IJMMS 2004:22, 1183–1187
PII. S0161171204013006
http://ijmms.hindawi.com

SUR LA CONTINUITÉ AUTOMATIQUE DES ÉPIMORPHISMES DANS LES $\star$-ALGÈBRES DE BANACH

L. OUKHTITE, A. TAJMOUATI, and Y. TIDLI

Reçu le 26 avril 2001 et en forme révisée le 18 janvier 2002

Nous étudions les problèmes de continuité automatique dans des algèbres de Banach avec involutions. Nous obtenons aussi des nouveoux résultats concernant $\star$-idéals des $\star$-algèbres.

Classification 2000 des Sujets Mathématiques: 46J10, 46K05.

1. Préliminaires. La majorité des définitions et des résultats qui sont rappelés ici se trouvent dans [1]. Les algèbres considérées sont supposées sur $\mathbb{C}$, unitaires, non nécessairement commutatives.

Une involution sur une algèbre A est une application $\star : A \to A$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$(x^\star)^\star = x, \quad (x+y)^\star = x^\star + y^\star, \quad (xy)^\star = y^\star x^\star, \quad (\lambda x)^\star = \overline{\lambda} x^\star, \\ \forall x, y \in A, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Munie de l'involution $\star$, A est dite une $\star$-algèbre. Une involution $\star$ est dite anisotrope si pour tout a dans A on a : $a^\star a = 0 \Rightarrow a = 0$. Un idéal I d'une $\star$-algèbre est dit $\star$-idéal si $I^\star \subset I$ (et alors $I^\star = I$). Il en résulte alors que tout $\star$-idéal est bilatère. De plus, si les seuls $\star$-idéaux de A contenu dans I sont (0) et I alors on dit que I est $\star$-minimal. Remarquons que si I est un $\star$-idéal non nul de A, alors $\star$ induit une involution sur A/I, notée aussi $\star$, définie par : $(a+I)^\star = a^\star + I$. Un $\star$-idéal $\mathcal{M}$ est dit $\star$-maximal si les seuls $\star$-idéaux contenant $\mathcal{M}$ sont A et $\mathcal{M}$. Une algèbre A est dite simple si les seuls idéaux bilatères de A sont (0) et A. Dans le cas où A admet une involution $\star$, on dira que A est $\star$-simple si les seules $\star$-idéaux de A sont (0) et A.

Remarquons que si A est une algèbre simple munie d'une involution $\star$, alors A est $\star$-simple, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple 1.1. Soit A une algèbre simple et A° l'algèbre opposée de A. Considérons alors l'algèbre $B = A \times A^\circ$, munie de l'involution d'échange $\star$ définie par : $\star(x,y) = (y,x)$. Alors une simple vérification montre que B est une algèbre $\star$-simple mais n'est pas simple.

Un idéal P de A est $\star$-premier (resp. $\star$-semi-premier) si pour deux $\star$-idéaux I et J de A tels que $IJ \subseteq P$ (resp. $I^2 \subseteq P$) alors $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$ (resp. $I \subseteq P$). En outre, si (0) est $\star$-premier (resp. $\star$-semi-premier) on dit que A est $\star$-première (resp. $\star$-semi-première).

Soit I un idéal minimal à gauche d'une algèbre semi-première A, alors il existe un idempotent minimal $e \in A$ tel que $I = Ae$.

Rappelons que le radical de *Jacobson*, $\mathrm{Rad}(A)$, d'une algèbre A est définit comme étant l'intersection de tous les idéaux à *gauche* maximaux de A. Si de plus A est une $\star$-algèbre, alors le $\star$-radical de A, noté $\mathrm{Rad}_\star(A)$, est l'intersection de tous les idéaux $\star$-maximaux de A. En outre, si $\mathrm{Rad}_\star(A) = (0)$ alors A est dite $\star$-semi-simple.

