ORDRE MAXIMUM D'UNE FONCTION LIÉE AUX DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER

Abdallah Derbal
Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Vieux Kouba, Algérie
abderbal@yahoo.fr

Received: 12/30/11, Accepted: 6/30/12, Published: 8/8/12

Abstract

For an integer $n \geq 2$, define the following functions:

$$d(n) = \sum_{d|n} 1, \quad d^*(n) = \sum_{d|n,\ \left(d, \frac{n}{d}\right)=1} 1, \quad D(n) = \frac{d(n)}{d^*(n)}, \text{ and } f(n) = \frac{\ln(D(n)) \ln\ln n}{\ln n}.$$

It is proved that:

$$\limsup_{n \to +\infty} (f(n)) = \frac{\ln 2}{3} \text{ and } \max_{n \geq 2} (f(n)) = f(466560000) = 0.581001\ldots.$$

For the latter result, we introduce, studied and effectively calculate the d^*-*superior highly composite numbers*, which are similar to the superior highly composite numbers of Ramanujan.

1. Résumé

On considère les fonctions arithmétiques suivantes

$$d(n) = \sum_{d|n} 1, \ d^*(n) = \sum_{d|n,\ \left(d, \frac{n}{d}\right)=1} 1, \ D(n) = \frac{d(n)}{d^*(n)}.$$

Pour $n \geq 2$, on pose

$$f(n) = \frac{\ln(D(n)) \ln\ln n}{\ln n}.$$

On a étudié l'ordre maximal de la fonction $f(n)$ et obtenu les résultats suivants

$$\limsup_{n \to +\infty} (f(n)) = \frac{\ln 2}{3} \text{ et } \max_{n \geq 2} (f(n)) = f(466560000) = 0.581001\ldots.$$

Pour établir la deuxième égalité, $\max_{n \geq 2} (f(n)) = 0.581001\ldots$, on a introduit étudié et calculé effectivement les nombres d^*-hautement composés supérieurs. Ces nombres sont similaires aux nombres hautement composés supérieurs de Ramanujan.

2. Introduction

Sachant que, pour $n \geq 1$, on a $d^*(n) = 2^{\omega(n)}$ où $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n, alors l'étude de cette dernière fonction $\omega(n)$ par G. Robin dans [6, pp. 76-84] permet d'obtenir facilement les résultats suivants sur $d^*(n)$

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(d^*(n)\ln\ln n\right.}{\ln n}\right) = \ln 2$$

il existe une infinité de nombres entiers $n > 4$ tels que $\frac{\ln(d^*(n))\ln\ln n}{\ln n} > \ln 2$ et

$$\max_{n\geq 3}\left(\frac{\ln\left(d^*\left(n\right)\right)\ln\ln n}{\ln n}\right) = \frac{\ln\left(d^*\left(223092870\right)\right)\ln\ln 223092870}{\ln 223092870} = 0.959324\ldots.$$

L'ordre maximum de la fonction $D(n)$ est déterminé en s'inspirant du théorème de Wigert sur la fonction $d(n)$ [1, pp. 294-296]. On rappelle que, par définition, la proposition

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(D(n)\right)\right)\ln\ln n}{\ln n} = \frac{\ln 2}{3}$$

est équivalente à la proposition suivante.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a:

(a) Il existe un nombre entier $N(\varepsilon) > 0$ tel que

$$D(n) < \left(\frac{\ln 2}{3}\right)^{(1+\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}} \quad \text{pour } n \geq N(\varepsilon)$$

(b) Il existe une infinité de nombres $n > 0$ tels que

$$D(n) > \left(\frac{\ln 2}{3}\right)^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}}.$$

La fonction arithmétique $D(n)$ étant multiplicative, alors les idées développés par J.L. Nicolas et G. Robin dans [3] pour la fonction $d(n)$ pourraient lui être appliquer si on dispose de nombres qui remplacent les nombres hautement composés supérieurs (hcs) de Ramanujan [4]. Pour surmonter cet obstacle, on a définit et étudié des nombres liés à la fonction $D(n)$ et similaires à ceux de Ramanujan, qu'on a appelés les nombres d^*-hautement composés supérieurs $(d^* - hcs)$. L'étude et le calcul effectif des nombres $d^* - hcs$ nous ont permis de mettre en œuvre les techniques de [3] et de déterminer explicitement le maximum absolu de $f(n)$. On démontre auparavant, que le maximum absolu de $f(n)$ est atteint en un nombre $d^* - hcs$.

Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème. *Soient, pour $n \geq 2$, les fonctions*

$$D(n) = \frac{d(n)}{d^*(n)} = \frac{\sum_{d|n} 1}{\sum_{d|n,\ \left(d, \frac{n}{d}\right)=1} 1} \text{ et } f(n) = \frac{\ln(D(n)) \ln\ln n}{\ln n}.$$

On a
1. L'égalité $D(n) = O\left(\ln^{\delta} n\right)$ *est fausse* $(\forall \delta > 0)$ *et* $D(n) = o\left(n^{\delta}\right)$ $(\forall \delta > 0)$.
2. $\limsup_{n \to +\infty} (f(n)) = \frac{\ln 2}{3}$ *et il existe une infinité de nombres entiers* $n > 2$ *tels que* $f(n) > \frac{\ln 2}{3}$.
3. Le maximum absolu de $f(n)$ *est atteint au nombre* $N = 466560000 = 2^{10} \times 3^6 \times 5^4$ *et vaut* $0.581000\cdots$ *et l'on a*

$$D(n) \leq \exp\left(\frac{f(N) \ln n}{\ln\ln n}\right) < \exp\left(\frac{0.581001 \ln n}{\ln\ln n}\right) \text{ pour } n \geq 3.$$

Dans cet article nous faisons usage des fonctions classiques $\pi(x)$ et $\theta(x)$ de la théorie analytique des nombres

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \text{ et } \theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$$

ainsi que le théorème des nombres premiers sous les formes suivantes

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln^2 x} + O\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right)\right) \text{ et } \theta(x) = x\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\right).$$

Nous désignons la partie entière d'un nombre réel x par $[x]$.

Les calculs ont été conduits à l'aide du Fortran et le système de calcul formel Maple.

