA})} {}^X[(\tilde{I}, I) \otimes (Y, A)] \xrightarrow{{}^X(\Gamma^\theta_A(Y),\ g_A)} {}^X(Y, A).$$

Les fonctorialités en (Y, A) et X sont claires et les cohérences à l'unité et la composition de $\underline{\mathcal{G}}$ sont faciles à obtenir. Pour les actions à droite, on dispose, comme

pour les actions à gauche, d'un pseudo-isomorphisme,

$$(1,\eta) : (E_{c(\theta)}, t_d r) \longrightarrow (E_{c(\theta)}, \beta_d) \tag{13.1.2}$$

de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Cat})$. Son expression sur l'objet Z de $\mathcal{G}$ est donnée par l'isomorphisme naturel η_Z donné sur l'objet (Y, A) de $E_{c(\theta)}$ par l'isomorphisme $\eta_Z(Y, A)$:

$$(Y, A) \otimes r(Z) \xrightarrow{(aa\Phi^A,\ 1_{IA})^{-1}} (Y\ {}^A Z, A) \otimes (\tilde{I}, I) \xrightarrow{(\Delta(Y\ {}^A Z),\ d_A)^{-1}} (Y\ {}^A Z, A).$$

Pour tout objet Z de $\mathcal{G}$, on a la commutativité du diagramme de $E_{c(\theta)}$:

$$\begin{array}{ccc}
[r(X)(Y,A)]r(Z) & \xrightarrow{(\alpha,\ a)} & r(X)[(Y,A)r(Z)] \\
{\scriptstyle \epsilon_X(Y,A)r(Z)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r(X)\eta_Z(Y,A)} \\
(XY, A)r(Z) & & r(X)(Y\ {}^A Z, A) \\
{\scriptstyle \eta_Z(XY,A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_X(Y\ {}^A Z,A)} \\
((XY)\ {}^A Z, A) & \xrightarrow[(i_A^{-1}a,\ 1_A)]{} & (X(Y\ {}^A Z), A)
\end{array} \tag{13.1.3}$$

Cette commutativité exprime la cohérence gauche-droite des actions précédentes. L'isomorphisme naturel η_Z est ainsi une modification soit une $\underline{G}$-transformation $\eta_Z : (1,\epsilon) \circ t_d(r(Z)) \Longrightarrow \beta_d((Z)) \circ (1,\epsilon)$ de foncteurs $\underline{\mathcal{G}}$-équivariants pour les actions à gauche. Enfin, la cohérence de cette dernière au produit dans $\underline{\mathcal{G}}^{op}$, montre que la modification η_Z :

$$\begin{array}{ccc}
(E_{c(\theta)}, t_g r) & \xrightarrow{t_d(r(Z))} & (E_{c(\theta)}, t_g r) \\
{\scriptstyle (1,\ \epsilon)}\downarrow & \overset{\eta_Z}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle (1,\ \epsilon)} \\
(E_{c(\theta)}, \beta_g) & \xrightarrow[\beta_d(Z)]{} & (E_{c(\theta)}, \beta_g)
\end{array}$$

est l'expression en Z d'un pseudo-isomorphisme de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))$ que l'on notera par $(\epsilon,\eta)_\theta : (E_{c(\theta)}, t_g r, t_d r) \longrightarrow (E_{c(\theta)}, \beta_g, \beta_r)$ dans la suite. □

Lemme 13.2. *Les 1-morphismes* $(\epsilon,\eta)_- : (E_{c(-)}, t_g r, t_d r) \longrightarrow (E_{c(-)}, \beta_g, \beta_r)$ *sont les composantes d'un isomorphisme :*

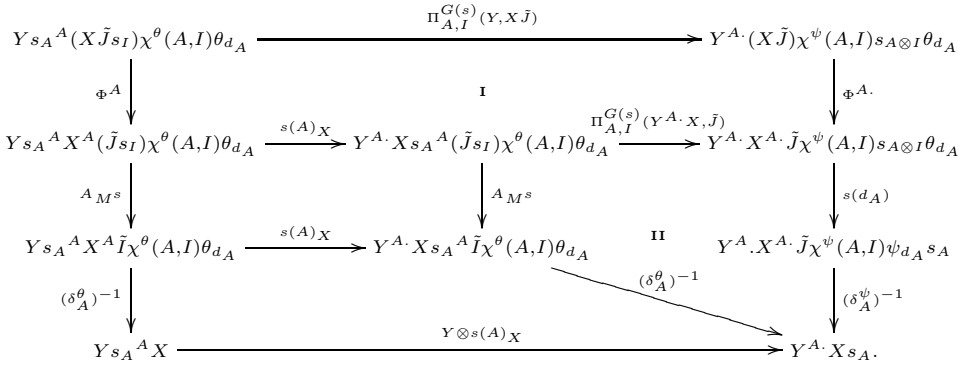
$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}})) & \xrightarrow{\underline{F}} & \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})^{op} \\
{\scriptstyle \text{oubli}}\downarrow & \Downarrow & \downarrow{\scriptstyle (13.0.1)} \\
\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq_u}(\underline{\mathcal{G}})) & \xrightarrow[(13.0.2)]{} & \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))^{op}.
\end{array}$$

Démonstration. Pour $\underline{s} : \underline{\theta} \longrightarrow \underline{\psi}$ un 1-morphisme de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))$, on note $S : E_{c(\psi)} \longrightarrow E_{c(\theta)}$ le foncteur sous-jacent aux foncteurs $\underline{\mathcal{G}}$-équivariants de

$\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))$ obtenus avec le précédent diagramme. Il faut Commençer par montrer que le diagramme suivant de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))$,

$$\begin{array}{ccc} (E_{c(\psi)}, t_g r, t_d r) & \xrightarrow{S} & (E_{c(\theta)}, t_g r, t_d r) \\ \downarrow{\scriptstyle (\epsilon,\eta)_\psi} & & \downarrow{\scriptstyle (\epsilon,\eta)_\theta} \\ (E_{c(\psi)}, \beta_g, \beta_d) & \xrightarrow[S]{} & (E_{c(\theta)}, \beta_g, \beta_d) \end{array} \tag{13.2.1}$$

commute. Pour cela, il suffit que les conditions de $\underline{\mathcal{G}}$-équivariance du foncteur S pour les actions définies par r et r' ainsi que la compatiblité aux cohérences gauche-droite se déduisent de celles données en (9.2.7) pour β_g et (9.3.23) pour β_d par post-multiplication de (ϵ, η). Par exemple, pour les actions à droite et pour l'essentiel, on obtient le résultat avec le diagramme suivant



La commutativité de (**I**) est obtenue avec la définition $\Pi^{G(s)}$ (12.2.22), celle de (**II**) avec la cohérence de $\Pi^{G(s)}$ aux unités (deuxième diagramme de (12.2.27)). Pour poursuivre, on vérifie que (13.2.1) est cohérent aux 2-morphismes c'est-à-dire que pour toute modification $\underline{m} : \underline{s} \longrightarrow \underline{s'}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (E_{c(\psi)}, t_g r, t_d r) & \overset{S}{\underset{S'}{\Downarrow F(m)}} & (E_{c(\theta)}, t_g r, t_d r) \\ \downarrow{\scriptstyle (\epsilon,\eta)_\psi} & & \downarrow{\scriptstyle (\epsilon,\eta)_\theta} \\ (E_{c(\psi)}, \beta_g, \beta_d) & \overset{S}{\underset{S'}{\Downarrow F(m)}} & (E_{c(\theta)}, \beta_g, \beta_d) \end{array} \tag{13.2.2}$$

de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))$ commute. Enfin, on obtient de même les conditions de cohérences aux unités et à la composition des 1-morphismes. □

Proposition 13.3. *Pour tous objets $\underline{\theta}$ et $\underline{\psi}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))$, le foncteur*

(12.2.3),

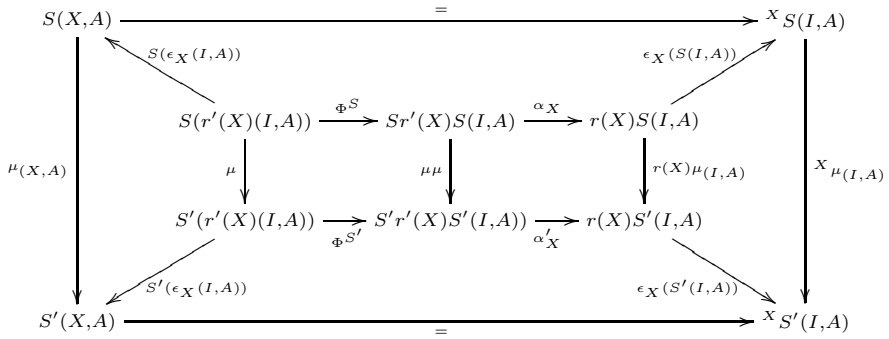
$$\underline{F}_{\underline{\theta},\underline{\psi}} : \mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi}) \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}},\underline{\mathcal{G}})(\underline{F}(\underline{\psi}),\underline{F}(\underline{\theta})),$$

est une équivalence.

Démonstration. Par construction $\underline{F}_{\underline{\theta},\underline{\psi}}$ est clairement fidèle. Montrons que ce foncteur est plein. Soit $\underline{\mu} : \underline{F}(\underline{s}) \longrightarrow \underline{F}(\underline{s'})$ un 2-morphisme d'extensions. Par (13.0.1), la transformation naturelle $\mu : S \longrightarrow S'$ (où S = F(s)) est $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour les $(\underline{\mathcal{G}},\underline{\mathcal{G}})$-actions sur $E_{c(\psi)}$ et $E_{c(\theta)}$ respectivement induites par r' et r. Ensuite, la composition dans $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))$:

$$(E_{c(\psi)},\beta_g,\beta_d) \xrightarrow{(\epsilon,\eta)_{\psi}^{-1}} (E_{c(\psi)}, t_g r', t_d r') \underset{S'}{\overset{S}{\Downarrow \mu}} (E_{c(\theta)}, t_g r, t_d r) \xrightarrow{(\epsilon,\eta)_{\theta}} (E_{c(\theta)},\beta_g,\beta_d),$$

structure $\mu : S \longrightarrow S'$ en une transformation $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour les actions β. Par ailleurs, puisque $p\mu = p'$, la composante de μ en un objet (X, A) de $E_{c(\psi)}$ est un A-morphisme et μ est une $\mathcal{K}$-transformation $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour les actions β. Ainsi, $\mu : F(s) \longrightarrow F(s')$ est un morphisme de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Tors}_g(\mathcal{K}^{op},\underline{\mathcal{G}}))(F(\psi),F(\theta))$. Par (9.3.3), μ est donc l'image d'un morphisme $m : s \longrightarrow s'$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))(\theta,\psi)$. Explicitement, pour un objet (X, A) de $E_{c(\psi)}$, le diagramme commutatif de $E_{c(\theta)}$:



donne $\mu_{(X,A)} = {}^X\mu_{(I,A)}$ ($\underline{\mathcal{G}}$ a une unité stricte). La composante en A de $m : s \longrightarrow s'$ est donc donnée par l'isomorphisme $m_A : s_A \longrightarrow s'_A$ de $\underline{\mathcal{G}}$ tel que $(s'_A i_A^{-1}) \circ m_A$ soit la première composante de $\mu_{(I,A)}$. Il reste à montrer que $m : s \longrightarrow s'$ est sous-jacente à un morphisme $\underline{m} : \underline{s} \longrightarrow \underline{s'}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}},\ \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))(\underline{\theta},\underline{\psi})$ (12.2.15-12.2.16), tel que $\underline{F}(\underline{m}) = \underline{\mu}$. La condition (12.2.15) de cohérence aux produits, est obtenue en utilisant la cohérence de μ aux contraintes de comparaison de $\underline{S}$ et $\underline{S'}$. Cela dit, puisque (6.3.2) est localement un isomorphisme, $\underline{\mu}$ est l'image par (6.3.2) d'un morphisme $\underline{G}(\underline{s}) \longrightarrow \underline{G}(\underline{s'})$ de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}^{op}}, \mathbf{Cat})(\underline{G}(\underline{\psi}), \underline{G}(\underline{\theta}))$ défini à partir du morphisme $G(m) : G(s) \longrightarrow G(s')$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})(G(\psi), G(\theta))$ donné par (12.2.28). En particulier, la cohérence au produit de $\underline{\mu}$ équivaut à celle de $G(m)$ (12.2.30). A l'objet (I, I) de $\mathcal{G}_A \times \mathcal{G}_B$, on obtient avec (12.2.30) la commutativité

du diagramme de $\underline{\mathcal{G}}$:

$$\begin{array}{ccc} s_A\ {}^A s_B \chi^\theta(A,B) & \xleftarrow{\Pi^s_{A,B}} & \chi^\psi(A,B) s_{A\otimes B} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle m_A\ {}^A m_B\ 1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1\ m_{A\otimes B}} \\ s'_A\ {}^A s'_B \chi^\theta(A,B) & \xleftarrow{\Pi^{s'}_{A,B}} & \chi^\psi(A,B) s'_{A\otimes B} \end{array}$$

qui est aussi suffisante pour obtenir la condition de cohérence (12.2.15) cherchée. La condition (12.2.16) de cohérence aux unités est obtenue de façon similaire en utilisant celle de μ.

