École Polytechnique.

1ère Division.

1919

Cours d'Analyse[1]

Monsieur Humbert, Professeur.

Première Partie

Compléments au cours d'Analyse

par M. P. Lévy - Professeur suppléant.

VI. _ Notions sur le calcul de probabilité et la théorie cinétique des gaz.

1) Exemple simple de probabilité.

Considérons une urne contenant 10 boules, dont par exemple 4 rouges et 6 blanches. Sortons au hasard une boule de l'urne, et supposons que les conditions de l'expérience soient telles que les boules aient autant de chances d'être ainsi tirées.

Que signifie cette expression "autant de chances"? Nous reviendrons plus loin sur ce point. Étant donné qu'elle est d'un usage courant, il n'y a pas d'inconvénient à la considérer d'abord comme connue, et voir quelle conclusion on est conduit à en tirer. On discutera ensuite la valeur de cette notion et des conclusions qu'on en aura déduites.

Remettons la boule dans l'urne, et faisons une deuxième expérience dans des conditions identiques à la première, puis une troisième et ainsi de suite. A chaque expérience, toutes les boules ont autant de chances d'être tirées; les chances n'ont donc pas été modifiées par le résultat des expériences précédentes. Des 10^p successions possibles de p boules qui seront tirées au cours de p expériences, aucune n'a donc plus de chances de se présenter qu'une autre; elles sont toutes également probables.

Quelle est la probabilité pour que par exemple les boules rouges soient sorties q fois? Les $N = 10^p$ cas possibles étant également probables, si n est le nombre des cas dans lesquels on aura tiré q fois une boule rouge et $p-q$ fois une boule blanche, cette probabilité est par définition $\frac{n}{N}$. D'une manière générale, la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total de cas possibles, ces cas étant considérés comme également probables.

Si dans l'exemple considéré, on a fait 100 expériences, et qu'on cherche à évaluer la probabilité pour qu'on ait trouvé une boule rouge 10 fois ou moins de 10 fois, le calcul conduirait à une fraction excessivement petite. Le nombre des cas amenant au plus 10 boules rouges est pourtant très grand ; mais le nombre de cas possibles est bien plus grand encore, et la probabilité s'exprime par un nombre décimal comportant près de 30 chiffres nuls après la virgule. L'évènement considéré est très peu probable ; il est presque impossible.

Le bon sens confirme cette conclusion. Un témoin de cette expérience qui verrait que l'on n'a tiré une boule rouge que 10 fois sur 100, plutôt que de croire à un hasard tellement singulier, n'hésitera pas à affirmer, soit que le nombre de boules rouges n'est pas de $\frac{4}{10}$, soit que les boules rouges ont moins de chances d'être tirées que les autres, et qu'en tout cas cette circonstance ou une circonstance peu différente se reproduiront si on recommence la suite des 100 expériences.

Dans une autre expérience analogue, supposons un observateur qui saurait qu'il y a 10 boules, que toutes les boules ont autant de chances d'être tirées, et qui, ne pouvant compter directement le nombre de boules rouges, désirerait connaître ce nombre. Si après 50 tirages, il a vu 18 fois sortir une boule rouge, il pensera que ce nombre est 3 ou 4 ; après 100 expériences, si on a tiré 37 fois une boule rouge, il pensera que ce nombre est 4 ; le nombre 3 lui paraîtra peut être possible, et tout autre nombre exclu. Après 200 expériences, l'observateur estimant que la proportion de 4 boules rouges sur 10 boules sorties s'est maintenue assez longtemps, déclarera sans doute être sûr qu'il y a 4 boules rouges.

Cette conclusion montre bien le sens qu'on doit attacher à ce raisonnement : "Les 10 boules ayant le même nombre de chances de sortir, il y a 4 chances sur 10 de tirer une boule rouge". Cela ne veut pas dire que, sur 10 expériences, on tirera exactement 4 fois une boule rouge ; mais, sur un grand nombre d'expériences, on tirera sensiblement 4 fois sur 10 une boule rouge. L'éventualité contraire est, non impossible, mais si peu probable qu'on peut pratiquement la considérer comme impossible.

Pour donner un exemple plus net encore d'une circonstance très peu probable qu'on peut considérer comme impossible, on se refuserait certainement à croire qu'en tirant 10.000 fois de suite au hasard une lettre de l'alphabet, quelqu'un ait trouvé les 10.000 lettres qui constituent le début d'Athalie, ou même simplement qui constituent une phrase ayant un sens. Pourtant cet évènement n'est certainement pas impossible, mais seulement très peu probable.

2) La probabilité au point de vue mathématique.

Nous pouvons maintenant conclure sur la valeur de la notion de probabilité.

Au point de vue mathématique, la probabilité doit être considérée comme résultant d'une définition arbitraire. C'est par définition, s'il y a 10 boules, que nous dirons que la probabilité de sortir une boule donnée est $\frac{1}{10}$. Si nous recommençons p fois l'expérience, la probabilité de réaliser une succession déterminée de p boules est $\frac{1}{10^p}$, par suite de l'hypothèse que les coups n'influent pas les uns sur les autres.