Dans un prochain article nous espérons étudier la fonction $D(n)$ dans les progressions arithmétiques $\{l + mk \ / \ 1 \leq l \leq k, \ (l, k) = 1 \text{ et } m \in \mathbb{N}^*\}$; nous allons considérer les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{c} D(n; k, l) = \frac{d(n;k,l)}{d^*(n;k,l)} = \prod_{p^{\alpha} \| n,\ p \equiv l(k)} \frac{\alpha+1}{2}, \ f(n; k, l) = \frac{\ln(D(n;k,l)) \ln(\varphi(k) \ln n)}{\ln n} \\ \left(\varphi(k) = \sum_{1 \leq m \leq k,\ (m,k)=1} 1 = \text{la fonction d'Euler}\right) \end{array} \right\}$$

nous étudierons l'ordre maximum de la fonction $f(n; k, l)$ et nous calculerons, uniformément pour l, le maximum absolu de $f(n; k, l)$ pour quelques petites valeurs de k.

3. Les Nombres d^*- Hautement Composés Supérieurs (d^*- hcs)

3.1. Étude d'une Fonction et d'une Suite

Définition 1. Pour tout nombre réel $x > 1$ et tout nombre entier $\alpha \geq 1$, on pose

$$H(x,\alpha) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\ln x}.$$

Pour tout nombre entier $\alpha \geq 1$ fixé, la fonction $x \mapsto H(x,\alpha)$ est continue strictement décroissante de $+\infty$ à 0 sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
Pour tout nombre réel $x > 1$ fixé, la suite $(H(x,\alpha))_{\alpha\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

Définition 2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout nombre entier $\alpha \geq 1$, l'équation $H(x,\alpha) = \varepsilon$ admet une unique solution, dépendant de ε, dans l'intervalle $]1,+\infty[$, qu'on notera par x_α. On définit ainsi une suite $(x_\alpha(\varepsilon))_{\alpha\in\mathbb{N}^*} = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^*}$ par la relation $H(x_\alpha,\alpha) = \varepsilon$. Le premier terme, x_1, de la suite $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^*}$ sera noté par x.

Lemme 3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(x_\alpha(\varepsilon))_{\alpha\in\mathbb{N}^*} = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^*}$ de la définition 2 vérifie les propriétés suivantes:*
1. *Elle est strictement décroissante.*
2. *Pour tout $\alpha \in N^*$, on a $x_\alpha = x^{v(\alpha)}$ où $v(\alpha) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\ln 2}$ et l'on a $x \to +\infty \Leftrightarrow (x_\alpha \to +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*)$. En particulier $x_2 = x^{\frac{\ln(3/2)}{\ln 2}}$ et $x_3 = x^{\frac{\ln(4/3)}{\ln 2}}$.*
3. *Pour tout nombre entier $n \geq 2$, il existe un nombre fini de terme x_α qui sont $\geq n$.*

Démonstration. 1. Pour tout $\alpha \in N^*$, on a

$$\varepsilon = H(x_\alpha,\alpha) = H(x_{\alpha+1},\alpha+1) < H(x_{\alpha+1},\alpha) \text{ d'où } x_\alpha > x_{\alpha+1}.$$

2. Sachant que $\varepsilon = H(x_\alpha,\alpha) = H(x,1)$, alors $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\ln x_\alpha} = \frac{\ln(2)}{\ln x}$, il en vient $x_\alpha = x^{v(\alpha)}$ où $v(\alpha) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\ln 2}$. Puisque $0 < v(\alpha) \leq 1$ pour tout $\alpha \in N^*$, alors $x \to +\infty \Leftrightarrow x_\alpha \to +\infty$.

3. La fonction $H(x,\alpha)$ étant décroissante pour x et α, alors pour tout $\alpha \in N^*$, on a $x_\alpha \geq n \Leftrightarrow H(x_\alpha,\alpha) \leq H(n,\alpha)$. Puisque $H(x_\alpha,\alpha) = \varepsilon$, alors

$$H(x_\alpha,\alpha) \leq H(n,\alpha) \Leftrightarrow \varepsilon \leq H(n,\alpha).$$

La dernière inégalité est équivalente à $\alpha \leq \frac{1}{n^\varepsilon - 1}$ ce qui prouve l'existence d'un nombre fini de termes x_α qui sont $\geq n$. □

Définition 4. Pour tout nombre premier p, on pose $E_p = \{H(p,n)\ /\ n \geq 1\}$ et $E = \bigcup_{p \text{ premier}} E_p$. L'ensemble E est dénombrable et on range ses éléments en une suite décroissante

$$\varepsilon_1 = H(2,1) = 1 > \varepsilon_2 = H(3,1) = \frac{\ln 2}{\ln 3} > \varepsilon_3 = H(2,2) = \frac{\ln(3/2)}{\ln 2} > \cdots.$$

Pour tout ε tel que $\varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0$ il existe un nombre fini d'élément de E qui sont $\geq \varepsilon$ car

$$H(p,\alpha) \geq \varepsilon \Rightarrow H(2,\alpha) \geq \varepsilon \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2^{\varepsilon}-1}.$$

3.2. Les Nombres d^*-Hautement Composés Supérieurs (d^*- hcs)

Définition 5. Un nombre entier $N \geq 1$ est dit d^*-hcs si, et seulement si il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{D(n)}{n^{\varepsilon}} \leq \frac{D(N)}{N^{\varepsilon}} \text{ pour } 1 \leq n \leq N \text{ et } \frac{D(n)}{n^{\varepsilon}} < \frac{D(N)}{N^{\varepsilon}} \text{ pour } n > N.$$

On dit alors que N est un nombre d^*-hcs associé à ε et on écrit $N = N_{\varepsilon}$.

Lemme 6. ***1.*** *Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un unique nombre N d^*-hcs associé à ε.* ***2.*** *L'ensemble des nombres d^*-hcs est infini.*

Démonstration. 1. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{D(n)}{n^{\varepsilon}} = 0$, alors $\frac{D(n)}{n^{\varepsilon}}$ atteint son maximum absolu en un nombre fini de nombres entiers ≥ 1. Le nombre N est alors le plus grand.