Montrons à présent l'essentiellement surjectivité. Par la biéquivalence (11.5.1), il suffit de montrer qu'un morphisme d'extensions fibrées, $(\alpha, \underline{\mathcal{L}}) : \underline{F}(\underline{\psi}) \longrightarrow \underline{F}(\underline{\theta})$

$$\begin{array}{ccccc} & & \underline{E}_{c(\psi)} & & \\ & {\scriptstyle r'}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle p'} & \\ \underline{\mathcal{G}} & & \alpha \Downarrow\ \underline{\mathcal{L}} & & \underline{\mathcal{K}} \\ & {\scriptstyle r}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle p} & \\ & & \underline{E}_{c(\theta)} & & \end{array} \qquad (13.3.1)$$

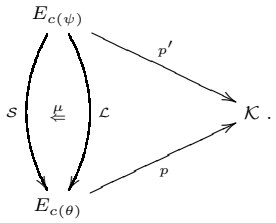
est dans l'image essentielle de $\underline{F}_{\underline{\theta},\underline{\psi}}$. Cette preuve s'obtient comme précédemment en considérant le caractère $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant du foncteur $\mathcal{L}$ sous-jacent au $\underline{\mathcal{K}}$-homomorphisme $\underline{\mathcal{L}}$. Par (13.0.1), le foncteur $\mathcal{L} : E_{c(\psi)} \longrightarrow E_{c(\theta)}$ est $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant pour les $(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{G}})$-actions induites par r' et r. La composition dans $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}, \mathbf{Cat}))$

$$(E_{c(\psi)}, \beta_g, \beta_d) \xrightarrow{(\epsilon,\eta)^{-1}_\psi} (E_{c(\psi)}, t_g r', t_d r') \xrightarrow{\mathcal{L}} (E_{c(\theta)}, t_g r, t_d r) \xrightarrow{(\epsilon,\eta)_\theta} (E_{c(\theta)}, \beta_g, \beta_d),$$

rend $\mathcal{L}$ $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant pour les actions β. Avec (9.3.3), $\mathcal{L}$ est donc isomorphe à l'image par F d'un objet

$$s : \theta \longrightarrow \psi \quad \text{de} \quad \mathbf{Bicat}(\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))(\theta, \psi). \qquad (13.3.2)$$

On dispose donc d'un $\mathcal{K}$-morphisme $\underline{\mathcal{G}}$-équivariant pour les actions β : $F(s) = \mathcal{S}$ (noté E_s en (9.3.22-9.3.23)) et d'une $\mathcal{K}$-transformation $\underline{\mathcal{G}}$-équivariante pour les actions β, $\mu : \mathcal{L} \Longrightarrow \mathcal{S}$:

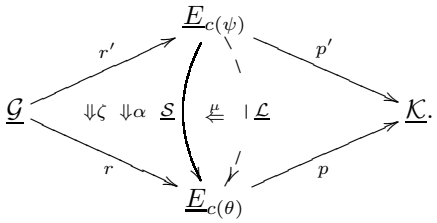


L'isomorphisme naturel μ permet de munir le foncteur $\mathcal{S}$ d'une structure monoïdale $\underline{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}, \Phi^{\mathcal{S}})$ pour laquelle μ devient une transformation monoïdale. Puisque μ est une $\mathcal{K}$-transformation et $\underline{\mathcal{L}}$ un $\underline{\mathcal{K}}$-homomorphisme, les images par p des diagrammes

de $\underline{E}_{c(\theta)}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}((X,A)(Y,B)) & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{L}}} & \mathcal{L}(X,A)\mathcal{L}(Y,B) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu\mu} \\ \mathcal{S}((X,A)(Y,B)) & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{S}}} & \mathcal{S}(X,A)\mathcal{S}(Y,B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\tilde{J},I) & \overset{\Phi_o}{\searrow} & \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & (\tilde{I},I) \\ \mathcal{S}(\tilde{J},I) & \underset{\Phi_o}{\nearrow} & \end{array}$$

montrent que $\Phi^{\mathcal{S}}((X,A)(Y,B))$ et $\Phi^{\mathcal{S}}_o$ sont respectivement un AB-morphisme et un I-morphisme. $\underline{\mathcal{S}}$ est ainsi un $\underline{\mathcal{K}}$-homomorphisme. Ensuite, le collage dans **grCat** : $\alpha(\mu^{-1}.1) : \mathcal{S}r' \Longrightarrow \mathcal{L}r' \Longrightarrow r$, donne un isomorphisme naturel $\zeta : \underline{\mathcal{S}}r' \Longrightarrow r$, qui détermine un morphisme d'extensions fibrées isomorphe, via μ, au morphisme $(\alpha, \underline{\mathcal{L}})$:



(13.3.3)

μ est à présent un 2-morphisme d'extension et est donc avec (13.0.1) une transformation $(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{G}})$-équivariante pour les actions données par r et r'.

Pour terminer, montrons que le morphisme $s : \theta \longrightarrow \psi$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$ défini en (13.3.2) est sous-jacent à un morphisme $\underline{s} = (s, \Pi^s, M^s) : \underline{\theta} \longrightarrow \underline{\psi}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}}_u(\underline{\mathcal{G}}))$, dont l'image par $\underline{F}$ est le morphisme d'extension $(\zeta, \underline{\mathcal{S}})$. On obtiendra ce résultat au lemme (13.7). Puisque (6.3.2) est localement un isomorphisme, le $\underline{\mathcal{K}}$-homomorphisme $\underline{\mathcal{S}}$ est l'image par (6.3.2) d'un morphisme

$$\underline{S} = (G(s), \Pi^S, M^S) : \underline{G}(\underline{\psi}) \longrightarrow \underline{G}(\underline{\theta}) \tag{13.3.4}$$

de $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}^{op}}, \mathbf{Cat})$. Comme en (12.2.17), le morphisme $G(s)$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})$ est obtenu avec (9.3.21) par oubli des actions. Comme en (6.2.2) pour le cas cofibré, les contraintes de comparaison et d'unité de $\underline{\mathcal{S}}$ sont définies via les modifications :

$$\Pi^S : T^{\theta}.(G(s) \times G(s)) \Longrightarrow (G(s) \otimes).T^{\psi} \qquad \text{et} \qquad M^S : (G(s).I).\iota^{G(\psi)} \Longrightarrow \iota^{G(\theta)}.$$

Rappelons que la composante en (X, Y) de l'isomorphisme naturel $\Pi^S_{A,B}$,

$$\Pi^S_{A,B}(X,Y) : ((Xs_A)\ {}^A(Ys_B))\chi^{\theta}(A,B) \longrightarrow ((X\ {}^{A\cdot}Y)\chi^{\psi}(A,B))s_{A\otimes B}\ ,$$

donne avec l'isomorphisme de $E_{c(\theta)}$:

$$\Phi^{\mathcal{S}}((X,A),(Y,B) = ((1\ i^{-1}_{A\otimes B}) \circ (\Pi^S_{A,B}(X,Y))^{-1},\ 1_{A\otimes B}), \tag{13.3.5}$$

la contrainte de comparaison de $\underline{\mathcal{S}}$ en $((X,A),(Y,B))$. L'isomorphisme $M : \tilde{J}s_I \longrightarrow \tilde{I}$, unique composante de la modification M^S, donne la contrainte d'unité de $\underline{\mathcal{S}}$:

$$\Phi^{\mathcal{S}}_o = ((1\ i_i^{-1}) \circ M,\ 1_I) : (\tilde{J}s_I,\ I) \longrightarrow (\tilde{I},\ I)\ . \tag{13.3.6}$$

Lemme 13.4. *La famille d'isomorphismes, (A,B) objet de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$,*

$$\Pi^s_{A,B} := \Pi^S_{A,B}(I,I) : (s_A\ {}^A s_B)\chi^\theta(A,B) \longrightarrow \chi^\psi(A,B)s_{A\otimes B}$$

représente les composantes d'une modification inversible : $\Pi^s : \chi^\psi.(s\otimes) \Longrightarrow (s\otimes s).\chi^\theta$ *de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}\times\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$ *(voir 12.2.5). De plus, la modification* $\Pi^{G(s)}$ *définie par* Π^s *avec (12.2.18) et la modification* Π^S *donnée par (13.3.4) sont égales.*

Démonstration. Les pseudo-isomorphismes ϵ (13.1.1), η (13.1.2) et la cohérence de $\mathcal{S}$ aux actions via ϵ et η, donnent la commutativité de diagramme de $E_{c(\theta)}$ (le symbole $\approx$ est utilisé pour signifier la cohérence de $\mathcal{S}$ aux actions) :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{S}((X,A)(Y,B)) & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{S}}} & \mathcal{S}(X,A)\mathcal{S}(Y,B) & \xrightarrow{\quad\approx\quad} & \mathcal{S}(X,A)[^Y\mathcal{S}(I,B)] \\
\uparrow{\scriptstyle \mathcal{S}(\epsilon_Y(I,B))} & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{S}(\epsilon_Y(I,B))} & & \uparrow{\scriptstyle \epsilon_Y(\mathcal{S}(I,A))} \\
\mathcal{S}[(X,A)(r'(Y)(I,B))] & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{S}}} & \mathcal{S}(X,A)\mathcal{S}(r'(Y)(I,A)) & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{S}}} \mathcal{S}(X,A)(\mathcal{S}r'(Y)\mathcal{S}(I,A)) \xrightarrow{\zeta_Y} & \mathcal{S}(X,A)(r(Y)\mathcal{S}(I,B)) \\
\sim\downarrow & & & \sim\downarrow & \downarrow\sim \\
\mathcal{S}[((X,A)r'(Y))(I,B)] & \underset{\Phi^{\mathcal{S}}}{\to} & \mathcal{S}((X,A)r'(Y))\mathcal{S}(I,B) & \underset{\Phi^{\mathcal{S}}}{\to} (\mathcal{S}(X,A)\mathcal{S}r'(Y))\mathcal{S}(I,A)) \underset{\zeta_Y}{\to} & \mathcal{S}(X,A)r(Y))\mathcal{S}(I,B) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}(\eta_Y(X,A))} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}(\eta_Y(X,A))} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y(\mathcal{S}(X,A))} \\
\mathcal{S}((X^{A\cdot}Y,A)(I,B)) & \xrightarrow[\Phi^{\mathcal{S}}]{} & \mathcal{S}(X^{A\cdot}Y,A)\mathcal{S}(I,B) & \xrightarrow[\approx]{\quad} & [(\mathcal{S}(X,A))^Y]\mathcal{S}(I,B)
\end{array}$$

dont le parcours extérieur est le diagramme commutatif (les contraintes d'unité i_{AB} ainsi que les contraintes d'associativité relatives à $\underline{\mathcal{G}}$ sont omises) :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{S}((X,A)(Y,B)) & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{S}}} & \mathcal{S}(X,A)\mathcal{S}(Y,B) & \xrightarrow{\quad=\quad} & (((Xs_A)^A(Ys_B))\chi^\theta(A,B),\ AB) \\
=\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle (\phi^A,\ 1_{AB})} \\
\mathcal{S}((X^{A\cdot}Y,A)(I,B)) & \xrightarrow[\Phi^{\mathcal{S}}]{} & \mathcal{S}(X^{A\cdot}Y,A)\mathcal{S}(I,B) & \xrightarrow[(s(A)_Y^{-1},\ 1_{AB})]{} & ([((Xs_A)^AY)^As_B]\chi^\theta(A,B),\ AB).
\end{array}$$

En explicitant les morphismes $\Phi^{\mathcal{S}}$ intervenant dans le diagramme précédent, on obtient, pour tous objets (A,B) de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ et (X,Y) de $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, la commutativité du diagramme de $\mathcal{G}$ (voir aussi (12.2.22) p. 508) :

$$\begin{array}{ccc}
[(Xs_A)^A(Ys_B)]\chi^\theta(A,B) & \xrightarrow{\Pi^S_{A,B}(X,Y)} & [(X^{A\cdot}Y)\chi^\psi(A,B)]s_{A\otimes B} \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi^A} & & \uparrow{\scriptstyle (\Pi^s_{A,B})^{-1}} \\
Xs_A{}^AY^As_B\chi^\theta(A,B) & \xrightarrow[s(A)_Y]{} & X^{A\cdot}Ys_A{}^As_B\chi^\theta(A,B)\ .
\end{array} \qquad (13.4.1)$$

Par ailleurs, le diagramme commutatif de $E_{c(\theta)}$,

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{S}[((I,A)(I,B))^X] & \dashrightarrow & \mathcal{S}((I,A)({}^{B\cdot}X,B)) & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{S}}} & \mathcal{S}(I,A)\mathcal{S}({}^{B\cdot}X,B) \\
\uparrow{\scriptstyle \mathcal{S}[\eta_X((I,A)(I,B))]} & & \uparrow{\scriptstyle \mathcal{S}[1\eta_X(I,B)]} & & \uparrow{\scriptstyle 1\mathcal{S}(\eta_X(I,B))} \\
\mathcal{S}[((I,A)(I,B))r'(X)] & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{S}[(I,A)((I,B)r'(X))] & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{S}}} & \mathcal{S}(I,A)\mathcal{S}((I,B)r'(X)) \\
\downarrow{\scriptstyle 1\Phi^{\mathcal{S}}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{\mathcal{S}}} \\
\mathcal{S}((I,A)(I,B))\mathcal{S}r'(X) & \xrightarrow[\Phi^{\mathcal{S}}]{} & (\mathcal{S}(I,A)\mathcal{S}(I,B))\mathcal{S}r'(X) & \xrightarrow[\sim]{} & \mathcal{S}(I,A)(\mathcal{S}(I,B)\mathcal{S}r'(X)) \\
\downarrow{\scriptstyle 1\zeta_X} & & \downarrow{\scriptstyle 1\zeta_X} & & \downarrow{\scriptstyle 1\zeta_X} \\
\mathcal{S}((I,A)(I,B))r(X) & \xrightarrow[\Phi^{\mathcal{S}}]{} & (\mathcal{S}(I,A)\mathcal{S}(I,B))r(X) & \xrightarrow[\sim]{} & \mathcal{S}(I,A)(\mathcal{S}(I,B)r(X)) \\
\downarrow{\scriptstyle 1\eta_X} & & \downarrow{\scriptstyle 1\eta_X} & & \downarrow{\scriptstyle 1\eta_X} \\
[\mathcal{S}((I,A)(I,B))]^X & \xrightarrow[[\Phi^{\mathcal{S}}]^X]{} & [\mathcal{S}(I,A)\mathcal{S}(I,B)]^X & \dashrightarrow & \mathcal{S}(I,A)[\mathcal{S}(I,B)]^X
\end{array}$$

donne en utilisant la cohérence de $\mathcal{S}$ aux deux $(\underline{\mathcal{G}},\underline{\mathcal{G}})$-actions, le diagramme commutatif de $E_{c(\theta)}$:

$$\begin{array}{ccccc}
((\chi^{\psi}(A,B)^{(AB)\cdot}X)s_{AB},\, AB) & \xrightarrow{(\chi^{\psi}_X,\, 1_{AB})} & ({}^{A\cdot}({}^{B\cdot}X)\chi^{\psi}(A,B)s_{AB},\, AB) & \xrightarrow{\Phi^{\mathcal{S}}} & ({s_A}^A({}^{B\cdot}Xs_B)\chi^{\theta}(A,B),\, AB) \\
\uparrow{\scriptstyle (s(AB)_X,\, 1_{AB})} & & & & \uparrow{\scriptstyle (s(B)_X,\, 1_{AB})} \\
((\chi^{\psi}(A,B)s_{AB})^{AB}X,\, AB) & \xrightarrow[[\Phi^{\mathcal{S}}]^X]{} & ({s_A}^A s_B\chi^{\theta}(A,B)^{AB}X,\, AB) & \xrightarrow[((\Phi^A)^{-1}\chi_X,\, 1_{AB})]{} & ({s_A}^A({s_B}^B X)\chi^{\theta}(A,B),\, AB)\,.
\end{array}$$