Si nous ne voulons pas considérer que les 10 boules aient autant de chances de sortir, nous leur attribuerons des probabilités égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{10}$, les α étant des nombres positifs dont la somme est 1. C'est une autre définition. La probabilité pour qu'au cours de 3 expériences on trouve les boules d'indices i, j, k (dans l'ordre indiqué), est évidemment $\alpha_i\, \alpha_j\, \alpha_k$, (la loi de probabilité étant la même au cours des 3 expériences).

Quelle que soit la définition adoptée, c'est une simple question de calcul d'en développer les conséquences et d'évaluer la probabilité d'un évènement déterminé, dépendant de celui pour lequel on a initialement défini la probabilité. Les calculs peuvent être difficiles. Il n'y a pas de difficulté de principe.

3) La valeur pratique de la notion de probabilités.

L'exemple du N° 1 montre que la définition mathématique de la probabilité correspond bien à une réalité. La question se pose alors de reconnaître dans

un cas pratique si cette notion s'applique et quelle définition de la probabilité il y a lieu d'adopter.
Prenons d'abord l'exemple d'un jeu de hasard, reposant sur la désignation d'un numéro par une roue qui tourne et finit par s'arrêter, sa position finale indiquant le numéro gagnant. La théorie correspond-elle à la réalité ? On peut répondre à cette question de deux manières différentes.
On peut examiner la roue avec soin ; si elle est parfaitement régulière, et si les différents numéros sont également espacés sur la circonférence, on pourra penser que tous les numéros sont également probables.
Mais une meilleure solution est fournie par la méthode expérimentale. On fera, avant de commencer le jeu, des expériences préalables suffisamment nombreuses pour que chaque numéro puisse être désigné un grand nombre de fois. Cette expérience peut entraîner 3 conclusions possibles :
1° il peut arriver que les différents numéros sortent sensiblement le même nombre de fois, et que cette circonstance, apparaissant déjà dès que le nombre d'expériences est grand, subsiste tant que dureront les expériences. On considérera alors les numéros comme ayant la même probabilité.
2° il peut se produire des circonstances analogues, les différents numéros ayant des probabilités déterminées, mais non égales. Ces probabilités se trouvent obtenues expérimentalement.
3° il peut arriver que les probabilités ne soient pas déterminées, certains numéros se trouvant sortir par exemple plus souvent qu'à leur tour au cours d'une longue série d'expériences et moins souvent au cours d'une autre série. Quelle sera l'explication de cette circonstance ? Il faut supposer que d'une série d'expériences à l'autre une circonstance a varié (graissage de la roue, influence possible de l'opérateur, etc)
Tant que nous n'aurons pas découvert et corrigé cette cause, les différents numéros n'auront pas de probabilités de sortie déterminées. Il peut d'ailleurs arriver que certaines conséquences du calcul des probabilités puissent être appliquées si l'indétermination de ces différentes probabilités n'est pas grande. La méthode expérimentale présente sur celle exposée d'abord un avantage incontestable. Elle peut s'appliquer quelle que soit la complexité des causes qui agissent sur le phénomène étudié. Si la roue est régulière, on pourra sans doute affirmer à l'avance l'égale probabilité des différents numéros.
Il sera plus difficile, si elle est irrégulière, de prévoir la probabilité de chaque numéro. Pour certains phénomènes plus complexes, la théorie ou évaluation a priori des probabilités est impossible ; la méthode

expérimentale ou statistique est seule possible.
Tel est le cas pour les phénomènes sociaux. La statistique établit que, dans un pays déterminé le rapport du nombre annuel des des décès au chiffre de la population est presque constant d'une année à l'autre; si ce rapport est $3/100$, on peut dire qu'un habitant de ce pays pris au hasard (de sorte qu'on ne sait rien sur son âge, son état de santé) a 3 chances pour 100 de mourir au cours de l'année. La constance de l'observation faite montre que cette phrase correspond à une réalité. Mais, comme nul ne peut connaître suffisamment les causes multiples qui agissent sur le phénomène étudié, aucune théorie ne permet de prévoir cette probabilité de $3/100$. Elle existe cependant, et le calcul des probabilités s'applique aux phénomènes sociaux.
Il est toutefois essentiel de ne pas oublier que les statistiques ont été faites pour un pays déterminé, à une époque déterminée. Les résultats ne s'appliquent pas pour une autre race, pour un autre climat. Pour un même pays, un coefficient de mortalité, exact pendant longtemps, peut cesser de l'être par suite d'une guerre, d'une épidémie, ou d'un progrès de la médecine.
Comme conclusion, le calcul des probabilités s'appliquera toutes les fois que, cherchant à définir une probabilité, la statistique conduira à un nombre sensiblement constant pendant plusieurs expériences (ou même variant entre deux limites qu'il ne semble pas devoir dépasser). Les conclusions déduites de cette évaluation seront exactes tant qu'une cause d'erreur systématique n'aura pas modifié l'événement étudié entre le moment de l'évaluation de la probabilité et l'application qu'on en fait. Il ne faut jamais oublier de rechercher ces causes d'erreurs systématiques, qui peuvent souvent se trouver dans un phénomène insignifiant au premier abord. Si l'expérience est nécessaire pour nous fixer sur les conditions d'application du calcul des probabilités, la discussion du phénomène étudié et de ses causes peut servir à prévoir les modifications systématiques et éviter les conclusions inexactes.
4° Quelles peuvent être maintenant, dans les différents cas où ce calcul est légitime, ses applications pratiques?
Des coefficients de probabilité admis initialement pour certains événements, la théorie permet de déduire les probabilités d'événements qui en résultent. Il arrivera que certains événements auront des probabilités si faibles qu'on peut les considérer comme impossibles. Au point de vue pratique, on agira comme s'il était effectivement impossible; au point de vue scientifique on pourra considérer cette impossibilité comme une loi (voir N° 18 à 24).