2. Notons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres d^*-hcs. Vérifions que le nombre $N = 1$ est d^*-hcs c'est à dire que $\mathcal{N}$ n'est pas vide. Pour tout $\varepsilon > \frac{1}{3}$ et tout nombre entier $n = \prod\limits_{p^{\alpha}\|n} p^{\alpha} \geq 2$, on a

$$\frac{D(n)}{n^{\varepsilon}} < \frac{D(n)}{n^{1/3}} = \prod_{p^{\alpha}\|n} \frac{\alpha+1}{2p^{\alpha/3}} \leq \prod_{p^{\alpha}\|n} \frac{\alpha+1}{2^{1+\alpha/3}} \leq 1 = \frac{D(1)}{1^{\varepsilon}}.$$

Donc $N = 1$ est un nombre d^*-hcs associé à tout nombre réel $\varepsilon > \frac{1}{3}$.
Supposons que $\mathcal{N}$ est fini. On considère alors l'ensemble $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ $(r \geq 1)$ de tous les facteurs premiers des nombres $N \in \mathcal{N}$. Soient p un nombre premier $p \notin S$, ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{\ln(3/2)}{2\ln p}$ et M le nombre d^*-hcs associé à ε. D'une part, on a $M \in \mathcal{N}$ et d'autre part, on a

$$\frac{D(p^2M)}{(p^2M)^{\varepsilon}} = \frac{3/2}{p^{2\varepsilon}} \frac{D(M)}{M^{\varepsilon}} > \frac{3/2}{p^{2\frac{\ln(3/2)}{2\ln p}}} \frac{D(M)}{M^{\varepsilon}} = \frac{D(M)}{M^{\varepsilon}} \text{ avec } p^2M > M$$

donc $M \notin \mathcal{N}$ contradiction. On conclue alors que l'ensemble $\mathcal{N}$ est infini. □

Lemme 7. *Soit $N > 1$ un nombre d^*-hcs associé à ε $\left(0 < \varepsilon \leq \frac{1}{3}\right)$.*
1. *Le nombre N n'est pas un produit de nombres premiers.*
2. *Si l'on désigne par P le plus grand facteur premier de N, alors N est divisible*

par tous les nombres premiers p tels que $2 \leq p \leq P$.
3. *Pour tout facteur premier p de N d'exposant α, on a*

$$H(p, \alpha+1) < \varepsilon \leq H(p, \alpha), \; x_{\alpha+1} < p \leq x_\alpha, \; \alpha = \left[\frac{1}{p^\varepsilon - 1}\right], \; \frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\varepsilon}} \geq 1 \textit{ et } \alpha \geq 3.$$

4. *Les diviseurs premiers de N sont tous $\leq x_3$ où x_3 est le troisième terme de la suite $(x_\alpha(\varepsilon))_{\alpha \geq 1} = (x_\alpha)_{\alpha \geq 1}$ de la définition 2.*

Démonstration. 1. Si on suppose que $N = p_1 \times \cdots \times p_r$ où $r \geq 1$ et les p_i sont des nombres premiers distincts, on aura

$$1 = \frac{D(1)}{1^\varepsilon} \leq \frac{D(N)}{N^\varepsilon} = \frac{1}{(p_1 \times \cdots \times p_r)^\varepsilon} < 1 \text{ contradiction.}$$

En particulier, N n'est pas un nombre premier.

2. Si $P = 2$, l'assertion est évidente. Supposons $P \geq 3$ et il existe un nombre premier p tel que $2 \leq p < P$ et p ne divise pas N. En écrivant $N = P^\alpha M$, on aura $p^\alpha M < P^\alpha M$ alors

$$\frac{D(p^\alpha M)}{(p^\alpha M)^\varepsilon} \leq \frac{D(P^\alpha M)}{(P^\alpha M)^\varepsilon}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\varepsilon}} \frac{D(M)}{M^\varepsilon} \leq \frac{\alpha+1}{2P^{\alpha\varepsilon}} \frac{D(M)}{M^\varepsilon}$$

d'où $P^{\alpha\varepsilon} \leq p^{\alpha\varepsilon}$ ceci implique que $P \leq p < P$ contradiction.

3. Soit p un facteur premier de N d'exposant $\alpha \geq 1$. On a alors $N = p^\alpha M$ avec $(p, M) = 1$. On considère les nombres pN et $\frac{N}{p}$. On a $pN = p^{\alpha+1} M > N$ et $\frac{N}{p} = p^{\alpha-1} M < N$. Par définition on a

$$\frac{D(p^{\alpha+1}M)}{(p^{\alpha+1}M)^\varepsilon} < \frac{D(p^\alpha N)}{(p^\alpha N)^\varepsilon} \text{ et } \frac{D(p^{\alpha-1}M)}{(p^{\alpha-1}M)^\varepsilon} \leq \frac{D(p^\alpha N)}{(p^\alpha N)^\varepsilon}.$$

Les deux dernières inégalités sont équivalentes à$H(p, \alpha+1) < \varepsilon \leq H(p, \alpha)$. Sachant que$\varepsilon = H(x_\alpha, \alpha+1) = H(x_\alpha, \alpha)$ alors

$$\left\{ \begin{array}{c} H(p, \alpha+1) < \varepsilon \Leftrightarrow H(p, \alpha+1) < H(x_{\alpha+1}, \alpha+1) \Leftrightarrow x_{\alpha+1} < p \\ \text{et } \varepsilon \leq H(p, \alpha) \Leftrightarrow H(x_\alpha, \alpha) \leq H(p, \alpha) \Leftrightarrow p \leq x_\alpha \end{array} \right\}.$$

En résolvant les inéquations $H(p, \alpha+1) < \varepsilon \leq H(p, \alpha)$ on obtient l'expression $\alpha = \left[\frac{1}{p^\varepsilon - 1}\right]$. Puisque $1 \leq M < N$ alors $\frac{D(M)}{M^\varepsilon} \leq \frac{D(N)}{N^\varepsilon}$ par suite

$$\frac{D(N)}{N^\varepsilon} = \frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\varepsilon}} \times \frac{D(M)}{M^\varepsilon} \leq \frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\varepsilon}} \times \frac{D(N)}{N^\varepsilon} \text{ d'où } \frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\varepsilon}} \geq 1.$$

Si on suppose que $\alpha = 1$, on aura

$$\frac{D(N)}{N^{\varepsilon}} = \frac{D(pM)}{(pM)^{\varepsilon}} < \frac{D(M)}{M^{\varepsilon}} \text{ avec } M < N$$

contradiction avec la définition de N et si on suppose que $\alpha = 2$, on aura

$$2 = \left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}\right] \text{ et } \frac{3/2}{p^{2\varepsilon}} \geq 1.$$

La dernière inégalité est équivalente à $\varepsilon \leq \frac{\ln(3/2)}{2\ln p}$ ce qui implique

$$\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1} \geq \frac{1}{p^{\frac{\ln(3/2)}{2\ln p}} - 1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1} > 4.44 \text{ d'où } \left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}\right] \geq 4$$

d'où l'inégalité fausse

$$2 = \left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}\right] \geq 4.$$

On conclue alors que $\alpha \geq 3$.