Enfin, par la commutativité de (13.4.1) et en explicitant les morphismes Φ^S et $[\Phi^S]^X$ intervenant dans ce dernier diagramme, on obtient la commutativité du diagramme de $\mathcal{G}$ (voir (12.2.10)) :

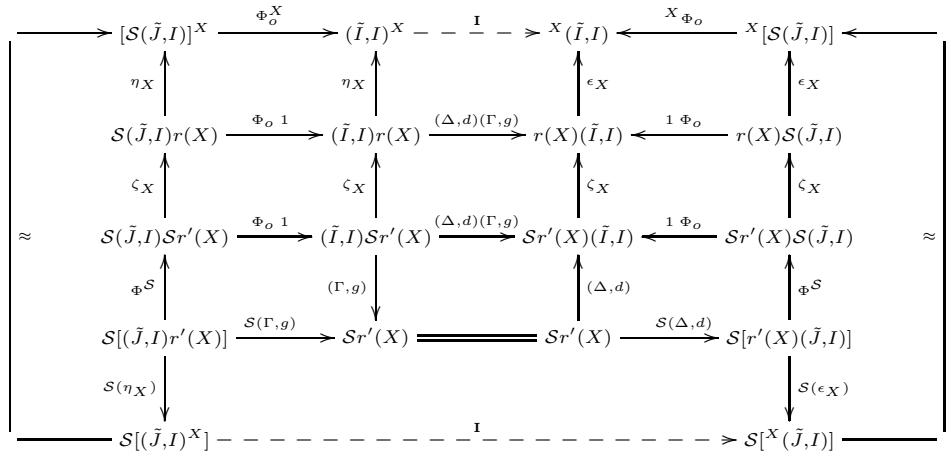
$$\begin{array}{ccccc}
\chi^{\psi}(A,B)s_{A\otimes B}{}^{AB}X & \xrightarrow{s(A\otimes B)_X} & \chi^{\psi}(A,B)^{(AB)\cdot}Xs_{A\otimes B} & \xrightarrow{\chi^{\psi}_X} & {}^{A\cdot}({}^{B\cdot}X)\chi^{\psi}(A,B)s_{A\otimes B} \\
\downarrow{\scriptstyle \Pi^s_{A,B}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Pi^s_{A,B}} \\
{s_A}^A s_B\chi^{\theta}(A,B)^{AB}X & \xrightarrow[\chi^{\theta}_X]{} & {s_A}^A{s_B}^A({}^{B\cdot}X)\chi^{\theta}(A,B) & \xrightarrow[(s(A)\otimes s(B))_X]{} & {}^{A\cdot}({}^{B\cdot}X)({s_A}^A s_B)\chi^{\theta}(A,B).
\end{array} \tag{13.4.2}$$

pour tous objets (A,B) de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ et X de $\mathcal{G}$.
Terminons la démonstration du lemme (13.4). Le diagramme (13.4.2) montre que l'on a une famille de modifications de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$: $\Pi^s_{A,B}$, (A,B) objet de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ (voir 12.2.9). Le diagramme (13.4.1) définit $\Pi^S_{A,B}$ comme en (12.2.20 p. 508) et la cohérence de $\Pi^S_{A,B}$ équivaut donc à celle de $\Pi^s_{A,B}$ (une preuve rapide pour la cohérence de $\Pi^s_{A,B}$ consiste à utiliser celle de $\Pi^S_{A,B}$ exprimée à l'objet (I,I)). Enfin, il est clair avec (13.4.2) et (13.4.1) que $\Pi^S_{A,B}=\Pi^{G(s)}_{A,B}$. □

Lemme 13.5. *L'isomorphisme $M=\tilde{J}s_I\longrightarrow\tilde{I}$ donné par la modification M^S est la composante d'une modification inversible : M^s : $\iota^{\psi}.(s\circ I)\Longrightarrow\iota^{\theta}$ de*

Bicat($\mathbb{1}$, **Bieq$_{\mathbf{u}}$**($\underline{\mathcal{G}}$)) *(voir (12.2.6), (12.2.12) et (12.2.13)). La modification $M^{G(s)}$ définie avec (12.2.19) et la modification M^S donnée par (13.3.4) sont égales.*

Démonstration. Il suffit d'établir la commutativité du diagramme (12.2.13). En utilisant (13.3.6), cette commutativité est obtenue à partir du diagramme commutatif de $E_{c(\theta)}$,



la suite est laissée au lecteur □

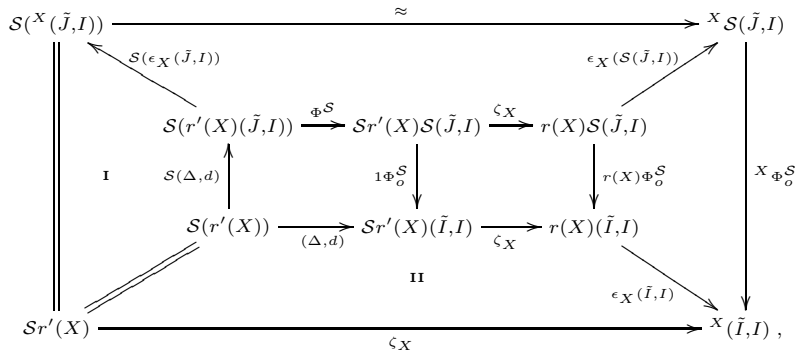
Lemme 13.6. *Les modifications Π^s (13.4) et M^s (13.5) sont cohérentes aux sens de (12.2.7)-(12.2.8) et définissent ainsi un morphisme $\underline{s} = (s, \Pi^s, M^s) : \underline{\theta} \longrightarrow \underline{\psi}$ de* **Bimon**($\underline{\mathcal{K}}$, $\underline{\mathbf{Bieq}}_u$($\underline{\mathcal{G}}$)). *De plus, le morphisme $\underline{G}(\underline{s})$ que $\underline{s}$ définit avec (12.2.19) et le morphisme $\underline{S}$ donné par (13.3.4) sont égaux.*

Démonstration. Les conditions de cohérences (12.2.7) et (12.2.8) (voir aussi (12.2.14)) sont respectivement dues à la cohérence à l'associativité de la contrainte de comparaison (13.3.5) et à la cohérence de la contrainte d'unité (13.3.6) de $\underline{\mathcal{S}}$. Cela dit, par (13.3.4) la cohérence des contraintes de $\underline{\mathcal{S}}$ est donnée par celle des modifications Π^S et M^S c'est-à-dire des modifications $\Pi^{G(s)}$ et $M^{G(s)}$ par les lemmes (13.4) et (13.5). La cohérence à l'associativité de $\Pi^{G(s)}$ (12.2.26) donne pour $X = Y = Z = I$ le diagramme (12.2.14), exprimant la cohérence à l'associativité de Π^s (12.2.7). De même (12.2.27) donne pour $X = I$ la cohérence de M^s et Π^s aux unités (12.2.8). Il est clair que le morphisme $\underline{G}(\underline{s})$ image de $\underline{s} = (s, \Pi^s, M^s)$ par (12.2.19) est le morphisme $\underline{S}$ donné par (13.3.4). □

Lemme 13.7. *Le morphisme d'extension $(\zeta, \underline{\mathcal{S}})$ (13.3.3) est l'image par $\underline{F}$ du morphisme $\underline{s} = (s, \Pi^s, M^s)$ donné par (13.6).*

Démonstration. Par (13.3.4) et (13.6), $\underline{\mathcal{S}}$ est l'image par (6.3.2) du morphisme $\underline{G}(\underline{s}) = (G(s), \Pi^{G(s)}, M^{G(s)})$, ce qui donne (12.2.32). Il reste donc à montrer que $\zeta : \underline{\mathcal{S}}r' \Longrightarrow r$ est de la forme (12.2.34). Ce dernier résultat est obtenu avec la com-

mutativité du diagramme de $E_{c(\theta)}$:

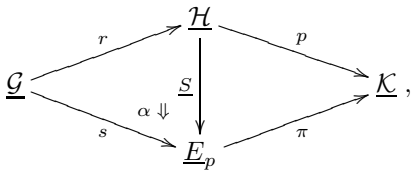


X objet de $\mathcal{G}$. Les commutativités de (**I**) et (**II**) s'obtiennent en utilisant la définition des morphismes (Δ, d) et ϵ_X. Ce qui termine la démonstration de l'essentielle surjectivité et de l'équivalence locale (13.3). □

13.2. La biessentielle surjectivité

Proposition 13.8. *L'homomorphisme* $\underline{F}$: $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})^{op}$ *de (12.0.1) est biessentiellement surjectif .*

Nous avons vu en (11.5.1) qu'une extension quelconque $((r,\lambda),p)$ est équivalente à une extension fibrée (11.2.3)



(13.8.1)

dont les fibres strictes sont les fibres homotopiques de l'extension $((r,\lambda),p)$. Il suffit donc de montrer que cette extension fibrée (s,π) est dans l'image biessentielle de $\underline{F}$.

Proposition 13.9. *Une extension* $((r,\lambda),p)$ *détermine avec les fibres homotopiques de* p *une* $\mathcal{K}$*-fibration en* $\underline{\mathcal{G}}^{op}$*-bitorseurs dont l'image par (9.3.2) admet pour fibration sous-jacente celle obtenue avec l'extension* (s,π)*.*

Démonstration. Rappelons que le morphisme s est la composée $\underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{q} N(p) \xrightarrow{i} \underline{E}_p$ où $q=(r,\lambda)$ et que la fibration monoïdale $\pi : \underline{E}_p \longrightarrow \underline{\mathcal{K}}$ provient du pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G}_p$ défini sur $\underline{\mathcal{K}}^{op}$ par (11.5.2). Pour chaque objet A de $\mathcal{K}$, le $\underline{\mathcal{G}}$-torseur à gauche associé à la fibre homotopique $\mathcal{H}_{(A)}$ de p au dessus de A,

$$\alpha_A : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{E}q(\mathcal{H}_{(A)}), \tag{13.9.1}$$

est défini en un objet X de $\mathcal{G}$ par l'équivalence : $^X(-) : \mathcal{H}_{(A)} \xrightarrow{t_g q(X)} \mathcal{H}_{(I\otimes A)} \xrightarrow{F_{g_A}} \mathcal{H}_{(A)}$, où t_g est la translation à gauche dans $\underline{E}_p$. Pour un objet (Y,f) de $\mathcal{H}_{(A)}$, on

a donc ${}^X(Y,f) = (r(X)Y, \lambda_X * f)$ où $\lambda_X * f = p(r(X)Y) \xrightarrow{\Phi^p} pr(X) \otimes p(Y) \xrightarrow{\lambda_X f} I \otimes A \xrightarrow{g_A} A$. Avec le pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G}_p$ (11.5.2), cette action correspond au foncteur :

$$\mathcal{G} \times \mathcal{H}_{(A)} \xrightarrow{q \times 1} \mathcal{H}_{(I)} \times \mathcal{H}_{(A)} \xrightarrow{T_{I,A}} \mathcal{H}_{(I \otimes A)} \xrightarrow{F_{g_A}} \mathcal{H}_{(A)}.$$

La contraintes d'unité de cette action est obtenue avec les collages dans **Cat** :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{G} \times \mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow{q \times 1} & \mathcal{H}_{(I)} \times \mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow{T_{I,A}} & \mathcal{H}_{(IA)} \\
\uparrow & \Downarrow \Phi^q_o & \uparrow & \Downarrow G_A & \downarrow F_{g_A} \\
\mathrm{I} \times \mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow{=} & \mathrm{I} \times \mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_{(A)}.
\end{array}$$

De même, la contrainte de comparaison est obtenue avec le collage :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{G}\times\mathcal{G}\times\mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow{q\times q\times 1} & \mathcal{H}_{(I)}\times\mathcal{H}_{(I)}\times\mathcal{H}_{(A)} & & \xrightarrow{1\times T_{I,A}} & & \mathcal{H}_{(I)}\times\mathcal{H}_{(IA)} & \xrightarrow{1\times F_g} & \mathcal{H}_{(I)}\times\mathcal{H}_{(A)} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle T_{I,I}\times 1} & \Uparrow \alpha_{I,I,A} & & & \downarrow{\scriptstyle T_{I,IA}} & & \downarrow{\scriptstyle T_{I,A}} \\
\downarrow{\scriptstyle \otimes\times 1} & \Uparrow \Phi^d\times 1 & \mathcal{H}_{(II)}\times\mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow{T_{II,A}} & \mathcal{H}_{((II)A)} & \xrightarrow{F_a} & \mathcal{H}_{(I(IA))} & \xrightarrow{F_{1\times g}} & \mathcal{H}_{(IA)} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle F_g\times 1} & & \downarrow{\scriptstyle F_{g1}} & & \downarrow{\scriptstyle F_g} & & \downarrow{\scriptstyle F_g} \\
\mathcal{G}\times\mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow{q\times 1} & \mathcal{H}_{(I)}\times\mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow{T_{I,A}} & \mathcal{H}_{(IA)} & = & \mathcal{H}_{(IA)} & \xrightarrow{F_g} & \mathcal{H}_{(A)}.
\end{array}$$