Soit T une application linéaire d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y. Alors l'espace séparateur $\sigma(T)$ de T est un sous-espace de Y défini par :

$$\sigma(T) = \Big\{ y \in Y \mid \exists (x_n)_n \in X : x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ et } T(X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} y \Big\}. \tag{1.2}$$

Il est bien connu que T est continue si, et seulement si, $\sigma(T) = (0)$ [2]. En outre, l'espace séparateur d'un épimorphisme d'une algèbre de Banach A dans une algèbre de Banach B est un idéal bilatère fermé [2]. De plus, si θ est un épimorphisme d'une algèbre de Banach A sur une algèbre de Banach B et si $b \in \sigma(\theta)$, alors $o \in \mathrm{Sp}(b)$ [2, théorème 6-16].

2. La continuité automatique dans une algèbre de Banach $\star$-simple. Nous commençons par donner quelques propositions préliminaires utiles pour la suite.

Proposition 2.1. *Soit I un idéal $\star$-minimal d'une $\star$-algèbre A. Si I n'est pas minimal et si J est un idéal inclu strictement dans I, alors $I = J \oplus J^\star$, où J et $J^\star$ sont des idéaux minimaux de A. Si de plus $I^2 \neq 0$, alors J et $J^\star$ sont les seuls idéaux non nuls contenu strictement dans I.*

Démonstration. Supposons que I n'est pas minimal et soit J un idéal non nul de A contenu strictement dans I. On a $J + J^\star$ et $J \cap J^\star$ sont deux $\star$-idéaux de A contenus dans I. Or I est un idéal $\star$-minimal, donc $J \cap J^\star = (0)$ et $J + J^\star = I$. Par conséquence, $I = J \oplus J^\star$. Soit Y un idéal non nul de A tel que $Y \subset J$. Un raisonnement analogue montre que : $I = Y \oplus Y^\star$. De plus, si $k \in J$ alors $k = y_1 + y_2$, où $y_1 \in Y$ et $y_2 \in Y^\star$. Par suite $k - y_1 = y_2 \in J \cap J^\star = (0)$, donc $k \in Y$ de sorte que $J = Y$. Par conséquent, J (resp. $J^\star$) est un idéal minimal de A.

Supposons maintenant que $I^2 \neq 0$ et soit B un idéal non nul de A tel que $B \subset I$, $B \neq J$ et $B \neq J^\star$. Une simple vérification montre que B est un idéal minimal de A. Par conséquence $BJ = (0)$, de même on trouve que $B^\star J = BJ^\star = B^\star J^\star = (0)$. D'où $I^2 = (B \oplus B^\star)(J \oplus J^\star) = (0)$, ce qui contredit le fait que $I^2 \neq (0)$. □

Proposition 2.2. *Soient I_1 et I_2 deux idéaux d'une $\star$-algèbre A tels que : $A = I_1 \oplus I_2$ et $I_2 = I_1^\star$. Si I_1 et I_2 sont minimaux alors A est une algèbre $\star$-simple.*

Démonstration. On a $A^2 = (I_1 \oplus I_2)(I_1 \oplus I_2) = I_1^2 \oplus I_1 I_2 \oplus I_2 I_1 \oplus I_2^2$. Comme $I_1 I_2$ et $I_2 I_1$ sont inclus dans $I_1 \cap I_2 = (0)$, on en déduit que $A^2 = I_1^2 \oplus I_2^2$. Or $I_1^2 \subset I_1$ et $I_2^2 \subset I_2$, le fait que I_1 et I_2 sont minimaux donne alors $I_1^2 = (0)$ ou $I_1^2 = I_1$. Si $I_1^2 = (0)$ alors $I_2^2 = (0)$, par suite $A^2 = (0)$. Ce qui est impossible puisque A est unitaire. Donc $I_1^2 = I_1$ de sorte que $I_2^2 = I_2$. D'où $A^2 = A$, dans ce cas les seuls $\star$-idéaux de A sont (0) et A. Par conséquence, A est une algèbre $\star$-simple. □

Proposition 2.3. *Pour une $\star$-algèbre A, soient les assertions suivantes :*

(i) *A est $\star$-simple*

(ii) *A est $\star$-première*

(iii) *A est $\star$-semi-première*

(iv) *A est semi-première.*

Alors on a (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv).