4. Soit p un facteur premier de N à exposant α. D'après la troisième assertion, on a $\varepsilon \leq H(p, \alpha)$ avec $\alpha \geq 3$ alors $H(p, \alpha) \leq H(p, 3)$ d'où $\varepsilon = H(x_3, 3) \leq H(p, 3)$ ce qui implique $p \leq x_3$. □

Remarque. La réciproque de la quatrième assertion du Lemme 7 n'est pas vraie. En effet, pour $\varepsilon = \frac{\ln(7/6)}{\ln 2}$, on a $N_{\varepsilon} = 2^6$, $x_3 = 3.645\ldots$, $x_4 = 2.727\ldots$. Donc 3 est plus petit que x_3 mais il ne divise pas N_{ε} car s'il le divise, son exposant est nécessairement égal à $\left[\frac{1}{3^{\frac{\ln(7/6)}{\ln 2}} - 1}\right] = 3$ mais $\frac{(3+1)/2}{3^{3\frac{\ln(7/6)}{\ln 2}}} < 0.97 < 1$.

Lemme 8. *Soient ε et δ deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon \leq \delta$ et N et M les nombres $d^* - hcs$ associés à ε et δ respectivement $(N = N_{\varepsilon}$ et $M = M_{\delta})$, alors M divise N.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un nombre premier p divisant M et ne divisant pas N. On a alors $M = p^{\alpha}T$ avec $(p, T) = 1$, $\alpha \geq 3$, $\frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\delta}} \geq 1$. On considère le nombre $p^{\alpha}N$. Puisque $p^{\alpha}N > N$, alors

$$\frac{D(p^{\alpha}N)}{p^{\alpha\varepsilon}N^{\varepsilon}} = \frac{\alpha + 1}{2p^{\alpha\varepsilon}} \frac{D(N)}{N^{\varepsilon}} < \frac{D(N)}{N^{\varepsilon}} \text{ ce qui implique que } \frac{\alpha + 1}{2p^{\alpha\varepsilon}} < 1.$$

Puisque $\varepsilon \leq \delta$ alors $\frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\delta}} \leq \frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\varepsilon}} < 1$ donc $\frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\delta}} < 1$ contradiction avec le fait que $\frac{\alpha+1}{2p^{\alpha\delta}} \geq 1$. On conclue alors que tout diviseur premier de M est un diviseur de N. Soient p un facteur premier de M, α et β les exposants de p dans les décompositions de M et N respéctivement. On a

$$3 \leq \alpha = \left[\frac{1}{p^{\delta} - 1}\right] \leq \left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}\right] = \beta.$$

On conclue alors que M divise N. □

3.3. Calcul Effectif des Nombres d^*−hcs

Il est basé essentiellement sur le Lemme 7. Pour un nombre réel x tel que $x_3 = x^{\frac{\ln(4/3)}{\ln 2}} \geq 2$ soit $x \geq \exp\left(\frac{(\ln 2)^2}{\ln(4/3)}\right) = 5.312\cdots$, on calcule $\varepsilon = \frac{\ln 2}{\ln x}$ et les éléments $\delta_i = H(p,\alpha) \geq \varepsilon$ où p est un nombre premier et $\alpha \geq 3$ (la fonction H est celle de la définition 1) on les ordonne décroissement, on remplace, dans ce calcul, les nombres $H(p,3)$ par $\frac{\ln 2}{3\ln p}$ pour obtenir les facteurs premiers à exposant 3 et enfin on calcule les nombres N_{δ_i}, on obtient ainsi tous les nombres $d^* - hcs$ $N \leq N_\varepsilon$.
Voici la liste des dix neuf premiers nombres $d^* - hcs$

ε	N_ε	$D(N_\varepsilon)$	$g(N_\varepsilon)$
$\varepsilon > \frac{1}{3}$	1	1	indéfinie
$\frac{1}{3} \geq \varepsilon > H(2,4) = \frac{\ln(5/4)}{\ln 2}$	2^3	2	$0.244033\cdots$
$H(2,4) \geq \varepsilon > H(2,5) = \frac{\ln(6/5)}{\ln 2}$	2^4	$\frac{5}{2}$	$0.337019\cdots$
$H(2,5) \geq \varepsilon > H(2,6) = \frac{\ln(7/6)}{\ln 2}$	2^5	3	$0.393997\cdots$
$H(2,6) \geq \varepsilon > \frac{\ln 2}{3\ln 3}$	2^6	$\frac{7}{2}$	$0.429321\cdots$
$\frac{\ln 2}{3\ln 3} \geq \varepsilon > H(3,4) = \frac{\ln(5/4)}{\ln 3}$	$2^6 \times 3^3 = 1728$	7	$0.524370\cdots$
$H(3,4) \geq \varepsilon > H(2,7) = \frac{\ln(8/7)}{\ln 2}$	$2^6 \times 3^4 = 5184$	$\frac{35}{4}$	$0.544289\cdots$
$H(2,7) \geq \varepsilon > H(2,8) = \frac{\ln(9/8)}{\ln 2}$	$2^7 \times 3^4$	10	$0.553887\cdots$
$H(2,8) \geq \varepsilon > H(3,5) = \frac{\ln(6/5)}{\ln 3}$	$2^8 \times 3^4$	$\frac{45}{4}$	$0.559220\cdots$
$H(3,5) \geq \varepsilon > H(2,9) = \frac{\ln(10/9)}{\ln 2}$	$2^8 \times 3^5$	$\frac{27}{2}$	$0.566214\cdots$
$H(2,9) \geq \varepsilon > \frac{\ln 2}{3\ln 5}$	$2^9 \times 3^5$	15	$0.568385\cdots$
$\frac{\ln 2}{3\ln 5} \geq \varepsilon > H(3,6) = \frac{\ln(7/6)}{\ln 3}$	$2^9 \times 3^5 \times 5^3$	30	$0.576524\cdots$
$H(3,6) \geq \varepsilon > H(5,4) = \frac{\ln(5/4)}{\ln 5}$	$2^9 \times 3^6 \times 5^3$	35	$0.578092\cdots$
$H(5,4) \geq \varepsilon > H(2,10) = \frac{\ln(11/10)}{\ln 2}$	$2^9 \times 3^6 \times 5^4$	$\frac{175}{4}$	$0.580161\cdots$
$H(2,10) \geq \varepsilon > H(2,11) = \frac{\ln(12/11)}{\ln 2}$	$2^{10} \times 3^6 \times 5^4$	$\frac{385}{8}$	$0.581000528\cdots$
$H(2,11) \geq \varepsilon > H(3,7) = \frac{\ln(8/7)}{\ln 3}$	$2^{11} \times 3^6 \times 5^4$	$\frac{105}{2}$	$0.580660\cdots$
$H(3,7) \geq \varepsilon > \frac{\ln 2}{3\ln 7}$	$2^{11} \times 3^7 \times 5^4$	60	$0.579676\cdots$
$\frac{\ln 2}{3\ln 7} \geq \varepsilon > H(2,12) = \frac{\ln(13/12)}{\ln 2}$	$2^{11} \times 3^7 \times 5^4 \times 7^3$	120	$0.575647\cdots$
$H(2,12) \geq \varepsilon > H(7,4) = \frac{\ln(5/4)}{\ln 7}$	$2^{12} \times 3^7 \times 5^4 \times 7^3$	130	$0.5751990\cdots$