Cette contrainte exprimée aux objets (X,Y) de $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ et (Z,f) de $\mathcal{H}_{(A)}$, correspond à l'isomorphisme de $\mathcal{H}_{(A)}$: $a \circ \Phi^r : {}^{(YX)}(Z,f) \longrightarrow {}^Y({}^X(Z,f))$. Par (11.3), le choix pour chaque objet A de $\mathcal{K}$ d'un objet $r_A = (\sigma_A, \lambda_A)$ de $\mathcal{H}_{(A)}$ définit une équivalence,

$$O_A : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}_{(A)}, \quad X \mapsto {}^X r_A, \tag{13.9.2}$$

et $(\mathcal{H}_{(A)}, \alpha_A)$ est ainsi un $\underline{\mathcal{G}}$-torseur à gauche. L'action à droite sur ce $\underline{\mathcal{G}}$-torseur,

$$\beta_A : \underline{\mathcal{G}}^{op} \longrightarrow \mathcal{E}q_{\underline{\mathcal{G}}}(\alpha_A), \tag{13.9.3}$$

est défini en un objet Z de $\mathcal{G}$ par l'équivalence équivariante pour l'action à gauche,

$$(-)^Z : \mathcal{H}_{(A)} \xrightarrow{t_d q(Z)} \mathcal{H}_{(A \otimes I)} \xrightarrow{F_{d_A^{-1}}} \mathcal{H}_{(A)}.$$

où t_d est la translation à droite dans $\underline{E}_p$. L'équivariance pour l'action à gauche, en d'autres termes la cohérence gauche-droite, est obtenue avec le collage dans **Cat** :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{G}\times\mathcal{H}_{(A)}\times\mathcal{G} & \xrightarrow{q\times 1\times q} & \mathcal{H}_{(I)}\times\mathcal{H}_{(A)}\times\mathcal{H}_{(I)} & & \xrightarrow{T_{I,A}\times 1} & & \mathcal{H}_{(IA)}\times\mathcal{H}_{(I)} & \xrightarrow{F_g\times 1} & \mathcal{H}_{(A)}\times\mathcal{H}_{(I)} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1\times T_{A,I}} & \Downarrow \alpha_{I,A,I} & & & \downarrow{\scriptstyle T_{IA,I}} & & \downarrow{\scriptstyle T_{A,I}} \\
\downarrow{\scriptstyle 1\times\beta} & & \mathcal{H}_{(I)}\times\mathcal{H}_{(AI)} & \xrightarrow{T_{I,AI}} & \mathcal{H}_{(I(AI))} & \xleftarrow{F_a} & \mathcal{H}_{((IA)I)} & \xrightarrow{F_{g\times 1}} & \mathcal{H}_{(AI)} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1\times F_{d_A^{-1}}} & & \downarrow{\scriptstyle F_{1d_A^{-1}}} & & \downarrow{\scriptstyle F_{d_{IA}^{-1}}} & & \downarrow{\scriptstyle F_{d_A^{-1}}} \\
\mathcal{G}\times\mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow[q\times 1]{} & \mathcal{H}_{(I)}\times\mathcal{H}_{(A)} & \xrightarrow[T_{I,A}]{} & \mathcal{H}_{(IA)} & = & \mathcal{H}_{(IA)} & \xrightarrow[F_g]{} & \mathcal{H}_{(A)}
\end{array}$$

Les contraintes de β sont définies de la même façon que celles de l'action à gauche. Enfin, pour chaque objet A de $\mathcal{K}$, $(\mathcal{H}_{(A)}, \alpha_A, \beta_A)$ est un bitorseur puisque le foncteur $O'_A : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}_{(A)}, \quad Z \mapsto {r_A}^Z$ est une équivalence. La structure de $\mathcal{K}$-fibration en bitorseurs est facile à obtenir. En effet, pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\underline{\mathcal{K}}$, le foncteur $F_{f^{-1}} : \mathcal{H}_{(B)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(A)}$ (11.5.2) est strictement équivariant pour les deux actions puisque que l'on a pour tout objet X de $\underline{\mathcal{G}}$ $F_{f^{-1}} \circ \alpha_B(X) = \alpha_A(X) \circ F_{f^{-1}}$ et $F_{f^{-1}} \circ \beta_B(X) = \beta_A(X) \circ F_{f^{-1}}$. De même les contraintes strictes $F_{gf} = F_g F_f$ et $F_1 = 1$ sont clairement $\underline{\mathcal{G}}$-équivariantes. On dispose donc d'une $\mathcal{K}$-fibration en $\underline{\mathcal{G}}^{op}$-bitorseurs c'est-à-dire d'un objet, ici homomorphisme strict, de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op}))$. Enfin, il est clair que l'image de cet objet par (9.3.2) admet pour fibration sous-jacente celle obtenue avec l'extension $(s, \pi) : E_p \xrightarrow{\pi} \mathcal{K}$

□

La construction qui vient d'être donnée est fonctorielle, en poursuivant on montre que l'on dispose d'un homomorphisme (à comparer ce avec (13.0.1) où seul l'homomorphisme r était utilisé):

$$\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op})). \tag{13.9.4}$$

Proposition 13.10. *Modulo le choix, pour chaque objet A de $\mathcal{K}$, d'un objet $r_A = (\sigma_A, \lambda_A)$ de $\mathcal{H}_{(A)}$ et d'une $\underline{\mathcal{G}}$-équivalence quasi inverse O^*_A de la $\underline{\mathcal{G}}$-équivalence (13.9.2), une extension $((r, \lambda), p)$ détermine un objet de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$ dont l'image par (9.3.3) admet une fibration sous-jacente équivalente à celle obtenue avec l'extension (s, π) de (13.8.1).*

Démonstration. Par la proposition (13.9) et la biéquivalence (9.3.1), ce résultat est immédiat puisque de tels choix pour chaque objet de $\mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op})$ détermine une biéquivalence quasi-inverse de (8.4) et donc de (9.3.1). □

Explicitons cette proposition. Comme en (8.2.1)-(8.2.3) pour les torseurs à droite, de tels choix déterminent une famille de biéquivalences de $\underline{\mathcal{G}}$ (8.2.6),

$$(\theta(A), \Phi^A) : \underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}, \quad Z \mapsto {}^A Z; \quad A \text{ objet de } \mathcal{K}, \tag{13.10.1}$$

où ${}^A Z := O^*_A((r_A)^Z)$. La contrainte de comparaison Φ^A est obtenue à partir de la $\underline{\mathcal{G}}$-transformation $\eta : 1_{\mathcal{H}_{(A)}} \Longrightarrow O_A O^*_A$ d'expression en $(r_A)^Z$ l'isomorphisme fonctoriel en Z :

$$(r_A)^Z \xrightarrow{\eta_Z} {}^A Z(r_A). \tag{13.10.2}$$

Cette contrainte est définie aux objets X et Y de $\mathcal{G}$ par l'unique isomorphisme de $\underline{\mathcal{G}}$ défini par la composition dans $\mathcal{H}_{(A)}$

$$\begin{array}{ccccccc}
(r_A)^{(XY)} & & \xrightarrow{\qquad\qquad \eta_{XY} \qquad\qquad} & & & & {}^{A(XY)}r_A \\
{\scriptstyle \Phi^\beta}\downarrow & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^{A(X,Y)}r_A} \\
((r_A)^X)^Y & \xrightarrow[(\eta_X)^Y]{} & ({}^{AX}r_A)^Y & \xrightarrow[\sim]{} & {}^{AX}((r_A)^Y) & \xrightarrow[{}^{AX}(\eta_Y)]{} & {}^{AX}({}^{AY}r_A) \xrightarrow[(\Phi^\alpha)^{-1}]{} ({}^{AX\,AY})r_A.
\end{array} \tag{13.10.3}$$

Comme en (8.2.7), on dispose d'une famille d'équivalences de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}}))$

$$O_A : T_d \circ \theta(A) \Longrightarrow \beta_A \quad A \text{ objet de } \mathcal{K}, \tag{13.10.4}$$

(notée aussi $O_A : (\mathcal{G}_{tr}, \theta(A)) \Longrightarrow (\mathcal{H}_{(A)}, \alpha_A, \beta_A)$ dans la suite), de composante la $\underline{\mathcal{G}}$-équivalence (13.9.2) et d'expression pour un objet Z de $\mathcal{G}$, la $\underline{\mathcal{G}}$-transformation

$$O_Z : O_A \circ t_d({}^A Z) \Longrightarrow \beta_A(Z) \circ O_A \tag{13.10.5}$$

où pour un objet X de $\mathcal{G}$, $O_Z(X) : {}^{X\,{}^A Z r_A} \approx {}^X({}^A Z r_A) \overset{{}^X(\eta Z)^{-1}}{\longrightarrow} {}^X(r_A{}^Z) \approx ({}^X r_A)^Z$.
Ensuite, pour un morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{K}$, l'objet de $\mathcal{G}$

$$\theta_f = O_A^*(F_{f^{-1}}(r_B)) \tag{13.10.6}$$

et l'isomorphisme de $\mathcal{H}_{(A)}$

$$F_{f^{-1}}(r_B) \overset{\eta_f}{\longrightarrow} {}^{\theta_f}(r_A) \tag{13.10.7}$$

donné par la $\mathcal{G}$-transformation $\eta : 1_{\mathcal{H}_{(A)}} \Longrightarrow O_A O_A^*$ exprimée en $F_{f^{-1}}(r_B)$, donnent une modification de $\mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{t_d(\theta_f)} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle O_B}\downarrow & \Downarrow O_f & \downarrow{\scriptstyle O_A} \\ \mathcal{H}_{(B)} & \xrightarrow[F_{f^{-1}}]{} & \mathcal{H}_{(A)} \ , \end{array} \tag{13.10.8}$$

où, $O_f(X) : {}^{X\theta_f}(r_A) \approx {}^X({}^{\theta_f}(r_A)) \overset{{}^X(\eta_f)^{-1}}{\longrightarrow} {}^X(F_{f^{-1}}(r_B)) = F_{f^{-1}}({}^X r_B)$.
Pour deux morphismes $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ de $\mathcal{K}$, l'unique isomorphisme de $\mathcal{G}$,

$$C_{f,g} : \theta_{gf} \longrightarrow \theta_g \theta_f, \tag{13.10.9}$$

donné par la composition dans $\mathcal{H}_{(A)}$

$$\begin{array}{ccccccc} F_{(gf)^{-1}}(r_C) & & \xrightarrow{\qquad\qquad\eta_{gf}\qquad\qquad} & & & & {}^{\theta_{gf}}(r_A) \\ {\scriptstyle F_{f^{-1}}(\eta_g)}\downarrow & & & & & & \Big| \\ & & & & & & \Big| {\scriptstyle C_{f,g}(r_A)} \\ F_{f^{-1}}({}^{\theta_g}(r_B)) & \xrightarrow{=} & {}^{\theta_g}(F_{f^{-1}}(r_B)) & \xrightarrow{{}^{\theta_g}(\eta_f)} & {}^{\theta_g}({}^{\theta_f}(r_B)) & \xrightarrow{\sim} & {}^{(\theta_g\theta_f)}(r_A) \ , \end{array}$$

définit les contraintes de comparaison (9.2.2) d'un objet θ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$. L'image de cet objet par (9.2.1) donne une $\mathcal{K}$-fibration $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs. Enfin, La modification (13.10.8) est la composante en f d'une équivalence (notée par ces composantes)

$$O_- : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}_- \quad \text{de } \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})) \tag{13.10.10}$$

entre cette dernière $\mathcal{K}$-fibration en $\underline{\mathcal{G}}$-torseurs et celle définie par l'extension (s, π).

Lemme 13.11. *Avec un choix approprié des $\underline{\mathcal{G}}$-équivalences quasi-inverse O_A^*, les équivalences $\theta(A)$ ainsi que l'objet θ de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \underline{\mathcal{G}})$ *qui vient d'être défini peuvent être rendus stricts sur les unités. Enfin, on peut aussi obtenir $\theta(I) = 1_{\underline{\mathcal{G}}}$.*

Démonstration. On note $\Phi_0^{\alpha_A} : \alpha_A(I) \Longrightarrow 1_{\mathcal{H}_{(A)}}$ et $\Phi_0^{\beta_A} : \beta_A(I) \Longrightarrow 1_{\mathbf{Tors}(\alpha_A)}$ les contraintes d'unité relatives aux actions α_A et β_A. Le choix $\Phi_0^{\alpha_A}(r_A) \circ \eta_I = \Phi_0^{\beta_A}(r_A)$ (13.10.2) donne ${}^A I = O_A^*((r_A)^I) = I$ (13.10.1) ainsi qu'une gr-équivalence $\theta(A)$ stricte sur les unités. Le choix $\eta_{1_A} = (\Phi_0^{\alpha_A}(r_A))^{-1}$ (13.10.7) donne $\theta_{1_A} = O_A^*(r_A)) = I$ (13.10.6) ainsi qu'une contrainte d'unité stricte pour l'homomorphisme $\theta : K \longrightarrow \underline{\mathcal{G}}$ (9.2.2). Enfin, on choisit $r_I = (I, \Phi_o^p)$, les morphismes de $\mathcal{H}_{(I)}$ donnés par les contraintes d'unité de $\mathcal{H}$: $g_{r(X)} : (r_I)^X \longrightarrow q(X)$ et $d_{r(X)} : q(X) \longrightarrow {}^X(r_I)$ permettent de choisir pour tout objet X de $\mathcal{G}$ distinct de I : $\eta_X = d_{r(X)} \circ g_{r(X)} : (r_I)^X \longrightarrow {}^X(r_I)$; on obtient alors $\theta(I) = (1_{\mathcal{G}}, 1) = 1_{\underline{\mathcal{G}}}$. □

Poursuivons l'explicitation de (13.10). Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{K}$, pour un objet Z de $\mathcal{G}$ le diagramme de $\mathcal{H}_{(A)}$ (les cohérences gauche-droite sont omises)

$$\begin{array}{ccccc}
(F_{f^{-1}}(r_B))^Z & \xrightarrow{(\eta_f)^Z} & \theta_f(r_A)^Z & \xrightarrow{{}^{\theta_f}(\eta_Z)} & \theta_f {}^A Z(r_A) \\
= \downarrow & & & & \downarrow {\scriptstyle \theta(f)_Z(r_A)} \\
F_{f^{-1}}((r_B)^Z) & \xrightarrow{F_{f^{-1}}(\eta_Z)} & {}^B Z(F_{f^{-1}}(r_A)) & \xrightarrow{{}^B Z \eta_f} & {}^B Z \theta_f(r_A)
\end{array}$$