5) Probabilités continues

Dans les exemples précédents, on a considéré des événements comportant un nombre fini de cas possibles, ayant chacun une probabilité déterminée.
La notion de probabilité s'applique aussi à des phénomènes dépendant d'un ou plusieurs paramètres.

Dans l'exemple d'une roue qui tourne, au lieu de disposer un nombre fini de numéros autour de la circonférence, on peut définir exactement la position finale de la roue par un angle α compris entre 0 et 2π. La roue sera régulière si toutes les valeurs de α sont également probables, c'est-à-dire si la probabilité pour que α soit dans un intervalle (α_1, α_2) est proportionnelle à $\alpha_2 - \alpha_1$, (par suite égale à $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi}$).

Une quantité quelconque, dépendant pour fixer les idées de 3 paramètres, peut-être représentée par un point x, y, z d'un certain volume V. On pourra admettre qu'à des éléments de volume égaux correspondent des probabilités élémentaires égales; on peut au contraire admettre qu'à chaque volume élémentaire dV correspond une probabilité $\varphi(x, y, z)\, dV$, (la fonction φ n'étant pas constante et son intégrale dans le volume V, qui représente la probabilité totale, étant finie et ayant la valeur 1).
De toute façon on définira la probabilité élémentaire, et par suite le calcul de la probabilité d'une circonstance déterminée, se traduisant géométriquement par le fait que le point x, y, z est dans une partie déterminée du volume V, se ramène au calcul d'une intégrale triple.

Il arrive souvent qu'on omette de préciser la loi de probabilité admise. Quand on parle d'un point pris au hasard dans un volume, peut-être n'y a-t-il pas grand inconvénient à cela tout le monde comprendra que les volumes élémentaires égaux correspondent à des probabilités égales. Mais dans d'autres cas il peut en résulter une ambiguïté sur le problème posé.

Demandons-nous par exemple quelle est la probabilité pour qu'une corde d'un cercle de rayon 1 soit à une distance du centre inférieure à $\frac{1}{2}$

On peut raisonner comme suit : par raison de symétrie, cette probabilité est la même pour toutes les directions de cordes.

Prenons donc seulement les cordes parallèles à une même direction. Leur distance au centre peut varier de 0 à 1, toutes les valeurs étant également probables. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{2}$.

On peut encore raisonner comme suit : par raison de symétrie, nous pouvons nous borner à considérer les cordes passant par un même point A.
Pour que la corde AB soit à une distance du centre inférieure à $\frac{1}{2}$, il faut choisir le point B sur le tiers du cercle opposé à A. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{3}$.

Les deux résultats ne sont pas contradictoires. La notion de droite prise au hasard n'étant pas définie, le problème est mal posé, et les deux résultats correspondent à deux définitions différentes de la probabilité. La première définition semble correspondre mieux aux conditions physiques qu'on réaliserait en laissant tomber une aiguille sur une feuille de papier et en ne tenant compte que des cas où l'aiguille ou son prolongement coupent le cercle ; (encore faut-il préciser les conditions de l'expérience ; si l'aiguille tombe toujours dans la même région, les faibles distances au centre sont plus probables que les autres). Mais au point de vue mathématique d'autres sont possibles. Il faut préciser la loi de probabilité admise, sans quoi la question posée n'a pas de sens.

(6) Le jeu de pile ou face.

Une partie de pile ou face, où chaque coup comprend deux éventualités également probables, donne le plus simple des problèmes de probabilité, et suffit pour mettre en évidence les circonstances qui se produiront dans toutes les questions de probabilité lorsque le nombre des cas considérés est grand.

Proposons-nous de déterminer, après n coups, la probabilité pour que le joueur A ait gagné p fois. La succession de n coups comporte 2^n parties également probables ; chacune peut être définie par l'indication des coups où A a gagné ; une partie où A a gagné p fois correspond donc à une combinaison de n objets p à p, et la probabilité cherchée est

$$\frac{C_n^p}{2^n} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!\,2^n}$$

La valeur de p la plus probable, si par exemple $n = 2q$, est q, et la probabilité correspondante est

$$\frac{(2q)!}{2^{2q}\,(q!)^2},$$

quantité équivalente à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi q}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}},$$

d'après la formule de Stirling qui nous apprend que $n!$ est équivalent à

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Si nous cherchons alors la probabilité pour que le nombre de parties gagné par A soit compris entre q et $q + a$, a restant fini, cette probabilité sera au plus égale au produit par a de la probabilité précédente, et tend vers 0 avec $\underline{1}$. Pour avoir une probabilité finie il faut que a devienne infini, au moins comme $\sqrt{n}$.