Lemme 9. (élémentaire) *Soient a et b deux nombres réels, $b \geq 2$. On considère les deux fonctions réelles : $A_a(t) = \ln t + a\frac{\ln t}{t}$ et $B_b(t) = \frac{t}{\ln t} - \frac{b-1}{b^2}t$ $(t > 1)$.*
1. (a) Pour $a \leq e^2$, la fonction $A_a(t)$ est croissante dans l'intervalle $[e, +\infty[$; (b) Pour $a > e^2$, la fonction $A_a(t)$ est convexe dans l'intervalle $\left[e^2, +\infty\right[$.

2. La fonction $B_b(t) = \frac{t}{\ln t} - \frac{b-1}{b^2}t$ est croissante dans $\left[e^2, e^b\right]$ et strictement décroissante dans l'intervalle $\left]e^b, +\infty\right[$.
Lemme 10. *(1) Soient $N_1 < N_2$ deux nombres d^*-hcs consécutifs, alorsN_1 divise N_2, $D(N_1) < D(N_2)$ et si $1619 \leq N_1$ alors pour tout nombre entier n tel que $N_1 \leq n \leq N_2$, on a $f(n) \leq \max(f(N_1), f(N_2))$.*
(2) Le maximum absolu de la fonction $f(n)$ est atteint en un nombre $d^* - hcs$.

Démonstration. (1) Soient $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ tels que $N_1 = N_{\varepsilon_1}$ et $N_2 = N_{\varepsilon_2}$. On considère le nombre réel ε défini par l'égalité

$$\frac{D(N_1)}{(N_1)^{\varepsilon}} = \frac{D(N_2)}{(N_2)^{\varepsilon}} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\ln\left(\frac{D(N_2)}{D(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)}.$$

Par définition, on a

$$\frac{D(N_1)}{(N_1)^{\varepsilon_2}} \leq \frac{D(N_2)}{(N_2)^{\varepsilon_2}} \text{ et } \frac{D(N_2)}{(N_2)^{\varepsilon_1}} < \frac{D(N_1)}{(N_1)^{\varepsilon_1}}$$

ce qui est équivalent à $\varepsilon_2 \leq \varepsilon < \varepsilon_1$ donc $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Alors d'après le Lemme 8, on a N_1 divise N_2. Puisque $0 < \varepsilon$ et $N_1 < N_2$ $\left(\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right) > 0\right)$ alors $\ln\left(\frac{D(N_2)}{D(N_1)}\right) > 0$ d'où $D(N_1) < D(N_2)$. Soit Maintenant $N = N_\varepsilon$ le nombre $d^* - hcs$ associé à ε. Puisque $\varepsilon_2 \leq \varepsilon < \varepsilon_1$ alors d'après le Lemme 8, on a N_1 divise N et N divise N_2 donc $N_1 \leq N \leq N_2$. Puisque N_1 et N_2 sont consécutifs alors $N = N_1$ ou $N = N_2$. Si on suppose que $N = N_1$, on aura

$$\frac{D(N_1)}{(N_1)^{\varepsilon}} = \frac{D(N_2)}{(N_2)^{\varepsilon}} < \frac{D(N_1)}{(N_1)^{\varepsilon}} \text{ c'est à dire } \frac{D(N_1)}{(N_1)^{\varepsilon}} < \frac{D(N_1)}{(N_1)^{\varepsilon}}$$

ce qui est faux. Donc $N = N_2$ par suite on a $\frac{D(n)}{n^{\varepsilon}} \leq \frac{D(N_2)}{(N_2)^{\varepsilon}} = \frac{D(N_1)}{(N_1)^{\varepsilon}}$ pour $N_1 \leq n \leq N_2$ il en vient

$$\ln(D(n)) \leq \varepsilon \ln n + \ln(D(N_2)) - \varepsilon \ln N_2 = \varepsilon \ln n + \ln(D(N_1)) - \varepsilon \ln N_1$$

ce qui permet d'écrire

$$f(n) \leq \varepsilon A_a(\ln n) \text{ où } A_a(t) = \ln t + a\frac{\ln t}{t} \text{ (Lemme 9)}$$

avec

$$a = \frac{(\ln(D(N_2)) - \varepsilon \ln N_2)}{\varepsilon} = \frac{(\ln(D(N_1)) - \varepsilon \ln N_1)}{\varepsilon}.$$

Remarquons aussi que

$$\varepsilon A_a(\ln N_1) = f(N_1) \text{ et } \varepsilon A_a(\ln N_2) = f(N_2).$$

Puisque $e < \ln N_1 \leq \ln n \leq \ln N_2$, alors d'après le Lemme 9, on a

$$f(n) \leq \varepsilon A_a(\ln n) \leq \varepsilon A_a(\ln N_2) = f(N_2) \leq \max(f(N_1), f(N_2)) \text{ si } a \leq e^2$$

et

$$f(n) \leq \varepsilon A_a(\ln n) \leq \max(\varepsilon A_a(\ln N_1), \varepsilon A_a(\ln N_1)) \leq \max(f(N_1), f(N_2)) \text{ si } a > e^2.$$