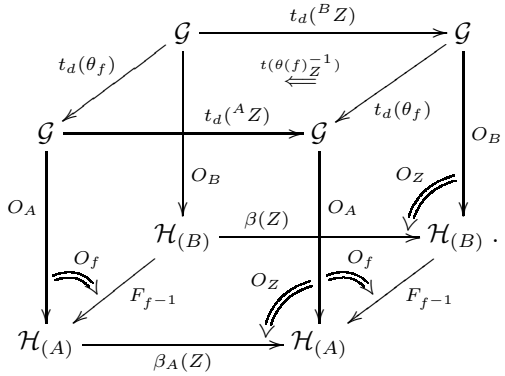
définit une famille d'isomorphismes de $\mathcal{G}$, $\theta(f)_Z : \theta_f {}^A Z \longrightarrow {}^B Z \theta_f$, naturels en Z. Celle-ci est cohérente dans $\underline{\mathcal{G}}$ (9.3.7)-(9.3.8). On obtient ainsi une famille de pseudo-équivalences de $\mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}})$ (9.3.5),

$$\theta(f) : \theta(A) \longrightarrow \theta(B), \quad f : A \longrightarrow B \text{ morphisme de } \mathcal{K}, \tag{13.11.1}$$

cohérentes dans $\mathcal{K}$ (9.3.10) via les contraintes définies par les isomorphismes (13.10.9). Ceci termine la définition de l'objet de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}(\underline{\mathcal{G}}))$ de la précédente proposition. Pour les choix du lemme (13.11), cet objet est alors un homomorphisme

$$(\theta, C, 1) \quad \text{de} \quad \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})) \tag{13.11.2}$$

pour lequel $\theta(I) = 1_{\underline{\mathcal{G}}}$. Pour finir, indiquons que la $\underline{\mathcal{G}}$-transformation (13.10.8) est, pour un morphisme f fixé,la composante d'une $(\underline{\mathcal{G}}, \underline{\mathcal{G}})$-transformation c'est-à-dire d'une modification de $\mathbf{Bicat}(\underline{\mathcal{G}}^{op}, \mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}}))$ d'expression en Z le cube de $\mathbf{Tors}_g(\underline{\mathcal{G}})$

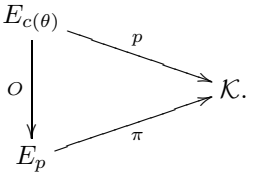


(13.11.3)

La cohérence à la composition dans $\mathcal{K}$ de ces modifications implique que ce cube est l'expression en f d'une équivalence de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op}))$ (notée par ces composantes et comme en (13.10.10) par abus)

$$O_- : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}_- \quad \text{de } \mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op}, \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op})) \tag{13.11.4}$$

de composante aux objets les équivalences définies en (13.10.4). L'image par (9.3.2) de cette équivalence est une $\mathcal{K}$-équivalence équivariante pour les actions



(13.11.5)

Proposition 13.12. *L'objet $(\theta, C, 1)$ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}, \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$ défini en (13.11.2) est sous-jacent à un objet $\underline{\theta}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}}))$ dont l'image $\underline{F}(\underline{\theta})$ par (13.8) est équivalente dans $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ à l'extension (s, π) de (13.8.1).*

Démonstration. On fait les choix du lemme (13.11). La preuve de cette proposition se déroule comme suit. On dispose de l'équivalence de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Cat})$

$$O : G(\theta) \longrightarrow G_p \tag{13.12.1}$$

déduite de l'équivalence (13.11.4) de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Bitors}(\underline{\mathcal{G}}^{op}))$ par oubli des actions. Le pseudo-foncteur $G(\theta)$ est défini comme en PS1 (p. 496) et le pseudo-foncteur G_p est obtenu de $\underline{G}_p$ (11.5.2 p. 488) par oubli de la structure monoïdale. Par le lemme (5.7, p. 460), on ``transporte'' sur $\mathcal{G}$ le pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G}_p$. On obtient ainsi un pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G}(\underline{\theta})$ et une équivalence dans $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}^{op}},\ \mathbf{Cat})$

$$(O, \Pi, M) : \underline{G}(\underline{\theta}) \longrightarrow \underline{G}_p. \tag{13.12.2}$$

Par la $\underline{G}$-équivariance des équivalences $O_- : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}_{(-)}$ (13.11.4), le pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G}(\underline{\theta})$ sera en fait l'image par (12.0.2 p. 489) d'un objet $\underline{\theta}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}^{op}},\ \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$. Enfin, l'équivalence des pseudo-foncteurs (O, Π, M) précédente donnera l'équivalence dans $\mathbf{Ext}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathcal{G}})$ cherchée.

Explicitons cette preuve. Pour commencer, il faut remarquer la $\underline{\mathcal{K}}$-fibration monoïdale π de (13.8.1) ou si l'on préfère le pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G_p}$ (11.5.2 p. 488) est cohérent aux actions. Plus précisésent, pour (A,B) un objet de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ et pour tous objets (u,v) de $\mathcal{H}_{(A)}\times\mathcal{H}_{(B)}$ et X de $\mathcal{G}$, les isomorphismes de $\mathcal{H}_{(AB)}$

$$a_- : (T_{A,B}(u,v))^X \longrightarrow T_{A,B}(u,v^X), \quad a_-^{-1} : T_{A,B}(u,{}^Xv) \longrightarrow T_{A,B}(u^X,v),$$

$$a_- : T_{A,B}({}^Xu,v) \longrightarrow {}^XT_{A,B}(u,v).$$

sont naturels en u, v et X et cohérents, ce dernier point exprimant par exemple, pour le premier isomorphisme la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
(T_{A,B}(u,v))^{(XY)} & & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & & T_{A,B}(u,v^{(XY)}) \\
\sim\downarrow & & & & \downarrow\sim \\
((T_{A,B}(u,v)^X)^Y) & \xrightarrow{\sim} & (T_{A,B}(u,v^X))^Y & \xrightarrow{\sim} & T_{A,B}(u,(v^X)^Y)
\end{array} \tag{13.12.3}$$

$$\begin{array}{ccc}
(T_{A,B}(u,v))^I & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & T_{A,B}(u,v^I) \\
& {\scriptstyle\sim}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\sim} & \\
& (T_{A,B}(u,v)) &
\end{array}$$

Lemme 13.13. *Soient (A,B) un objet de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ et X un objet de $\mathcal{G}$. La famille d'isomorphismes T_X de $\mathcal{H}_{(AB)}$ définie via les isomorphismes η_X de (13.10.2) par la composition dans $\mathcal{H}_{(AB)}$*

$$\begin{array}{ccccccc}
(T_{A,B}(r_A,r_B))^X & & \overset{T_X}{\dashrightarrow} & & & & {}^{A(BX)}T_{A,B}(r_A,r_B) \\
\sim\downarrow & & & & & & \uparrow\sim \\
T_{A,B}(r_A,(r_B)^X) & \xrightarrow{T_{A,B}(1,\eta_X)} & T_{A,B}(r_A,{}^{BX}r_B) & \xrightarrow{\sim} & T_{A,B}((r_A)^{BX},r_B) & \xrightarrow{T_{A,B}(\eta_{BX},1)} & T_{A,B}({}^{A(BX)}r_A,r_B)
\end{array}$$

est naturelle en X et cohérente à la structure monoïdale de $\underline{\mathcal{G}}$. De plus, l'objet de $\underline{\mathcal{G}}$

$$\chi(A,B) := O^*_{(AB)}(T_{A,B}(r_A,r_B))$$

et la famille d'isomorphismes de $\underline{\mathcal{G}}$

$$\chi_X : \chi(A,B)\,{}^{AB}X \longrightarrow {}^A({}^BX)\chi(A,B), \quad X \text{ objet de } \mathcal{G}, \tag{13.13.1}$$

définie par la composée dans $\mathcal{H}_{(AB)}$, via la $\mathcal{G}$-transformation $\eta : 1_{\mathcal{H}_{(AB)}} \Longrightarrow O_{(AB)}O^*_{(AB)}$ exprimée en $T_{A,B}(r_A,r_B)$, $\eta_{A,B}$:

$T_{A,B}(r_A, r_B) \longrightarrow \chi(A,B) r_{AB}$,

$$\begin{array}{ccccc}
(T_{A,B}(r_A,r_B))^X & \xrightarrow{(\eta_{A,B})^X} & (\chi(A,B) r_{AB})^X & \xrightarrow{(O_X)^{-1}} & (\chi(A,B)^{AB} X) r_{(AB)} \\
\downarrow{\scriptstyle T_X} & & & & \downarrow{\scriptstyle \chi_X r_{(AB)}} \\
{}^{A(^BX)} T_{A,B}(r_A,r_B) & \xrightarrow{{}^{A(^BX)}(\eta_{A,B})} & {}^{A(^BX)}(\chi(A,B) r_{AB}) & \xrightarrow{\sim} & ({}^{A(^BX)}\chi(A,B)) r_{AB} \ ,
\end{array}$$

définissent une pseudo-équivalence de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$ *(voir 12.1.1 et 12.1.2)*

$$\chi(A,B) : \theta(A \otimes B) \longrightarrow \theta(A) \otimes \theta(B) \ .$$

Démonstration. La naturalité en X de la famille T_X est claire; les cohérences à l'unité et au produit dans $\underline{\mathcal{G}}$ sont laissé au lecteur. Montrons que la famille d'isomorphismes χ_X est cohérente au produit et à l'unité de $\underline{\mathcal{G}}$. Pour la cohérence à l'unité, on obtient $\chi_I = 1_{\chi(A,B)}$ ce qui suffit puisque $\underline{\mathcal{G}}$ à une unité stricte. Pour la cohérence au produit, on part du diagramme exprimant la cohérence au produit dans $\underline{\mathcal{G}}$ des morphismes T_X, soit (on note $-\overline{\otimes}-$ pour $T_{A,B}(-,-)$)

$$\begin{array}{ccccccc}
(r_A \overline{\otimes} r_B)^{XY} & & \xrightarrow{T_{XY}} & & & & {}^{A(^B(XY))}(r_A \overline{\otimes} r_B) \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi^\beta} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^\alpha(\Phi^A * \Phi^B)} \\
((r_A \overline{\otimes} r_B)^X)^Y & \xrightarrow{(T_X)^Y} & ({}^{A(^BX)}(r_A \overline{\otimes} r_B))^Y & \xrightarrow{\sim} & {}^{A(^BX)}((r_A \overline{\otimes} r_B)^Y) & \xrightarrow{{}^{A(^BX)}(T_Y)} & {}^{A(^BX)}({}^{A(^BY)}(r_A \overline{\otimes} r_B)) \ .
\end{array}$$

Sur les morphisme T_{XY}, $(T_X)^Y$ et ${}^{A(^BX)}T_Y$, on colle les diagrammes correspondant à la définition des morphismes χ_{XY}, $(\chi_X)^Y$ et ${}^{A(^BX)}(\chi_Y)$. On aboutit à la commutativité du diagramme suivant de $\mathcal{H}_{(AB)}$ (les contraintes d'associativité relatives à $\underline{\mathcal{G}}$ sont omises)

$$\begin{array}{ccccc}
(\chi(A,B)^{AB}(XY)) r_{AB} & & \xrightarrow{\chi_{XY} r_{AB}} & & ({}^{A(^B(XY))}\chi(A,B)) r_{AB} \\
\downarrow{\scriptstyle O_{XY}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \phi^B r_{AB}} \\
(\chi(A,B) r_{AB})^{XY} & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \phi^\beta} & & & & \\
((\chi(A,B) r_{AB})^X)^Y & & & & (^{A(^BX^BY))\chi(A,B)} r_{AB} \\
\downarrow{\scriptstyle (O_X)^Y} & & & & \downarrow{\scriptstyle \phi^A r_{AB}} \\
(\chi(A,B)^{AB X} r_{AB})^Y & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle (O_Y)} & & & & \\
\chi(A,B)^{AB X^{AB Y}} r_{AB} & \xrightarrow{\chi_X \, 1 r_{AB}} & {}^{A(^BX)}\chi(A,B)^{AB Y} r_{AB} & \xrightarrow{1 \, \chi_Y r_{AB}} & {}^{A(^BX)A(^BY)}\chi(A,B) r_{AB} \ .
\end{array}$$

Compte tenu de la cohérence des morphismes O_X (13.10.5), le côté gauche de ce dernier diagramme est le morphisme ${}^{1\phi^{AB}(X,Y)} r_{AB}$ et on obtient ainsi la condition de cohérence au produit. □

Notation 13.14. *Soit (X,Y) un objet de $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$, on note $\Pi_{A,B}(X,Y)$ l'isomorphisme de $\mathcal{H}_{(AB)}$ naturel en (X,Y), défini par la composée dans $\mathcal{H}_{(AB)}$:*

$$\begin{array}{ccccc}
((X^{A}Y)\chi(A,B))r_{AB} & \xleftarrow{\sim} & (X^{A}Y)(\chi(A,B)r_{AB}) & \xleftarrow{(X^{A}Y)(\eta_{A,B})} & (X^{A}Y)T_{A,B}(r_A,\ r_B) \\
{\scriptstyle \Pi_{A,B}(X,Y)}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \sim} \\
T_{A,B}({}^{X}r_A,\ {}^{Y}r_B) & \xrightarrow[\sim]{} & T_{A,B}(({}^{X}r_A)^{Y}, r_B) & \xrightarrow[T_{A,B}(O_Y(X),\,1)]{} & T_{A,B}({}^{(X^{A}Y)}r_A,\ r_B).
\end{array}$$

La cohérence des transformations O_{-} (13.10.5) et leur $\underline{\mathcal{G}}$-équivariance pour les actions à gauche donnent la commutativité des diagrammes de $\mathcal{H}_{(AB)}$:

$$\begin{array}{ccccc}
((X^{A}Y)({}^{A}Z)\chi(A,B))r_{AB} & & \xleftarrow{\phi^{A}(Y,Z)r_{AB}} & & ((X^{A}(YZ))\chi(A,B))r_{AB} \\
{\scriptstyle \Pi_{A,B}(X^{A}Y,Z)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{A,B}(X,YZ)} \\
T_{A,B}({}^{X^{A}Y}r_A,\ {}^{Z}r_B) & \xleftarrow{T_{A,B}(O_Y(X),\,1)} & T_{A,B}(({}^{X}r_A)^{Y},\ {}^{Z}r_B) & \xleftarrow{\sim} & T_{A,B}({}^{X}r_A,\ {}^{YZ}r_B)\ .
\end{array}$$

(13.14.1)

$$\begin{array}{ccc}
{}^{X}\big(((Y^{A}Z)\chi(A,B))r_{AB}\big) & \xleftarrow{\sim} & ((XY^{A}Z)\chi(A,B))r_{AB} \\
{\scriptstyle {}^{X}\Pi_{A,B}(Y,Z)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Pi_{A,B}(XY,Z)} \\
{}^{X}T_{A,B}({}^{Y}r_A,\ {}^{Z}r_B) & \xleftarrow{\sim} & T_{A,B}({}^{XY}r_A,\ {}^{Z}r_B)\ .
\end{array}$$

Lemme 13.15. *Soit $(f,g):(A,B)\longrightarrow(A',B')$ un morphisme de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$. L'isomorphisme de $\underline{\mathcal{G}}$, $\chi(f\otimes g):\chi(A',B')\theta_{f\otimes g}\longrightarrow(\theta_f\ {}^{A}\theta_g)\chi(A,B)$, défini par la composée dans $\mathcal{H}_{(AB)}$,*