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii) Soient I et J deux $\star$-idéaux de A non nuls, alors IJ est non nuls, car $IJ = A^2 \neq (0)$. Par conséquent, A est $\star$-première.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Evident.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Soit I un idéal à gauche de A tel que $I^2 = (0)$. Alors $(I \cap I^\star)^2 = (0)$, ce qui implique que $I \cap I^\star = (0)$. D'autre part, on a

$$(I + I^\star)^2 = I^2 + II^\star + I^\star I + (I^\star)^2 = (I^\star)^2 = (I^2)^\star = (0). \tag{2.1}$$

Par conséquent, $I \subseteq I + I^\star = (0)$. □

Proposition 2.4. *Soit A une algèbre de Banach simple unitaire d'unité e. Alors tout épimorphisme d'une algèbre de Banach sur A est continu.*

Démonstration. Soit $\theta : B \to A$ un épimorphisme d'une algèbre de Banach B sur A et soit e l'unité de A. Le fait que $\sigma(\theta)$ un idéal de A, entraîne alors que $\sigma(\theta) = (0)$ ou $\sigma(\theta) = A$. Si $\sigma(\theta) = A$ alors $e \in \sigma(\theta)$, par suite $0 \in \mathrm{Sp}(e)$ [2, théorème 6-16], ce qui est absurde. Donc $\sigma(\theta) = (0)$, par conséquent θ est continu. □

Théorème 2.5. *Soient A une algèbre de Banach et B une algèbre de Banach $\star$-simple. Alors tout épimorphisme de A dans B est continu.*

Démonstration. Soit $\theta : A \to B$ un épimorphisme. Si B est une simple algèbre, d'après la proposition 2.4, θ est automatiquement continu. Si B n'est pas simple, alors B est somme directe de deux sous-algèbres simples. En effet, comme B est $\star$-simple qui n'est pas simple, on peut considérer B comme un idéal $\star$-minimal qui n'est pas minimal dans lui même. Donc, pour tout idéal non nul propre J de B, on a $B = J \oplus J^\star$, avec J et $J^\star$ sont des idéaux minimaux de B (voir proposition 2.1).

Montrons que J est une algèbre simple. Soit donc T un idéal non nul de J, alors T est un idéal de B. En effet, soit b un élément de B et t un élément de T, alors il existe j et j' deux éléments de J tels que $b = j + j'^*$, d'où $bt = (j + j'^*)t = jt + j'^*t$. Puisque $j'^*t \in J \cap J^\star = \{0\}$, alors $bt = jt \in T$. Ce qui implique que T est un idéal de A. D'après la minimalité de J, nécessairement $T = J$, (même chose pour $J^\star$). En outre, B est semi-première (proposition 2.3), alors il existe un idempotent $e \in B$ tel que $J = Be$ et $J^\star = Be^\star$. Donc J (resp. $J^\star$) est une sous-algèbre unitaire d'unité e (resp. $e^\star$). De plus, on a $B/J^\star \simeq J$ et puisque $J^\star$ est minimal alors J est un idéal maximal de B. Un raisonnement analogue montre que $J^\star$ est aussi un idéal maximal de B. Comme B est une algèbre de Banach, alors J est un idéal fermé [2, lemme 6-3]. Par conséquence, munie de la norme induite, J (resp. $J^\star$) est une algèbre de Banach simple. De plus, si Pr_1 (resp. Pr_2) désigne la projection canonique de B sur J, (resp. de B sur $J^\star$), alors d'après la proposition précédente $\mathrm{Pr}_1 \circ \theta$ (resp. $\mathrm{Pr}_2 \circ \theta$) est continue. Par suite $\mathrm{Pr}_1 \circ \theta + \mathrm{Pr}_2 \circ \theta = \theta$ est continu. □

Corollaire 2.6. *Soit B une algèbre de Banach $\star$-simple. Alors B possède une unique norme d'algèbre de Banach.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à l'identité de B. □

Remarque 2.7. Si A est une algèbre $\star$-simple et si l'involution $\star$ est anisotrope, alors A est simple.