(2) Par calcul direct sur ordinateur on vérifie que $f(n) \leq f(1728) = 0.524\ldots$ pour $2 \leq n \leq 1728$. Sachant que le nombre 1728 est le premier nombre $d^* - hcs$

plus grand que 1619 alors l'assertion annoncée est une conséquence directe de la première assertion. $\square$

Lemme 11. *Soit* $\lambda = \max_{n\geq 2} f(n) = f(N)$, *alors* N *est le nombre* $d^* - hcs$ *associé à*

$$\varepsilon = \lambda \frac{\ln\ln N - 1}{(\ln\ln N)^2}.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que N et ε vérifient les inégalités de la définition 5. Pour cela on écrit

$$\ln(D(n)) - \varepsilon \ln n = \left(\ln(D(n)) - \lambda \frac{\ln n}{\ln\ln n}\right) + \left(\lambda \frac{\ln n}{\ln\ln n} - \varepsilon \ln n\right).$$

La première parenthèse étant ≤ 0, alors

$$\ln(D(n)) - \varepsilon \ln n \quad \leq \quad \left(\lambda \frac{\ln n}{\ln\ln n} - \varepsilon \ln n\right) = \lambda B_b(\ln n) \text{ (Lemme 9)}$$

avec $b = \ln\ln N$.

L'égalité

$$\lambda = \frac{\ln(D(N))\ln\ln N}{\ln N}$$

et le Lemme 9 impliquent

$$\begin{array}{c} \ln(D(n)) - \varepsilon \ln n \leq \lambda B_b(\ln N) = \ln(D(N)) - \varepsilon \ln N \text{ pour } 1728 \leq n \leq N \\ \text{et } \ln(D(n)) - \varepsilon \ln n < \lambda B_b(\ln N) = \ln(D(N)) - \varepsilon \ln N \text{ pour } n > N. \end{array} \tag{3}$$

Il nous reste à vérifier que pour $1 \leq n \leq 1728$, on a aussi

$$\ln(D(n)) - \varepsilon \ln n \leq \ln(D(N)) - \varepsilon \ln N.$$

On sait que 1728 est $d^* - hcs$ associé à $\delta = \frac{\ln 2}{3\ln 3}$. Comme $N > 1728$, alors $\delta = \frac{\ln 2}{3\ln 3} > \varepsilon$. Cette dernière inégalité implique

$$\left(\frac{1728}{n}\right)^{\varepsilon} \times \left(\frac{n}{1728}\right)^{\delta} \leq 1$$

pour $1 \leq n \leq 1728$ et d'après (3), on a

$$\frac{D(1728)}{(1728)^{\varepsilon}} \leq \frac{D(N)}{N^{\varepsilon}}.$$

On a donc

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{D(n)}{n^{\delta}} \leq \frac{D(1728)}{(1728)^{\delta}},\ \left(\frac{1728}{n}\right)^{\varepsilon} \times \left(\frac{n}{1728}\right)^{\delta} \leq 1 \text{ pour } 1 \leq n \leq 1728 \\ \text{et } \frac{D(1728)}{(1728)^{\varepsilon}} \leq \frac{D(N)}{N^{\varepsilon}} \end{array} \right\}.$$

Les trois dernières inégalités permettent d'obtenir

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{D(n)}{n^{\varepsilon}}=\frac{D(n)}{n^{\delta}}\times\frac{n^{\delta}}{n^{\varepsilon}}\leq\frac{D(1728)}{(1728)^{\delta}}\frac{n^{\delta}}{n^{\varepsilon}}=\frac{D(1728)}{(1728)^{\varepsilon}}\frac{(1728)^{\varepsilon}}{n^{\varepsilon}}\frac{n^{\delta}}{(1728)^{\delta}}= \\ =\frac{D(1728)}{(1728)^{\varepsilon}}\left(\frac{1728}{n}\right)^{\varepsilon}\left(\frac{n}{1728}\right)^{\delta}\leq\frac{D(1728)}{(1728)^{\varepsilon}}\leq\frac{D(N)}{N^{\varepsilon}} \end{array}\right\}.$$

□

4. Démonstration du Théorème

1. Si $0<\delta<1$, on considère la suite $(x_n)=(2^n)$, pour laquelle on a

$$D(x_n)=\frac{n+1}{2}\sim\frac{2\ln(x_n)}{\ln 2}>\frac{2(\ln(x_n))^{\delta}}{\ln 2}$$

ceci prouve que $D(x_n)$ ne peut jamais être un grand O de $\ln^{\delta} n$.
Si $\delta\geq 1$, on considère $l=[\delta]$ et la suite $(x_n)=((2\times\cdots\times p_{l+1})^n)$ où $2\times\cdots\times p_{l+1}$ est le produit de $l+1$ premiers nombres premiers. Pour cette dernière suite, on a

$$D(x_n)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^{l+1}\sim\left(\frac{2\ln(x_n)}{\ln(2\times\cdots\times p_{l+1})}\right)^{l+1}=\left(\frac{2}{\ln(2\times\cdots\times p_{l+1})}\right)^{l+1}(\ln(x_n))^{l+1}.$$

Puisque $l+1>\delta$ et $C=\left(\frac{2}{\ln(2\times\cdots\times p_{l+1})}\right)^{l+1}$ est une constante indépendante de n, alors

$$D(x_n)\sim C\times(\ln(x_n))^{l+1}>C\times(\ln(x_n))^{\delta}$$

ce qui prouve que $D(n)$ n'est pas un grand O de $\ln^{\delta} n$. Sachant que

$$\left(D(n)=O\left(n^{\delta}\right)\ (\forall\delta>0)\right)\Leftrightarrow\left(D(n)=o\left(n^{\delta}\right)\ (\forall\delta>0)\right)$$

il suffit de montrer la première proposition. Soit $\delta>0$. Pour $n=\prod_{p^a\|n}p^a\geq 2$, on a

$$\frac{D(n)}{n^{\delta}}=\prod_{p^a\|n}\frac{a+1}{2p^{a\delta}}=\left(\prod_{p^a\|n,\ p\leq 2^{\frac{1}{\delta}}}\frac{a+1}{2p^{a\delta}}\right)\left(\prod_{p^a\|n,\ p>2^{\frac{1}{\delta}}}\frac{a+1}{2p^{a\delta}}\right).$$