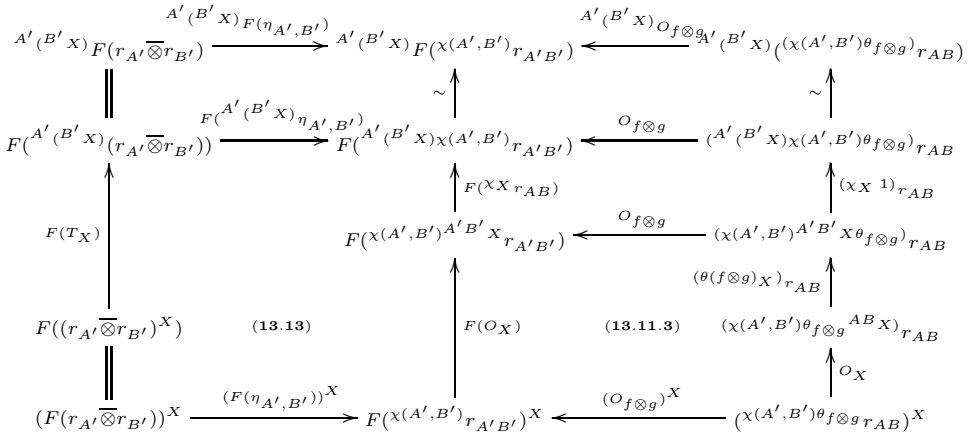
$$\begin{array}{ccccc}
F_{(f\otimes g)^{-1}}T_{A',B'}(r_{A'},r_{B'}) & \xrightarrow{F(\eta_{A',B'})} & F_{(f\otimes g)^{-1}}({}^{\chi(A',B')}r_{A'B'}) & \xrightarrow{O^{-1}_{f\otimes g}} & {}^{\chi(A',B')\theta_{f\otimes g}}r_{(AB)} \\
\| & & & & \downarrow{\scriptstyle \chi(f\otimes g)r_{(AB)}} \\
T_{A,B}(F_{f^{-1}}r_{A'},F_{g^{-1}}r_{B'}) & \xrightarrow{T(\eta_f,\eta_g)} & T_{A,B}({}^{\theta_f}r_A,{}^{\theta_g}r_B) & \xrightarrow{(\Pi_{A,B}(\theta_f,\theta_g))^{-1}} & {}^{(\theta_f\ {}^{A}\theta_g)\chi(A,B)}r_{AB}\ ,
\end{array}$$

est la composante d'une modification de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$ (voir 12.1.1 et 12.1.3)

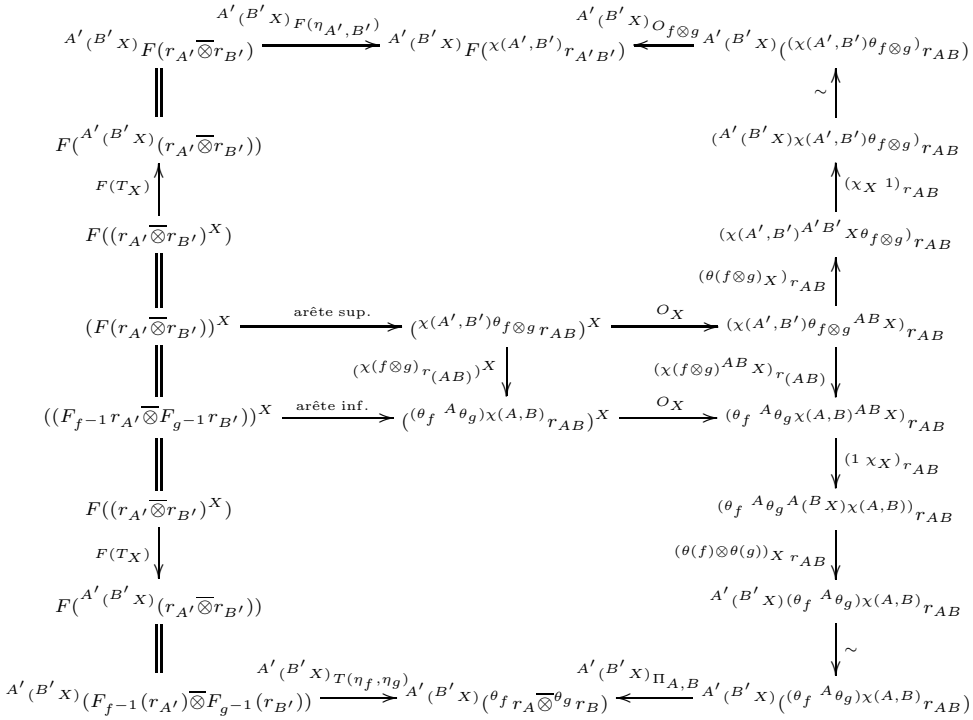
$$\chi(f\otimes g):\chi(A',B').\theta(f\otimes g)\Longrightarrow(\theta(f)\otimes\theta(g)).\chi(A,B).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier la commutativité du diagramme (12.1.4 p. 490). Soit X un objet de $\mathcal{G}$. On commence par faire agir X à droite sur le diagramme de la définition précédente. La suite consiste à ˝transporter˝ l'action à droite de X en une action à gauche de ${}^{A'}({}^{B'}X)$. Pour l'arête supérieure on obtient le diagramme

commutatif suivant (on note $\overline{\otimes}$ pour $T_{-,-}$ et F pour $F_{(f\otimes g)^{-1}}$) :



L'arête inférieure est moins compacte et néccessite un important diagramme qui ne peut être matériellement présenté. Avec les diagrammes obtenus sur les arêtes, inférieure et supérieure, on aboutit au diagramme commutatif suivant :

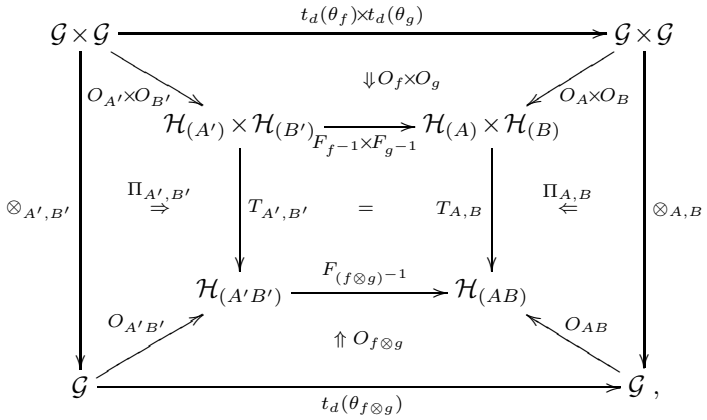


La parcours extérieur donne la commutativité cherchée puisque la composition des arêtes, supérieure gauche et inférieure, est le morphisme ${}^{A'(B'X)}(\chi(f\otimes g)r_{(AB)})$. □

Pour poursuivre la démonstration de (13.12), remarquons à présent que les isomorphismes $\Pi_{A,B}(X,Y)$ de (13.14), définissent une famille d'isomorphismes naturels de **Cat**, (A,B) objet de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}\times\mathcal{G} & \xrightarrow{t_d(\chi(A,B))\circ\otimes\circ(1\times\theta(A))} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle O_A\times O_B}\downarrow & \Downarrow \Pi_{A,B} & \downarrow{\scriptstyle O_{AB}} \\ \mathcal{H}_{(A)}\times\mathcal{H}_{(B)} & \xrightarrow[T_{A,B}]{} & \mathcal{H}_{(AB)}\ . \end{array} \qquad (13.15.1)$$

Pour un morphisme $(f,g):(A,B)\longrightarrow(A',B')$ de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, le collage dans **Cat**, [on note $\otimes_{A,B}$ pour $t_d(\chi(A,B))\circ\otimes\circ(1\times\theta(A))$]



définit, puisque le foncteur $O_{AB}:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}_{(AB)}$ est une équivalence, un isomorphisme naturel $\otimes_{f,g}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}\times\mathcal{G} & \xrightarrow{t_d(\theta_f)\times t_d(\theta_g)} & \mathcal{G}\times\mathcal{G} \\ {\scriptstyle \otimes_{A',B'}}\downarrow & \Downarrow \otimes_{f,g} & \downarrow{\scriptstyle \otimes_{A,B}} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow[t_d(\theta_{f\otimes g})]{} & \mathcal{G}. \end{array} \qquad (13.15.2)$$

Son expression sur l'objet (X,Y) de $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ est le morphisme de $\mathcal{G}$:

$$\otimes_{f,g}(X,Y):[(X\theta_f)^A(Y\theta_g)]\chi(A,B)\longrightarrow[(X^{A'}Y)\chi(A',B')]\theta_{f\otimes g}\ .$$

Lemme 13.16. *La famille de foncteurs*

$$\otimes_{A,B} := t_d(\chi(A,B)) \circ \otimes \circ (1 \times \theta(A)) : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$

et la famille d'isomorphismes naturels

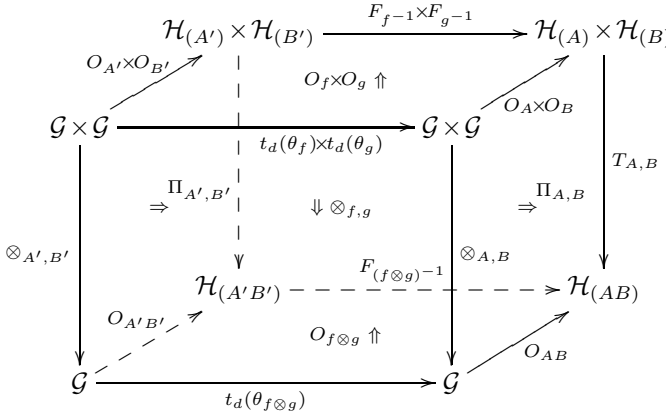
$$\otimes_{f,g} : \otimes_{A,B} \circ (t_d(\theta_f) \times t_d(\theta_g)) \Longrightarrow t_d(\theta_{f \otimes g}) \circ \otimes_{A',B'},$$

sont les composantes d'une pseudo-équivalence de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})$ *(voir* **PS2***, p. 496). De plus les isomorphismes naturels définie en (13.15.1)*

$$\Pi_{-,-} : O_- \circ \otimes_{-,-} \Longrightarrow T_{-,-} \circ (O_- \times O_-),$$

sont les composantes d'une modification inversible Π *de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})$.

Démonstration. Le collage dans **Cat**, via les faces latérales $\Pi_{-,-}$, des cubes



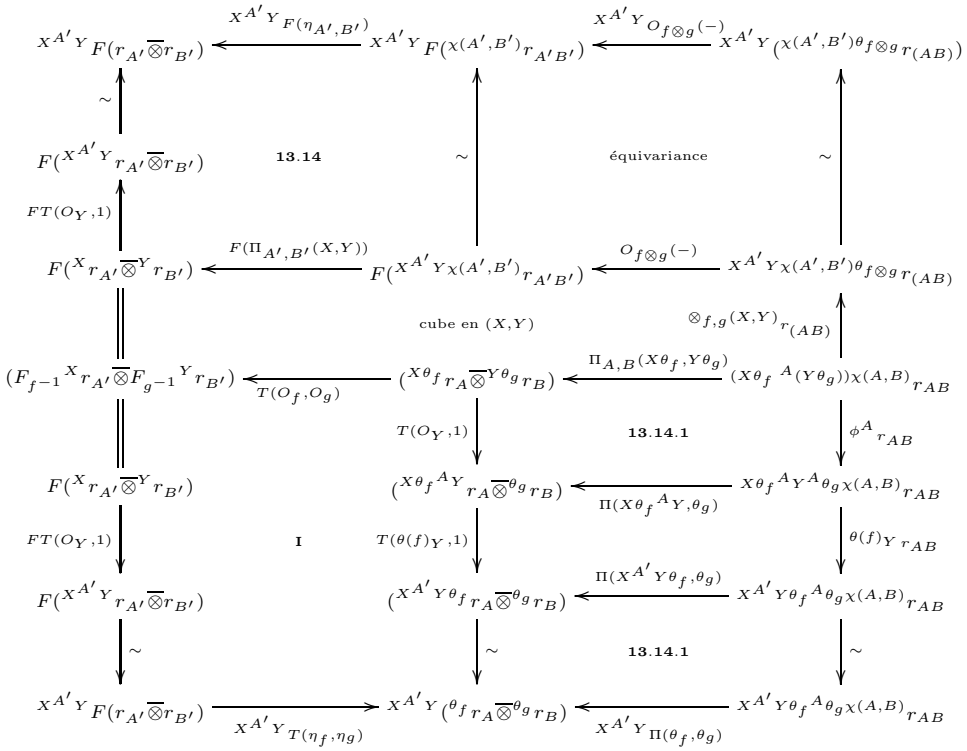
(13.16.1)

et la cohérence de la pseudo-équivalence (13.10.8) ainsi que celle du pseudo-foncteur $\underline{G}_p$ donnent la cohérence à la composition des isomorphismes $\otimes_{f,g}$. Les unités sont strictes. La modification Π en découle. □

Lemme 13.17. *Pour tout objet* (X,Y) *de* $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$*, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
[(X\theta_f)^A (Y\theta_g)]\chi(A,B) & \xrightarrow{\otimes_{f,g}(X,Y)} & [(X^{A'}Y)\chi(A',B')]\theta_{f\otimes g} \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi^A} & & \downarrow{\scriptstyle \chi(f\otimes g)} \\
X\theta_f{}^A Y^A \theta_g \chi(A,B) & \xrightarrow[\theta(f)_Y]{} & X^{A'}Y\theta_f{}^A\theta_g\chi(A,B)
\end{array}$$

Démonstration. On utilise le diagramme obtenu en (X,Y) avec le cube précédent. Cette démonstration se résume avec le diagramme qui suit où la commutativité de $\mathbf{I}$ donnée par (13.10.8) et (13.11.1) est laissée au soin du lecteur. Le parcours extérieur donne le résultat. Il faut comparer ce dernier avec la définition des morphismes $t_{f\otimes g}(X,Y)$ donnée en (12.1.21, p. 496).