Cherchons la probabilité pour que le nombre ~~$n!$~~ de parties gagné par A soit compris entre

$$(2) \qquad \frac{n}{2} + \alpha\sqrt{n}, \qquad \frac{n}{2} + \beta\sqrt{n}.$$

Le nombre de valeurs entières comprises entre deux limites est équivalent à $(\beta - \alpha)\sqrt{n}$. La probabilité moyenne de ces différentes valeurs est

$$\frac{n!}{2^n\,p!\,(n-p)!}, \qquad p = \frac{n}{2} + \gamma\sqrt{n},$$

γ étant une certaine valeur comprise entre α et β, (d'après le théorème de la moyenne; si le nombre p n'est pas entier, il faut remplacer les factorielles par des fonctions eulériennes, ce qui n'empêche pas d'appliquer la formule de Stirling).

La probabilité pour que M soit compris entre les limites (2) est donc de la forme

$$(3) \qquad \frac{(\beta-\alpha)\sqrt{n}\quad n!}{2^n\, p!\,(n-p!)}$$

cherchons la valeur principale de cette expression. Celle de $p!(n-p)!$, p étant équivalent à $\frac{n}{2}$, $(p = \frac{n}{2} + \gamma\sqrt{n})$, est

$$\Pi\, n \left(\frac{n}{2}+\gamma\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}+\gamma\sqrt{n}} \left(\frac{n}{2}-\gamma\sqrt{n}\right)^{\frac{n}{2}-\gamma\sqrt{n}} e^{-n}$$

$$= \Pi\, n \left(\frac{n}{2}\right)^n \left(1-\frac{4\gamma^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \left(1+\frac{2\gamma}{\sqrt{n}}\right)^{\gamma\sqrt{n}} \left(1-\frac{2\gamma}{\sqrt{n}}\right)^{-\gamma\sqrt{n}} e^{-n}$$

ou encore, en remplaçant les facteurs finis par leur limite,

$$\Pi\, e^{2\gamma^2}\, n \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

on en déduit, pour l'expression (3), la valeur limite

$$(4) \qquad (\beta-\alpha)\sqrt{\frac{2}{\Pi}}\; e^{-2\gamma^2}$$

γ étant compris entre α et β.

Si en particulier l'intervalle est infiniment petit, la probabilité pour que le nombre de coups gagnés par A soit compris entre $\frac{n}{2} + \alpha\sqrt{n}$ et $\frac{n}{2} + (\alpha + d\alpha)\sqrt{n}$ est

$$(5) \qquad \sqrt{\frac{2}{\Pi}}\; e^{-2\alpha^2}\, d\alpha.$$

Dans le cas considéré, l'enjeu de chaque coup étant ε, le gain du joueur A est $2\varepsilon\alpha\sqrt{n}$.

On peut exprimer ce résultat en disant que la valeur moyenne de ce gain est nulle, et que l'écart entre ce gain et sa valeur moyenne se comporte comme une erreur, obéissant à la loi de Gauss, et dont la valeur quadratique moyenne est $\varepsilon\sqrt{n}$.

(7) Loi de Bernoulli. –

Le résultat précédent constitue, dans le cas du jeu de pile ou face, la loi Bernoulli. Il montre nettement, bien que théoriquement le gain du joueur A puisse atteindre εn, que la probabilité pour que ce gain dépasse en valeur absolue $\varepsilon\alpha\sqrt{n}$ est négligeable si α est grand.

Cette probabilité a en effet la valeur

$$(6) \quad 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_\alpha^\infty e^{-2x^2}\,dx,$$

et on sait combien cette expression décroît rapidement quand α augmente. Elle est représentable par un nombre décimal dans lequel le nombre de zéros suivant la virgule est sensiblement

$$\frac{2\alpha^2 + \frac{1}{2}\log 2\pi\alpha^2}{\log 10},$$

soit à peu près α^2. On conçoit donc, dès que α est grand, (la valeur 5 peut déjà être considérée comme très grande) et dès que n est assez grand pour que la probabilité soit sensiblement égale à sa valeur limite (6), qu'on puisse considérer comme pratiquement impossible que le gain du joueur A soit supérieur à $\varepsilon\alpha\sqrt{n}$, et par suite son gain moyen à $\frac{\varepsilon\alpha}{\sqrt{n}}$.

(8) Cas du jeu à chances inégales.