Proposition 2.8. *Soient A une $\star$-algèbre et M un idéal $\star$-maximal qui n'est pas maximal de A. Alors il existe un idéal maximal N tel que $N + N^\star = A$ et $N \cap N^\star = M$.*

Démonstration. Puisque A/M est une algèbre $\star$-simple qui n'est pas simple, la proposition 2.1 assure l'existence d'un idéal propre N de A avec $M \subset N$ tel que $A/M = (N/M) \oplus (N/M)^\star$, où N/M et $(N/M)^\star \simeq N^\star/M$ sont deux idéaux minimaux et maximaux à la fois de A/M. Par conséquence, N et $N^\star$ seront deux idéaux maximaux de A vérifiant $N + N^\star = A$ et $N \cap N^\star = M$. □

Corollaire 2.9. *Toute algèbre $\star$-semi-simple est semi-simple.*

Démonstration. Soit A une algèbre $\star$-semi-simple, alors $\mathrm{Rad}_\star(A) = \bigcap M = 0$, où $\bigcap M$ désigne l'intersection de tous les idéaux $\star$-maximaux de A. Mais $M = N \cap N^\star$ par la proposition 2.8, où N est un idéal maximal de A. En outre, si N est un idéal maximal alors $N^\star$ est aussi un idéal maximal. Donc $\bigcap_{M\ \star\text{-maximal}} M \supseteq \bigcap_{N\ \text{maximal}} (N \cap N^\star)$, le fait que

$$\mathrm{Rad}(A) \subseteq \bigcap_{M\ \text{maximal}} M = \bigcap_{N\ \text{maximal}} (N \cap N^\star) \subseteq \bigcap_{M\ \star\text{-maximal}} M = \mathrm{Rad}_\star(A) = 0 \tag{2.2}$$

donne alors que A est semi-simple. □

Proposition 2.10. *Soient A une $\star$-algèbre de Banach et M un idéal $\star$-maximal de A. Alors M est fermé dans A.*

Démonstration. Si M est un idéal maximal, alors M est fermé. Si M n'est pas maximal, la proposition précédente entraîne l'existence d'un idéal maximal N tel que $N \cap N^\star = M$. Comme N et $N^\star$ sont deux ideal fermés, alors M est aussi un idéal fermé. □

Corollaire 2.11. *Soit M un idéal $\star$-maximal d'une $\star$-algèbre de Banach A. Alors A/M est une algèbre de Banach $\star$-simple.*

Les résultats suivants sont des conséquences du corollaire 2.9.

Théorème 2.12. *Soit B une algèbre de Banach $\star$-semi-simple. Alors :*
(1) tout épimorphisme d'une algèbre de Banach dans B est continu;
(2) toutes les normes complètes sur B sont équivalentes;
(3) l'involution $\star$ est automatiquement continue sur B.

Bibliographie

[1] L. H. Rowen, *Ring Theory. Vol. I*, Pure and Applied Mathematics, vol. 127, Academic Press, Massachusetts, 1988.

[2] A. M. Sinclair, *Automatic Continuity of Linear Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

L. Oukhtite : Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences Dhar-Mahraz, B.P 1796 Atlas Fès, Morocco
E-mail address: oukhtite@caramail.com

A. Tajmouati : Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences Dhar-Mahraz, B.P 1796 Atlas Fès, Morocco
E-mail address: atajmouati@yahoo.fr

Y. Tidli : Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences Dhar-Mahraz, B.P 1796 Atlas Fès, Morocco
E-mail address: ytidli@math.net