□

Lemme 13.18. *La famille de pseudo-équivalences de* $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$ *du lemme (13.13)*

$$\chi(A,B) : \theta(A \otimes B) \longrightarrow \theta(A) \otimes \theta(B)$$

(A,B) *objet de* $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$*, et la famille de modifications du lemme (13.15)*

$$\chi(f \otimes g) : \chi(A',B').\theta(f \otimes g) \Longrightarrow (\theta(f) \otimes \theta(g)).\chi(A,B)$$

(f,g) *morphisme de* $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$*, sont les composantes d'une pseudo-équivalence de* $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K} \times \mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$ *(voir* **C2***, pages 490-491).*

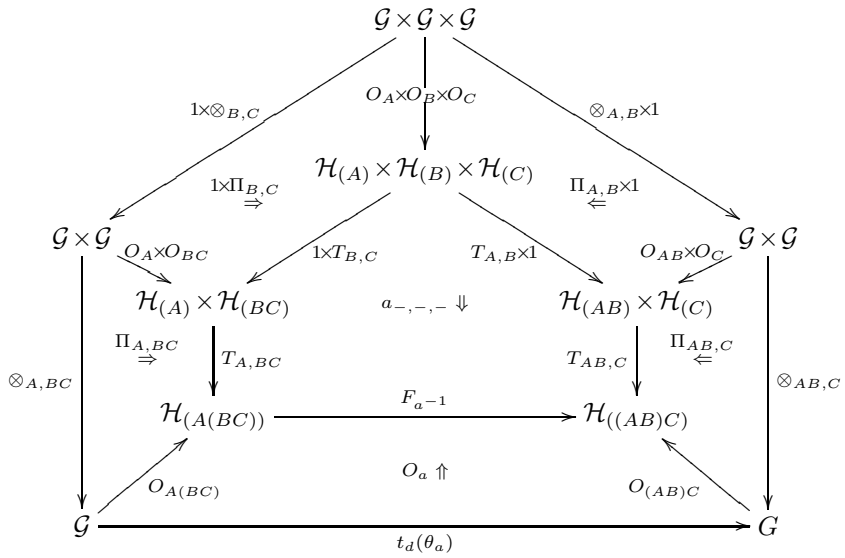
Démonstration. La cohérence aux unités (deuxième diagramme de 12.1.6 p. 491) est claire puisque $\theta(1_A) = 1_{\theta(A)}$ et $\chi(1_A \otimes 1_B) = 1_{\chi(A,B)}$. Il reste à montrer la cohérence à la composition de $\chi(f \otimes g)$ (12.1.6). Le lemme (13.17) donne une définition pour $\otimes_{f,g}$ du type (12.1.19 p. 496). Les cohérences de $\chi(f \otimes g)$ et de $\otimes_{f,g}$ sont donc équivalentes et les isomorphismes structuraux $\otimes_{f,g}$ sont cohérents par le lemme (13.16). □

Pour pousuivre la preuve de (13.12), il faut encore établir les points **C3**, **C4** (p. 491), **C5** (p. 493) et les deux conditions de cohérences **CA1-CA2** (p. 494). La donnée **C3** est facile avec les choix du lemme (13.11). Comme $\theta(I) = 1_{\underline{\mathcal{G}}}$ et $i_I = 1_I$,

on pose

$$\iota = 1_{1_{\underline{\mathcal{G}}}} \tag{13.18.1}$$

pour la pseudo-équivalence $\iota : \theta(I) \longrightarrow 1_{\underline{\mathcal{G}}}$. Etablissons à présent la modification inversible **C4**. Cette modification s'obtient de la même façon que la modification $\chi(f \otimes g)$, les diagrammes sont ici seulement plus importants et ne peuvent être raisonablement résumés. Pour un objet (A, B, C) de $\mathcal{K}^3$, le collage dans **Cat** obtenu avec la cohérence à l'associativité du pseudo-foncteur $\underline{G}_p$



(13.18.2)

définit un isomorphisme naturel

$$\alpha_{A,B,C} : \otimes_{AB,C} \circ (\otimes_{A,B} \times 1) \Longrightarrow t_d(\theta_a) \circ \otimes_{A,BC} \circ (1 \times \otimes_{B,C}), \tag{13.18.3}$$

composante en (A, B, C) d'une modification inversible de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}^{op}, \mathbf{Cat})$. Comme pour le lemme (13.17), on montre, en utilisant en particulier (13.14.1), que pour tout objet (X, Y, Z) de $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} [((X^A Y)\chi(A,B))^{AB} Z]\chi(AB,C) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}(X,Y,Z)} & ((X^A[(Y^B Z)\chi(B,C)])\chi(A,BC))\theta_a \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_Z} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi^{-1}\circ\Phi^{-1}} \\ X^A Y^A({}^B Z)\chi(A,B)\chi(AB,C) & \xrightarrow[1\alpha_{A,B,C}(I,I,I)]{} & X^A Y^A({}^B Z)^A \chi(B,C)\chi(A,BC)\theta_a \end{array} \tag{13.18.4}$$

Cette commutativité est à comparer avec la définition donnée en (12.1.24 p. 497). On obtient **C4** avec le lemme suivant :

Lemme 13.19. *les isomorphismes de* $\underline{\mathcal{G}}$

$$\omega_{A,B,C} = \alpha_{A,B,C}(I,I,I) : \chi(A,B)\chi(AB,C) \longrightarrow [{}^A\chi(B,C)\chi(A,BC)]\theta_a \ ,$$

(A,B,C) objet de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, sont les composantes d'une modification inversible

$$\omega : a.((\chi^{\theta}\otimes 1).\chi^{\theta}) \Longrightarrow ((1\otimes\chi^{\theta}).\chi^{\theta}).\theta a$$

de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K},\ \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$.

Démonstration. Il faut d'abord vérifier que pour tout objet (A,B,C) de $\mathcal{K}^3$, l'isomorphisme $\omega_{A,B,C}$ est la composante d'une modification (12.1.10) de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$). Pour cela, il suffit d'obtenir la commutativité du diagramme suivant (12.1.11). On obtient cette commutativité comme celle montrée pour le lemme (13.15). On part du diagramme obtenu à partir de la définition de $\omega_{A,B,C}$. On fait opérer un objet X de $\underline{\mathcal{G}}$ à droite sur ce diagramme, la suite consiste comme en (13.15) à transporter cette action en une action à gauche de ${}^{A}({}^{B}({}^{C}X))$ et on obtient la commutativité cherchée. Pour terminer cette démonstration, il reste à montrer que cette famille de modifications est cohérente au morphisme (12.1.12, p. 492), correspondant à la commutativité du diagramme (12.1.13). On part de la cohérence au morphisme de la modification α définie en (13.18.3). Pour un morphisme $(f,g,h) : (A,B,C)\longrightarrow(D,E,F)$ de $\mathcal{K}^3$, cette cohérence exprimée pour l'objet (X,Y,Z) de $\mathcal{K}^3$ donne la commutativité du diagramme de $\underline{\mathcal{G}}$ suivant (voir 12.1.25) :

$$\begin{array}{ccc}
[(((X\theta_f)^{A}(Y\theta_g))\chi(A,B))^{AB}(Z\theta_h)]\chi(AB,C) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C}(X\theta_f,Y\theta_g,Z\theta_h)} & X\theta_f{}^{A}[Y\theta_g{}^{B}(Z\theta_h)\chi(B,C)]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \otimes_{f,g}(X,Y)} & & \downarrow{\scriptstyle {}^{A}\otimes_{g,h}(Y,Z)} \\
X^{D}Y\chi(D,E)\theta_{f\otimes g}{}^{AB}(Z\theta_h)\chi(AB,C) & & X\theta_f{}^{A}[(Y^{E}Z)\chi(E,F)\theta_{g\otimes h}]\chi(A,BC)\theta_a \\
\downarrow{\scriptstyle \otimes_{f\otimes g,h}(XY,Z)} & & \downarrow{\scriptstyle C\circ C^{-1}\circ\otimes_{f,g\otimes h}(X,YZ)} \\
X^{D}Y\chi(D,E)^{DE}Z\chi(DE,F)\theta_{(f\otimes g)\otimes h} & \xrightarrow[\alpha_{D,E,F}(X,Y,Z)\ 1]{} & (X^{D}[Y^{E}Z\chi(E,F)]\chi(D,EF)\theta_a)\theta_{(f\otimes g)\otimes h}.
\end{array}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que les choix pris pour le lemme (13.11) donnent $\otimes_{-,-}(I,I)=\chi(-\otimes-)^{-1}$ (13.16-13.17), le diagramme précédent exprimé à l'objet (I,I,I) de $\mathcal{K}^3$ fournit la commutativité cherchée (12.1.13). □

Passons à présent aux données **C5** (p. 493). les choix du lemme (13.11) nous ont permis de prendre $\iota = 1_{1_{\underline{\mathcal{G}}}}$ (13.18.1). Nous allons voir à présent que modulo de nouveaux choix, nous obtenons des identités pour les modifications de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K};\ \mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}}))$ (**C5**) :

$$\gamma : g_{\theta(-)}.(1_{1_{\underline{\mathcal{G}}}}\otimes 1_{\theta(-)}).\chi^{\theta}(I,-)\Longrightarrow\theta(g_-) : \theta(I-)\longrightarrow\theta(-)$$

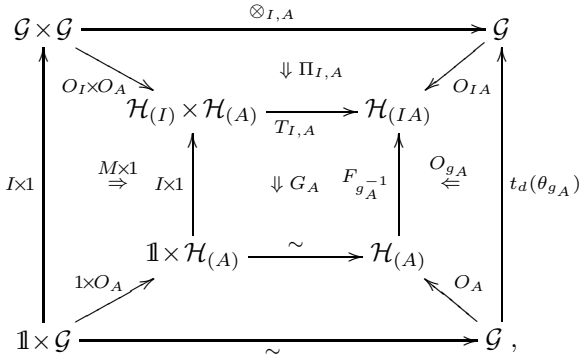
$$\delta : d_{\theta(-)}\Longrightarrow(1_{\theta(-)}\otimes 1_{1_{\underline{\mathcal{G}}}}).\chi^{\theta}(-,I).\theta(d_-) : \theta(-)1_G\longrightarrow\theta(-).$$

Nous ne traiterons que le cas de la modification γ, le cas de la modification δ étant similaire. La modification M de (13.12.2) est définie par son unique composante :

$$M : {}^{I}r_I \xrightarrow{\Phi^{I}_{o}(r_I)} r_I\ , \tag{13.19.1}$$

où Φ^{I}_{o} est la contrainte d'unité de l'action à gauche $\alpha_I : \underline{\mathcal{G}}\longrightarrow\mathcal{E}q(\mathcal{H}_{(I)})$ (13.9.1). Pour un objet A de $\mathcal{K}$, le collage dans **Cat** obtenu à partir de l'isomorphisme

$G_A : T_{I,A}(\tilde{I}, -) \Longrightarrow F_{g_A^{-1}}$ donné par le pseudo-fonteur $\underline{G}_p$:



définit un isomorphisme naturel

$$\Gamma_A : \otimes_{I,A}(I, -) \Longrightarrow t_d(\theta_{g_A}), \tag{13.19.2}$$

composante en A d'une modification inversible Γ de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{K}^{op},\ \mathbf{Cat})$.
L'expression en un objet X de $\underline{\mathcal{G}}$ de ce dernier isomorphisme est donnée par la composée dans $\mathcal{H}_{(IA)}$ (le morphisme $g_{\sigma_A} : I\sigma_A \longrightarrow \sigma_A$ est la contrainte d'unité dans $\underline{\mathcal{H}}$) :

$$\begin{array}{ccc}
{}^X\chi_{(I,A)}r_{IA} & \overset{{}^X\Gamma_A(X)r_{IA}}{- - - - - - - - - - - - \succ} & {}^X\theta_{g_A}r_{IA} \\
\sim\downarrow & & \sim\downarrow \\
{}^X\big(\chi_{(I,A)}r_{IA}\big) & & {}^X\big(\theta_{g_A}r_{IA}\big) \\
{}^X(\eta_{I,A})\uparrow & & \uparrow{}^X(\eta_{g_A}) \\
{}^XT_{I,A}(r_I,\ r_A) & \xrightarrow{\ {}^X(g_{\sigma_A})\ } & {}^XF_{g_A^{-1}}(r_A).
\end{array} \tag{13.19.3}$$

On suppose à présent pris le choix suivant pour l'isomorphime $\eta_{I,A}$ (voir le lemme (13.13)) :

$$\eta_{I,A} = \eta_{g_A} \circ g_{\sigma_A}. \tag{13.19.4}$$

On a donc $\chi(I, A) = \theta_{g_A}$. On pose pour la composante en A de la modification γ cherchée :

$$\gamma_A : \chi(I, A) \xrightarrow{1} \theta_{g_A}\ . \tag{13.19.5}$$

Pour terminer, il faut vérifier que l'on est bien en présence des composantes d'une modification de $\mathbf{Bieq}_u(\underline{\mathcal{G}})$ cohérente à $\underline{\mathcal{K}}$. Il faut obtenir la commutativité du diagramme suivant (12.1.14 p. 493) et du premier diagramme de (12.1.16). Cette dernière s'obtient avec la cohérence au morphisme de la modification Γ (13.19.2) (voir 12.1.28 p. 500) en prenant $X = I$. La première commutativité correspond dans le cas présent à l'égalité pour tout objet X de $\underline{\mathcal{G}}$,

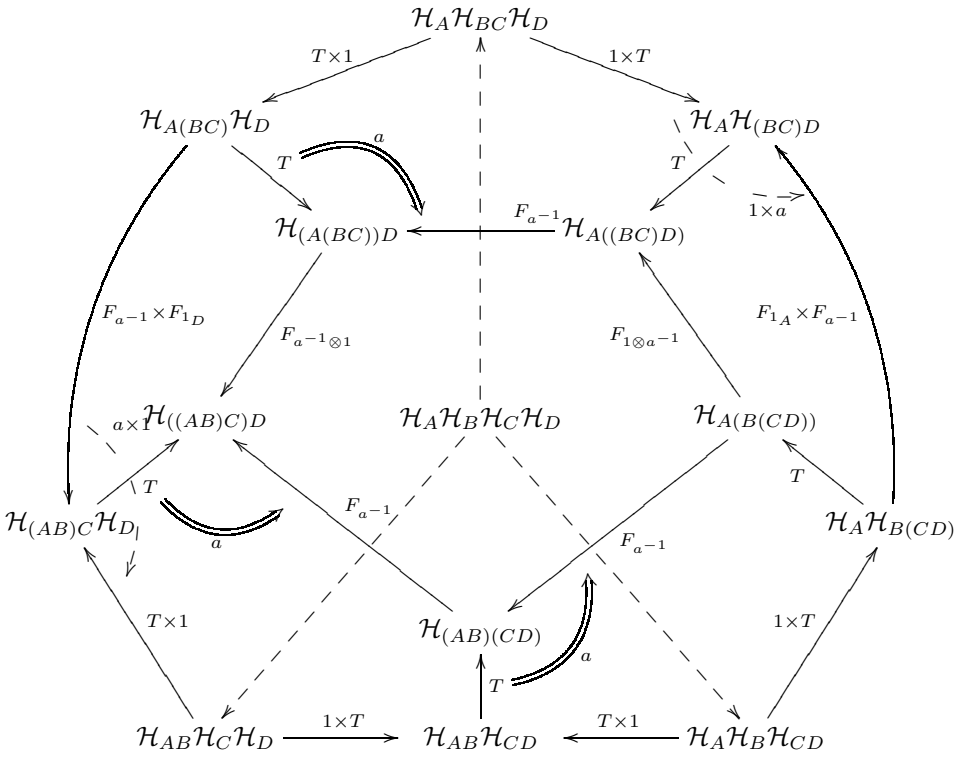
$$\begin{array}{ccc} \chi(I,A)^{IA}X & \xrightarrow{\chi_X} & {}^A X\chi(I,A) \\ \| & & \| \\ \theta_{g_A}{}^{IA}X & \xrightarrow{\theta(g_A)_X} & {}^A X\theta_{g_A}. \end{array}$$