Considérons un jeu dans lequel le joueur A a une probabilité λ, à chaque coup, d'effectuer un gain a, et une probabilité μ d'effectuer un gain b ($\lambda + \mu = 1$, a et b peuvent être positifs ou négatifs.)

après n coups, la probabilité pour qu'il ait gagné p fois (en disant qu'il gagne lorsqu'il obtient le gain a) est évidemment

$$C_n^p \; \lambda^p \; \mu^{n-p}$$

En partant de cette valeur, et par un calcul tout-à fait identique à celui du N° 6, que nous ne recommençons pas, on obtient le résultat suivant :

Le gain probable [c'est à la fois le gain moyen, moyenne des gains possibles en tenant compte de la probabilité de chacun ; le gain probable, qui a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être dépassé ; et le gain le plus probable, qui a plus de chance qu'aucun autre d'être réalisé à l'erreur près $b - a$], s'obtient en supposant que les deux éventualités possibles se sont produites des nombres de fois précisément proportionnels à leurs probabilités respectives α et β. Il a donc la valeur

$$n\left(a\lambda + b\mu\right) = nE$$

la quantité $E = a\lambda + b$ étant ce qu'on appelle l'espérance mathématique du joueur A.

L'écart par rapport à cette valeur se comporte comme une erreur obéissant à la loi de Gauss, et ayant comme valeur quadratique $\mathcal{E}\sqrt{n}$, en posant

$$\mathcal{E} = \sqrt{\lambda\mu}\;|b-a|$$

Telle est l'extension de la loi de Bernouilli. Il en résulte que, si E n'est pas nul, il est pratiquement impossible que cet écart soit supérieur à $5\,\mathcal{E}\sqrt{n}$ (en prenant $\alpha = 5$), quantité inférieure à $|E|\,n$ si n est grand. Donc le signe du gain, après un grand nombre de coups, sera sûrement celui du terme $E\,n$, c'est-à-dire celui de E, et sa valeur principale sera $E\,n$.

9) Cas du jeu comportant plus de deux éventualités.

Considérons un jeu où le joueur a à chaque coup la possibilité de gains $a_1, a_2, \dots, a_p$; de probabilités respectives $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

sur n coups, le nombre n' de ceux qui auront entraîné des gains égaux à a_1 ou a_2 sera sensiblement $n\,(\lambda_1 + \lambda_2)$.

En appliquant les règles du jeu à deux éventualités (d'une part a_1 ou a_2, d'autre part les autres gains), on voit que n' diffère de $n(\lambda_1+\lambda_2)$ par un terme au plus de l'ordre de $\sqrt{n}$, sauf dans des cas de probabilité aussi faible qu'on veut. On peut dire que n' est équivalent à $n(\lambda_1+\lambda_2)$.
Les résultats du N° 8 nous montrent alors qu'on commet une erreur obéissant à la loi de Gauss, de valeur quadratique moyenne

$$\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}\ |a_2-a_1|\sqrt{n},$$ en remplaçant tous les gains

égaux à a_1 ou a_2 par leur valeur moyenne $\dfrac{a_1\lambda_1+a_2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.
On est alors ramené à un problème analogue où p est remplacé par $p-1$.
De proche en proche, on arrive au cas d'un jeu où chaque coup entraîne le gain

$$E = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_p\lambda_p$$

de sorte que le gain après n coups est nE. On a commis une série d'erreurs, obéissant à la loi de Gauss, de l'ordre de $\sqrt{n}$, et <u>indépendantes les unes des autres</u> (point aisé à vérifier). L'erreur totale (voir cours d'astronomie) obéit encore à la loi de Gauss et est de l'ordre de $\sqrt{n}$. Il reste à préciser sa grandeur exacte.
Pour simplifier les formules, nous supposerons $E=0$. Le cas général se ramène à celui-là en retranchant E de chacune des quantités $a_1, a_2, \dots, a_p$. L'erreur sur chaque gain (écart entre sa valeur et E) est alors égale à ce gain, et le carré de l'erreur quadratique moyenne, pour un coup est

$$E_2 = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_p a_p^2 .$$

Or, si on joue successivement plusieurs coups, (du même jeu ou de jeux différents), les quantités, telles que E_2) s'ajoutent (voir N° 12); par suite après un grand nombre n de coups identiques au premier, l'erreur quadratique moyenne est $E_2\sqrt{n}$.
La loi de probabilité de cette erreur est ainsi bien déterminée.

(10) Les résultats précédents peuvent s'étendre au cas d'un jeu où le résultat de chaque coup dépend d'une loi de probabilité continue.

admettons, pour éviter toute difficulté, que la valeur absolue du gain ne peut dépasser une limite M. La probabilité d'un gain compris entre a et a + d a est alors f (a) d a, la fonction f (a) vérifiant la condition

$$\int_{-M}^{+M} f(a)\, da = 1,$$

On peut supposer que l'espérance mathématique

$$E = \int_{-M}^{+M} a\, f(a)\, da$$

est nulle, puisque le cas général se ramène aisément à celui-là en remplaçant a par a - E, ce qui diminue de E n le gain après n coups. Nous supposerons donc E = 0