Pour tout $a\in\mathbb{N}^*$ tel que $p^a\parallel n$ et $p\leq 2^{\frac{1}{\delta}}$, on a

$$\frac{(a+1)\delta\ln 2}{2}<e^{\frac{(a+1)\delta\ln 2}{2}}=2^{\frac{(a+1)\delta}{2}}\leq p^{a\delta}\text{ alors }\frac{a+1}{2p^{a\delta}}<\frac{1}{\delta\ln 2}$$

alors

$$\prod_{p^a\|n,\ p\leq 2^{\frac{1}{\delta}}}\frac{a+1}{2p^{a\delta}}<\left(\frac{1}{\delta\ln 2}\right)^{\pi\left(2^{\frac{1}{\delta}}\right)}\quad\text{qui est une constante indépendante de } n.$$

Pour $p > 2^{\frac{1}{\delta}}$, on a
$$p^{a\delta} > 2^a > \frac{a+1}{2} \text{ d'où } \frac{a+1}{2p^{a\delta}} < 1$$
par suite
$$\prod_{p^a \| n,\ p > 2^{\frac{1}{\delta}}} \frac{a+1}{2p^{a\delta}} < 1.$$
On conclue que $D(n) = O\left(n^{\delta}\right)$ pour tout $\delta > 0$.

2. Soit $n = \prod\limits_{p^\alpha \| n} p^\alpha \geq 2$. On a $D(n) = \prod\limits_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha+1}{2}$. On écrit $D(n) := P_1(n) \times P_2(n)$ où
$$\left\{ \begin{array}{c} p_1(n) = \prod\limits_{p^\alpha \| n \text{ et } p \leq g(n)} \frac{\alpha+1}{2} \text{ et } P_2(n) = \prod\limits_{p^\alpha \| n \text{ et } p > g(n)} \frac{\alpha+1}{2} \text{ avec } g(n) = \frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2} \\ (g(n) > 2 \text{ pour } n \geq 896678). \end{array} \right\}.$$
Majoration de $P_1(n)$. On a
$$P_1(n) = \exp\left(\sum_{p^\alpha \| n \text{ et } p \leq g(n)} \ln\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right).$$
Puisque $n = \prod\limits_{p^\alpha \| n} p^\alpha \geq p^\alpha \geq 2^\alpha$, alors $\ln n \geq \alpha \ln 2$ d'où $\alpha \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$ par suite
$$\frac{\alpha+1}{2} \leq \frac{\ln n + \ln 2}{2\ln 2} < \ln n \text{ et } \ln\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) < \ln\ln n \text{ (pour } n \geq 7).$$
Il en vient
$$P_1(n) = \exp\left(\sum_{p^\alpha \| n \text{ et } p \leq g(n)} \ln\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right) < \exp\left(\ln\ln n \sum_{p^\alpha \| n \text{ et } p \leq g(n)} 1\right).$$
Pour $n \geq 896678$, on a $g(n) > 2$, alors
$$\sum_{p^\alpha \| n \text{ et } p \leq g(n)} 1 \leq \pi(g(n)) < \frac{6g(n)}{\ln g(n)} \quad ([1] \text{ page } 82)$$
par suite
$$P_1(n) < e^{\frac{6g(n)\ln\ln n}{\ln(g(n))}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{cg(n)\ln(\ln n)}{\ln(g(n))}} \quad \text{où } c = \frac{18}{\ln 2}. \tag{1}$$
Majoration de $P_2(n)$. La majoration de $P_2(n)$ est basée essentiellement sur l'inégalité
$$\frac{\alpha+1}{2} \leq \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\alpha} \text{ valable pour tout nombre entier } \alpha \geq 0.$$

On a alors

$$\left\{\begin{array}{c} P_2(n) = \prod_{p^\alpha \| n \text{ et } p>g(n)} \frac{\alpha+1}{2} \leq \prod_{p^\alpha \| n \text{ et } p>g(n)} \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^\alpha = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{S(n)} \\ \text{où } S(n) = \sum_{p^\alpha \| n \text{ et } p>g(n)} \alpha. \end{array}\right\}.$$

On doit, maintenant, majorer $S(n)$ par une expression de $g(n)$. On a

$$n = \prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha \geq \prod_{p^\alpha \| n \text{ et } p>g(n)} p^\alpha \geq \prod_{p^\alpha \| n \text{ et } p>g(n)} (g(n))^\alpha = (g(n))^{S(n)}$$

d'où

$$S(n) \leq \frac{\ln n}{\ln (g(n))}$$

par suite

$$P_2(n) \leq \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{\ln n}{\ln(g(n))}}. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) impliquent

$$D(n) \leq \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{h(n)} \quad \text{où } h(n) = \frac{cg(n)\ln(\ln n) + \ln n}{\ln(g(n))} \quad \left(c = \frac{36}{\ln 2}\right).$$

En écrivant $h(n)$ sous la forme

$$h(n) = \frac{\ln n}{\ln \ln n} \frac{1 + c\frac{g(n)\ln\ln n}{\ln n}}{\frac{\ln(g(n))}{\ln \ln n}}$$

et en remplaçant $g(n)$ par son expression on trouve

$$h(n) = \frac{\ln n}{\ln \ln n}\left(1 + \frac{c}{\ln \ln n} + O\left(\frac{\ln \ln \ln n}{\ln \ln n}\right)\right).$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N(\varepsilon) > 0$ tel que l'on ait pour $n > N(\varepsilon)$

$$h(n) < (1+\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln \ln n}, \ D(n) < \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{(1+\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln \ln n}} \text{ et } f(n) < \frac{\ln 2}{3} + \varepsilon.$$

Maintenant on considère la suite des nombres $N^{(m)} = \prod_{p \leq m} p^3 \ (m \geq 2)$:

$$\left\{\begin{array}{l} N^{(2)} = 2^3, \ N^{(3)} = 2^3 \times 3^3, \ N^{(4)} = 2^3 \times 3^3, \ N^{(5)} = 2^3 \times 3^3 \times 5^3, \ldots \\ \left(N^{(m)}\right)_{m\geq 2} \text{ est une suite croissante, } \left(N^{(m)}\right)_{m\geq 2} \to +\infty \ (m \to +\infty) \end{array}\right\}.$$