Avec la définition (13.11.1) de $\theta(g_A)_X$ et la définition (13.13) de χ_X, cette égalité équivaut à la commutativité du diagramme de $\mathcal{H}_{(IA)}$:

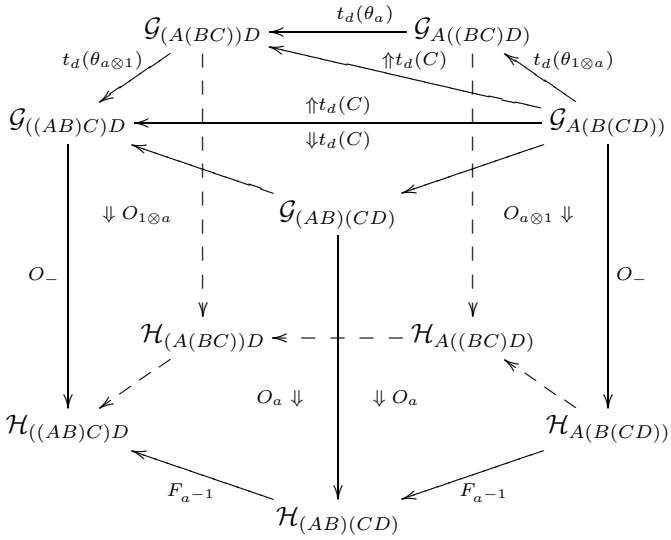
$$\begin{array}{ccc} T_{I,A}(r_I,r_A)^X & \xrightarrow{T_X} & {}^A X T_{I,A}(r_I,r_A) \\ {\scriptstyle (g_{\sigma_A})^X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}^A X g_{\sigma_A}} \\ F_{g_A^{-1}}(r_A)^X & \xrightarrow{\eta_X} & {}^A X F_{g_A^{-1}}(r_A), \end{array}$$

dont la vérification est laissée au lecteur. □

Pour clore la construction de cet objet $\underline{\theta}$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \overline{\mathbf{Bieq}_u}(\underline{\mathcal{G}}))$ de la proposition (13.12), il reste a obtenir les deux conditions de cohérence **CA1-CA2** (p. 494). Nous établirons seulement **CA1**, le cas de **CA2** étant similaire. Comme on s'y attend, on part de la condition de cohérence de la modification de cohérence à l'associativité, donnée par le pseudo-foncteur monoïdal $\underline{G}_p$ c'est-à-dire de la commutativité dans **Cat** du polyèdre :

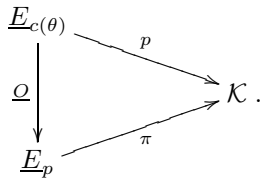


pour tous objets (A, B, C, D) de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K}$. Ensuite, on colle sur les cinq faces de ce polyèdre où intervient une cohérence à l'associativité de $T_{-,-}$, les polyèdres (13.18.2 p. 539) relatifs à la définition de la modification α (13.18.3). Sur les deux faces carrées visibles, on colle les cubes du type (13.16.1) obtenus avec la définition des isomorphismes structuraux $\otimes_{f,g}$ de (13.15.2). Sur le carré arrière, (ou triangle) on colle un cube commutatif obtenu facilement avec la définition des isomorphismes $\Pi_{-,-}$ (13.15.1). Enfin, on colle sur le pentagone de la face avant le polyèdre commutatif suivant, obtenu avec la cohérence à la composition de la pseudo-équivalence (13.10.10 p. 529),



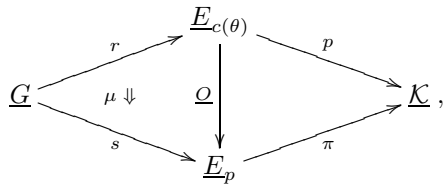
Les faces des différents polyèdres collés coïncidant, le polyèdre extérieur résultant de ce collage est commutatif. Ce polyèdre exprime la cohérence de la modification de cohérence à l'associativité α (13.18.3). Cette cohérence s'explicite comme en (12.1.29 p. 501) et donne avec (13.18.4) ou en prenant $X = Y = Z = I$ la condition **CA1** (12.1.17) de cohérence sur ω cherchée. De la même manière pour **CA2**, on montre la cohérence des modifications α (13.18.3), Γ et Δ (13.19.2) puis celle des modifications ω (13.19), γ et δ (qui sont ici des unités 13.19.5).

On est à présent en mesure de terminer la démonstration de l'essentiel surjectivité (13.12). Avec θ (13.11.2), χ (13.18), $\iota = 1$ (13.18.1), ω (13.19), $\gamma = 1$ et $\delta = 1$ (13.19.5), on dispose d'un objet $\underline{\theta} = (\theta, \chi, 1, \omega, 1, 1)$ de $\mathbf{Bimon}(\underline{\mathcal{K}}, \underline{\mathbf{Bieq_u}}(\underline{\mathcal{G}}))$. L'image $\underline{G}(\underline{\theta})$ de cet objet par l'homomorphisme (12.0.2 p. 489) est le pseudo-foncteur monoïdal construit durant cette preuve : (13.16), (13.12), (13.18.3) (13.18.4), (13.19.2). Par construction, on a une équivalence dans $\mathbf{Bimon}_l(\underline{\mathcal{K}^{op}}, \mathbf{Cat})$ $(O, \Pi, M) : \underline{G}(\underline{\theta}) \longrightarrow \underline{G}_p$ entre ce pseudo-foncteur monoïdal et celui fourni par l'extension (r, λ, p) de (13.8.1) (les modifications Π et M sont respectivement données par (13.16) et (13.19.1)). L'image de cette équivalence par la biéquivalence (6.3.2 p. 466) donne une *gr*-équivalence de $\underline{\mathcal{K}}$-fibrations monoïdales :

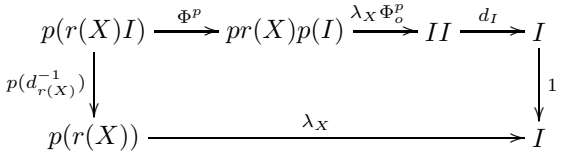


munissant d'une structure monoïdale l'équivalence (13.11.5). Enfin, l'extension $\underline{F}(\underline{\theta})$ (12.1.30), image de $\underline{\theta}$ par l'homomorphisme de classification (12.0.1) et la

gr-équivalence précédente fournissent le morphisme d'extensions (fibrées) cherché $(\mu, \underline{O})$



L'image par $\underline{O}$ d'un objet (X, A) de $\underline{E}_{c(\theta)}$ est l'objet $(O_A(X), A) = ({}^X r_A, A)$ de $\underline{E}_p$. En un objet X de $\underline{\mathcal{G}}$, la composante μ_X est l'isomorphisme de $\mathcal{H}_{(I)}$, $d^{-1}_{r(X)}$: $({}^X r_I, I) \longrightarrow ((r(X), \lambda_X), I)$, donné par la commutativité dans $\underline{\mathcal{K}}$:



Ceci termine la preuve de (13.12) et donc de la biessentielle surjectivité (13.8) et du théorème de classification. □

References

[**1**] J. BENABOU, *Introduction to bicategories*, L. Notes in Math., Vol. 47, Springer Verlag, 1972, p. 1-77.

[**2**] L. BREEN, *Bitorseurs et cohomologie non-abélienne*, Progress in Mathematics, Vol. 86, 1990, p. 401-476.

[**3**] L. BREEN, *Théorie de Schreier supérieure*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Vol. 25, 1992, p. 465-514.

[**4**] D. BOURN et E. M. VITALE, *Extensions of symmetric cat-groups*, Homology, Homotopy and Applications, Vol. 4, 2002, p. 103-162.

[**5**] M. BULLEJOS et A. M. CEGARRA, *On the Geometry of 2-Categories and their Classifying Spaces*, Preprint.

[**6**] P. CARRASCO et A. M. CEGARRA, *(Braided) Tensor structures on homotopy groupoids and nerves of (braided) categorical groups*, Communications in Algebra, Vol. 24, 1996, p. 3995-4058.

[**7**] P. CARRASCO et A. M. CEGARRA, *Schreier theory for central extensions of categorical groups*, Communications in Algebra, Vol. 24, 1996, p. 4059-4112.

[**8**] P. CARRASCO, A. R. GARZON et J. G. MIRANDA, *Schreier theory for singular extensions of categorical groups and homotopy classification*, Communications in Algebra, Vol. 28, 2000, p. 2585-2613.

[**9**] P. CARRASCO, A. R. GARZON et E. VITALE, *Obstruction theory for extensions of categorical groups*, Preprint.

[**10**] A. M. CEGARRA et A. R. GARZON, *Homotopy classification of categorical torsors*, Applied Categorical Structures, Vol. 9, 2001, p. 465-496.

[**11**] D. CONDUCHÉ, *Modules croisés généralisés de longueur 2*, J. Pure Appl. Algebra, Vol. 34, 1984, p. 155-178.

[**12**] B. DAY et R. STREET, *Monoidal Bicategories and Hopf Algebroids*, Advances in Math., Vol. 129, 1997, p. 99-157.

[**13**] P. DEDECKER, *Cohomologie à coefficients non abélien*, C.R. Acad. Sc. Paris, 287, 1958, p. 1160-1162.

[**14**] J. W. DUSKIN, *Simplicial Matrices and the Nerves of Weak n-Categories I : Nerves of Bicategories*, Theory and Applications of Categories, Vol. 7, N^o 10, 2002, p. 198-308.

[**15**] J. W. DUSKIN, *Simplicial Matrices and the Nerves of Weak n-Categories II : Nerves of Morphisms of Bicategories*, Preprint.

[**16**] S. EILENBERG et S. MAC LANE, *Cohomologiy theory in abstract group I*, Ann. of Math., Vol. 47, 1948, p. 51-78.

[**17**] R. GORDON, A. POWER et R. STREET, *Coherence for tricategories*, Memoirs Amer. Soc., Vol. 117, 1995.

[**18**] J. W. GRAY, *Formal Category Theory : Adjointness for 2-Categories*, L. Notes in Math., Vol. 391, Springer Verlag, 1974.

[**19**] A. GROTHENDIECK, *Catégories Fibrées et descente*, (SGA I) exposé VI, L. Notes in Math., Vol. 224, Springer Verlag, 1971, p. 145-194.

[**20**] A. GROTHENDIECK, *Biextensions de faisceaux de groupes*, exposé VII de SGA7I, L. Notes in Math., Vol. 288, Springer Verlag, 1972.

[**21**] D. F. HOLT, *An interpretation of the cohomology groups $H^n(G, M)$*, J. Algebra, Vol. 60, 1979, p. 307-320.

[**22**] A. JOYAL et R. STREET, *Braided tensor categories*, Advances in Math., Vol. 102, 1993, p. 20-78.

[**23**] S. KASANGIAN et E. M. VITALE, *Factorization systems for symmetric cat-groups*, Theory and Applications of Categories, Vol. 7, 2000, p. 47-70.

[**24**] G. M. KELLY et R. STREET, *Review of the elements of 2-categories*, L. Notes in Math., Vol. 420, Springer Verlag, 1974, p. 75-103.

[**25**] T. LEINSTER, *A survey of definitions of n-category*, Theory and Applications of Categories, Vol. 10, 2002, p. 1-70.

[**26**] S. MAC LANE, *Natural associativity and commutativity*, Rice Univ. Stud., Vol. 43, 1963, p. 28-46.

[**27**] S. MAC LANE, *Homology*, col. Grundlehren, Springer Verlag, 114, 4 édit., 1994.

[**28**] S. MAC LANE, R. PARE, *Coherence for bicategories and indexed categories*, J. Pure Appl. Algebra, Vol. 37, 1985, p. 59-80.

[**29**] J. L. LODAY, *Spaces with finitely many nontrivial homotopy groups*, J. Pure Appl. Algebra, Vol. 24, 1985, p. 59-80.

[**30**] H. J. MARCUM, *Homotopy equivalences in 2-categories*, L. Notes in Math., Vol. 1425, Springer Verlag, 1979, p. 179-202.

[**31**] I. MOERDIJK, *Lecture on 2-dimensional groupoïds*, Sem. Math. Pure., Uni. Cath. de Louvain, rapport 175, 1990.

[**32**] A. ROUSSEAU, *Extensions de gr-catégories*, Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2000.

[**33**] N. SAAVEDRA RIVANO, *Catégories tannakiennes*, L. Notes in Math., Vol. 265, Springer Verlag, 1972.

[**34**] O. SCHREIER, *Uber die Erweiterung von Gruppen I*, Monatsh. Math. Phys., Vol. 34, 1926, p. 165-180.

[**35**] Hoang Xuan SINH, *Gr-catégorie*, thèse de doctorat d'état, Université Paris VII, 1975.

[**36**] J.D. STASHEFF, Homotopy associativity of H-spaces. I, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 108, 1963, p. 275-292.

[**37**] R. STREET, *Fibrations in bicategories*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol. 21, 1980, p. 20-78.

This article may be accessed via WWW at http://www.rmi.acnet.ge/hha/
or by anonymous ftp at
ftp://ftp.rmi.acnet.ge/pub/hha/volumes/2003/n1a19/v5n1a19.(dvi,ps,pdf)

Alain Rousseau `rousseau@math.univ-paris13.fr`

Département de Mathématiques
Université Paris 13, Institut Galilée
93430 Villetaneuse, France.