On peut avec une erreur aussi petite que l'on veut remplacer la loi de probabilité f considérée par une loi de probabilité ne comportant qu'un nombre fini de valeurs distinctes. On peut donc admettre que le résultat relatif à ce cas s'applique ici. (Raisonnement non rigoureux.). Après n coups, le gain se comporte comme une erreur obéissant à la loi de Gauss, dont la valeur quadratique moyenne est $\mathcal{E}\sqrt{n}$, avec

$$\mathcal{E}^2 = E_2 = \int_{-M}^{+M} \alpha^2 f(\alpha)\, d\alpha$$

(11) Généralisation. Remarques sur la loi de Gauss

On a vu en astronomie que deux erreurs obéissant à la loi de Gauss ont pour résultante une erreur obéissant à la même loi. Nous venons de voir qu'un grand nombre d'erreurs, ayant même loi de probabilité, ont pour résultante une erreur dont la loi de probabilité diffère très peu de la loi de Gauss. Cette loi apparaît comme une limite stable dont les erreurs en se composant se rapprochent de plus en plus.

Pour compléter ce résultat, il reste à voir s'il est vrai lorsque les erreurs différentes ont des lois de probabilité différentes; (en d'autres termes lorsqu'on joue un grand nombre de coups de jeux différents).

Si dans les différents coups, les espérances mathématiques E, E', E'',..., ne sont pas nulles, la valeur moyenne du gain après n coups sera E + E' + E'' + ... Ce point étant remarqué, nous n'avons qu'à étudier l'excès du gain sur cette valeur, c'est-à-dire que nous pouvons supposer $E = E' = \dots = 0$. (En d'autres termes les erreurs que nous considérons ne sont pas systématiques.)

(12) Pour ne pas examiner successivement le cas des probabilités continues et le cas des probabilités discontinues, nous n'écrirons les formules que dans le premier cas. Les raisonnements sont les mêmes dans le second cas, les sommes finies des séries étant remplacées par des intégrales.

Le premier coup sera défini comme au N° 9 par les gains $a_1, a_2, \dots, a_p$ de probabilités $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Introduisons des nombres que nous appellerons les coëfficients caractéristiques, définies par la formule

$$E_k = \lambda_1 a_1^k + \lambda_2 a_2^k + \dots + \lambda_p a_p^k, \quad (k = 1, 2, \dots, \infty)$$

$E_1 = E = 0$, par hypothèse. Le premier coëfficient caractéristique non nul est donc E_2, carré de l'erreur quadratique moyenne.

Soit un second coup, dans lequel le gain b_j a pour probabilité μ_j. Les coëfficients caractéristiques seront $E'_k = \mu_1 b_1^k + \dots + \mu_q b_q^k$.

Après les deux coups, le gain $a_i + b_j$ aura pour probabilité $\lambda_i \mu_j$, et pour l'ensemble des deux coups, les coëfficients caractéristiques seront

$$F_k = \sum_{i,j} (a_i + b_j)^k \lambda_i \mu_j$$
$$= \sum_{h,i,j} C_k^h \lambda_i a_i^h \mu_j b_j^{k-h}$$
$$= \sum_h C_k^h E_h E'_{k-h}$$

ou

(7) $$F_k = (E_1 + E'_1)^{(k)}$$

L'exposant indiquant une puissance symbolique, $E_1^{(2)}, E_1^{(3)}, \dots$ etc étant remplacés successivement quand on la calcule par $E_2, E_3, \dots$ etc.

Pour $k = 2$, comme $E_1 = E'_1 = 0$, il vient

$$F_2 = E_2 + E'_2$$

résultat admis N° 9

Pour plus de 2 coups, on aurait de même

(8) $$F_k = (E_1 + E'_1 + E''_1 + \dots)^{(k)}$$

(9) $$F_2 = E_2 + E'_2 + E''_2 + \dots$$

13) Nous ne pouvons pas songer à obtenir la loi de Gauss sans faire certaines hypothèses.
Pour simplifier, nous supposerons (hypothèse non essentielle) que les lois de probabilité sont symétriques, de sorte que tous les coëfficients caractéristiques d'indices impairs sont nuls.
Les quantités

$$m_2 = \sqrt{E_2}\ , \quad m_4 = \sqrt[4]{E_4}\ , \ldots\ , \qquad m_{2k} = \sqrt[2k]{E_{2k}}\ , \ldots,$$

sont ce qu'on peut appeler les moyennes d'ordres respectifs 2, 4, ..., 2k, ... de l'erreur. Il est facile de montrer qu'elles vont en croissant. Si l'erreur considérée est finie, ces quantités ne peuvent évidemment dépasser sa limite supérieure. Mais, si l'erreur considérée peut devenir indéfinie, ces moyennes successives deviennent indéfinies. Ainsi, dans le cas d'erreurs obéissant à la loi de Gauss, on trouve aisément

$$(11) \qquad m_{2k} = m_2 \sqrt[2k]{1.3.5\ldots(2k-1)}\ ,$$

quantité équivalente, pour k très grand, à $\sqrt{2k}$. Pour que la suite des m_{2k} croisse plus rapidement encore, il suffirait que la probabilité d'erreurs très grandes décroisse moins rapidement que dans la loi de Gauss. Tel serait le cas, par exemple, si la probabilité pour que l'erreur soit comprise entre α et $\alpha + d\alpha$ était de la forme