Pour $N = N^{(m)} \ (m \geq 2)$, on a

$$f(N) = \frac{(\ln 2)\,\pi(m)\ln(3\theta(m))}{3\theta(m)} = \frac{\ln 2}{3}\frac{\pi(m)\ln(3\theta(m))}{\theta(m)} \to \frac{\ln 2}{3} \text{ quand } m \to \infty,$$

ce qui prouve l'existence d'une infinité de nombre $N = N^{(m)}$ tel que $f(N) > \frac{\ln 2}{3} - \varepsilon$. On a aussi

$$f(N) = \frac{(\ln 2)\,\pi(m)\ln(3\theta(m))}{3\theta(m)} = \frac{\ln 2}{3}\frac{\pi(m)\ln(3\theta(m))}{\theta(m)} > \frac{\ln 2}{3}\frac{\pi(m)\ln(\theta(m))}{\theta(m)}.$$

Sachant que

$$\pi(m) = \frac{m}{\ln m}\left(1 + \frac{1}{\ln m} + O\left(\frac{1}{\ln^2 m}\right)\right) \text{ et } \theta(m) = m\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln^2 m}\right)\right)$$

on obtient

$$\frac{\pi(m)\ln(\theta(m))}{\theta(m)} = 1 + \frac{1}{\ln m} + O\left(\frac{1}{\ln^2 m}\right) > 1 \text{ pour } m \text{ suffisamment grand.}$$

Alors il existe une infinité de nombres $N = N^{(m)}$ vérifiant $f(N) > \frac{\ln 2}{3}$.

3. La démonstration du troisième point du théorème se fait en deux étapes. Dans la première étape, on établit la majoration suivante

$$\varepsilon\frac{(\ln\ln N)^2}{\ln\ln N - 1} < 0.44 \text{ pour } N = N_\varepsilon \text{ avec } 0 < \varepsilon \leq \frac{\ln(4/3)}{\ln 25}.$$

On a

$$\varepsilon\frac{(\ln\ln N)^2}{\ln\ln N - 1} = \varepsilon\frac{(\ln\ln N)^2 - 1 + 1}{\ln\ln N - 1} = \varepsilon\left(\ln\ln N + \frac{\ln\ln N}{\ln\ln N - 1}\right).$$

En considérant la suite $(x_\alpha(\varepsilon))_{\alpha\geq 1}$ de la définition 2 on aura, d'après le Lemme 7,

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\frac{(\ln\ln N)^2}{\ln\ln N-1} = \frac{\ln(4/3)\ln\ln N}{\ln x_3} + \frac{\ln(4/3)}{\ln x_3}\frac{\ln\ln N}{\ln\ln N-1} \\ \left(\varepsilon = H(x,1) = H(x_3,3) = \frac{\ln(4/3)}{\ln x_3}\right). \end{array}\right\}$$

D'après le Lemme 7, on a

$$N \leq \prod_{x_4 < p \leq x_3} p^3 \times \cdots \times \prod_{x_{m+1} < p \leq x_m} p^m$$

où m est le plus grand indice tel que $x_m \geq 2 > x_{m+1}$ et l'on a

$$\left\{\begin{array}{c} m = \left[\frac{1}{2^\varepsilon - 1}\right] = \left[\frac{1}{2^{H(x_3,3)} - 1}\right] = \left[\frac{1}{2^{\frac{\ln(4/3)}{\ln x_3}} - 1}\right] \leq \frac{\ln x_3}{(\ln 2)(\ln(4/3))} \\ \left(\varepsilon = H(x_3,3) = \frac{\ln(4/3)}{\ln x_3}\right) \end{array}\right\}.$$

On a donc

$$\ln\ln N \leq \ln m + \ln\theta(x_3) \leq \ln\left(\frac{\ln x_3}{(\ln 2)(\ln(4/3))}\right) + \ln(\theta(x_3)).$$

Par ailleur on sait que $\theta(x_3) < 1.000081x_3$ $(x_3 > 0)$ ([8] page 360), alors

$$\frac{\ln(4/3)\ln\ln N}{\ln x_3} \leq \ln(4/3)\frac{\ln\left(\frac{\ln x_3}{(\ln 2)(\ln(4/3))}\right) + \ln(1.000081x_3)}{\ln x_3} < 0.25 \text{ pour } x_3 \geq 25.$$

Maintenant pour $x_3 \geq 25$, on a $\varepsilon = \frac{\ln(4/3)}{\ln x_3} \leq \frac{\ln(4/3)}{\ln 25}$, alors

$$N \geq N_{\frac{\ln(4/3)}{\ln 25}} = 2^{15} \times 3^9 \times 5^6 \times 7^5 \times 11^4 \times 13^3 \text{ d'où } \frac{\ln(4/3)}{\ln x_3}\frac{\ln\ln N}{\ln\ln N - 1} < 0.19.$$

On obtient ainsi la majoration

$$\varepsilon\frac{(\ln\ln N)^2}{\ln\ln N - 1} < 0.44 \text{ pour tout } N = N_\varepsilon \text{ tel que } \varepsilon \leq \frac{\ln(4/3)}{\ln 25}.$$

Dans la deuxième étape, on calcule par ordinateur tous les nombres $d^* - hcs$ associés à $\varepsilon \in \left]0, \frac{\ln(4/3)}{\ln 25}\right]$, ils sont 30 nombres et on constate que pour ces nombres le maximum de $f(n)$ est atteint au nombre

$$N = N_{\frac{\ln(11/10)}{\ln 2}} = 2^{10} \times 3^6 \times 5^4 \text{ avec } f(N) = 0.581000\ldots.$$

Bibliographie

[1] T. M. Apostol "Introduction to Analytic Number Theory" Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1976.

[2] A. Derbal, A. Smati, le nombre des diviseurs d'un entier dans les progressions arithmétiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **339** (2004), 87-90.

[3] J. L. Nicolas, G. Robin, Majorations explicites pour le nombre des diviseurs de n, Canad. Math. Bull. **26** (1983), 485-492.

[4] S. Ramanujan, Highly composite numbers, P. Lond. Math. Soc. Ser. 214 (1915) 347-400; S. Ramanujan, Collected Papers, Chelsea, 1962, pp. 78-128.

[5] O. Ramaré, R. Rumely, Primes in arithmetic progressions, Math. Comput. **65** (1996), 397-425.

[6] G. Robin, Grandes valeurs de fonctions arithmétiques et problèmes d'optimisation en nombres entiers, Thèse de doctorat es sciences Mathématiques de l'université de Limoges, 1983, Numéro d'ordre: $83 - 6$.

[7] J.B. Rosser et L. Schoenfeld, Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers, Illinois J. Math. **6** (1962), 64-94.

[8] L. Schoenfeld, Sharper Bounds for the ChebyshevFunctions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II, Math. of Comp. **30** (1976), 337-360.