$$f(\alpha)\, d\alpha = \frac{c\, d\alpha}{e^{a\alpha} + e^{-a\alpha}}$$

a et c étant des constantes.
La démonstration de la loi de Gauss serait impossible, (la loi pouvant même être en défaut dans ce cas) si pour certaines des erreurs partielles les moyennes d'ordres 2k croissaient trop rapidement. Nous supposerons donc qu'il existe une suite croissante déterminée $M_2, M_4, \ldots, M_{2k}, \ldots,$ telle que, <u>pour toutes les erreurs partielles</u>, on ait

$$(12) \quad m_2 \leqq M_2 \qquad \frac{m_{2k}}{m_2} \leqq \frac{M_{2k}}{M_2}$$

c'est-à-dire

$$(13) \quad E_2 < \mathcal{E}_2\ , \qquad E_{2k} \leqq \mathcal{E}_{2k}\left(\frac{E_2}{\mathcal{E}_2}\right)^k \text{ en posant } \mathcal{E}_{2k} = M_{2k}^{2k}.$$

Nous supposerons de plus que la suite des M_{2k} ne croisse pas trop rapidement; d'une manière précise nous supposerons que

$$\frac{M_{2k}}{\sqrt{k}} \quad \text{reste fini.}$$

Enfin, pour que chaque erreur puisse être considérée comme très petite par rapport à l'erreur totale, nous supposerons que

$$F_2 = E_2 + E'_2 + E''_2 + \dots ,$$

devient très grand par rapport à $\mathcal{E}_2$, même si certains des termes E_2, $E'_2, \dots$, sont très petits par rapport aux autres, et par suite par rapport à $\mathcal{E}_2$. Nous considérons donc comme très grand non seulement le nombre de coups (ou d'erreurs indépendantes), mais le rapport

$$n = \frac{F_2}{\mathcal{E}_2} .$$

Ces hypothèses faites, nous pouvons donner une idée de la démonstration de la loi de Gauss.

(14) Posons

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos z\alpha \, d\alpha ,$$

ou

$$\varphi(z) = \lambda_1 \cos a_1 z + \lambda_2 \cos a_2 z + \dots$$

suivant que la loi de probabilité considérée est continue ou discontinue. (Notations du N° 10 dans le premier cas ou du N° 9 dans l'autre). On peut même considérer des cas plus généraux où la loi de probabilité comprend des termes des deux sortes ; la définition de $\varphi(z)$ s'étend aisément à ces cas).

Il résulte d'un théorème célèbre de Fourier, dont nous ne pouvons donner ici la démonstration, qu'une loi de probabilité symétrique est parfaitement définie si on connaît la fonction $\varphi(z)$.

Si l'erreur considérée est finie (c'est-à-dire si les a_i sont finis et si $f(\alpha)$ est nul pour α assez grand), la fonction $\varphi(z)$ est évidemment entière. On peut démontrer qu'il en est de même, dans le cas des erreurs pouvant devenir infinies, en vertu de l'hypothèse que $\frac{m_{2k}}{\sqrt{k}}$ reste fini.

(On pourrait même pour ce point remplacer $\sqrt{k}$ par une autre puissance d'exposant inférieur à 1). La fonction $\varphi(z)$, qui est paire, est alors parfaitement définie par les valeurs de ses dérivées d'ordres pairs pour $z = 0$. Or on vérifie immédiatement que, au facteur $(-1)^k$ près, ces dérivées sont précisément les coëfficients caractéristiques.

La loi de probabilité, continue ou non, est donc parfaitement définie par la suite des coëfficients caractéristiques. (Ici ceux d'ordres pairs sont seuls différents de zéro. Si on n'avait pas supposé la loi de probabilité symétrique, il faudrait les considérer tous).

(15) Nous avons vu que, dans le cas d'erreurs obéissant à la loi de Gauss, on avait la formule (11), ou ce qui revient au même

$$(14) \qquad E_{2k} = E_2^k \times 1.3.5 \ldots (2k-1).$$

D'après ce qui précède, cette relation (jointe naturellement à $E_{2k+1} = 0$), caractérise la loi de Gauss, le seul coefficient E_2 qui reste indéterminé correspondant au paramètre arbitraire qui figure dans cette loi.

Pour démontrer que la loi de probabilité correspondant à l'erreur résultante tend vers celle de Gauss, nous pouvons chercher à démontrer que ses coefficients tendent à vérifier la relation (14). Nous allons le démontrer pour $k = 2$. La démonstration serait analogue pour les autres valeurs de k. Nous reviendrons ensuite sur la légitimité de la conclusion.

(16) La formule asymptotique à démontrer est donc

$$F_4 = 3\, F_2^2 ,$$

F_4 et F_2 étant définis, d'après (8) et (9), par

$$(15) \quad \begin{cases} F_2 = E_2 + E_2' + E_2'' + \ldots\ldots \\ F_4 = (E_4 + E_4' + \ldots\ldots) + 6\,(E_2\, E_2' + \ldots\ldots). \end{cases}$$

Posons

$$(16) \quad \begin{cases} E_4 = (3 + \omega)\, E_2^2 , \quad E_4' = (3 + \omega')\, E_2'^2 , \ldots\ldots , \\ F_4 = (3 + \Omega)\, F_2^2 \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que Ω est nul, ou du moins tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Les relations (15), transformées en tenant compte de (16), donnent par un calcul facile

$$\Omega = \frac{\omega E_2^2 + \omega' E_2'^2 + \dots}{F_2^2}$$

Or, d'après (13), on a

$$\omega < \omega + 3 = \frac{E_4}{E_2^2} \leq \frac{\mathcal{E}_4}{\mathcal{E}_2^2} = \mu,$$

et les quantités ω', ω'', ..., sont inférieures à une même quantité μ indépendante de n. Donc, E_2, E_2', ..., étant de même inférieurs à $\mathcal{E}_2$

$$\Omega < \mu \, \mathcal{E}_2 \, \frac{E_2 + E_2' + \dots}{F^2} = \frac{\mu \, \mathcal{E}_2}{F_2} = \frac{\mu}{n}$$

Donc Ω tend bien vers 0 lorsque n devient infini.

(16) On montrerait de même que l'erreur résultante vérifie à la limite l'équation (14) pour toutes les valeurs de k, c'est-à-dire que les quantités

$$\frac{F_{2k}}{F_2^k} - 1.3.5 \dots (2k-1)$$

tendent vers 0. Mais elles ne tendent pas vers 0 uniformément, de sorte que, si on se donne un nombre ε très petit, elles ne deviennent que successivement inférieures à ce nombre. On conçoit donc qu'il n'est pas évident que la loi de probabilité tend vers celle de Gauss (expression dont le sens est d'ailleurs à préciser).
Une discussion que nous ne pouvons indiquer ici, permet d'arriver au résultat, mais en supposant essentiellement que la suite des M_{2k} ne croisse pas trop rapidement (hypothèse indiquée au N° 13).

Quoi qu'il en soit, ce que nous avons dit suffit pour faire comprendre comment il se fait que les erreurs en se composant, donnent une erreur résultante qui se rapproche de la loi de Gauss. C'est d'ailleurs ce que l'expérience confirme pleinement toutes les fois qu'une vérification est possible.

(17) Applications diverses.

Le résultat précédent s'applique toutes les fois qu'un phénomène dépend d'un très grand nombre n de causes indépendantes comme le gain final d'un joueur dépend des résultats des différents coups même de jeux différents ou comme une erreur résultante dépend des erreurs composantes. La valeur probable de la quantité qui définit ce phénomène (soit E de la théorie précédente) est de l'ordre de n, et l'écart par rapport à cette valeur est de l'ordre de $\sqrt{n}$. Cet écart, très grand, est <u>relativement</u> très petit par rapport à n. Comme dans les applications n est d'un ordre déterminé, et non infini, et que le phénomène étudié résulte de phénomènes mesurés par un nombre ε très petit, cet écart, de l'ordre de $\varepsilon\sqrt{n}$, peut être d'une grandeur appréciable, ou au contraire négligeable.

Dans le premier cas, il résulte de la théorie précédente qu'il obéit à la loi de Gauss (théorie des erreurs, théorie des jeux de hasard et des assurances), et si le phénomène étudié se répète un grand nombre de fois, on peut le vérifier expérimentalement (statistiques de toute sorte de phénomènes; si, dans une question de statistique, on trouve par rapport à un nombre moyen un écart sensible n'obéissant pas à la loi de Gauss, c'est l'indice d'une cause d'écart systématique que l'on peut le plus souvent trouver). De toute façon, on peut, d'après la loi de Gauss, fixer aux écarts une limite supérieure qui ne sera presque sûrement pas dépassée

Dans le deuxième cas, l'écart étant négligeable, les lois résultant du calcul des probabilités sont susceptibles d'un énoncé dans lequel la notion de probabilité ne figurera plus.

Cela se produira lorsque le nombre n sera particulièrement grand. Tel est le cas dans la théorie cinétique des gaz, où le nombre très grand n'est pas de l'ordre des milliers ou des millions, comme dans les applications indiquées ci-dessus, mais d'un ordre de grandeur bien supérieur même aux milliards. Nous allons donner quelques indications sur cette théorie

(18) <u>La théorie cinétique des gaz. Notions générales</u>

D'après une hypothèse que les progrès de la science rendent de plus en plus vraisemblable, les gaz sont constitués par un grand nombre de molécules très petites et constamment en mouvement. Par leurs petites dimensions, elles échappent à l'observation directe, et leur

répartition régulière donne au gaz l'apparence de l'homogénéité.
Considérons une masse gazeuse comprenant 10^{24} molécules identiques. Malgré la grandeur de ce nombre, cela ne représente pas une grande masse, mais seulement environ 3 grammes d'hydrogène ou 50 d'oxygène (Voir N°24).
Divisons par la pensée en deux parties égales A et B le volume occupé par cette masse gazeuse, et demandons-nous si les deux parties vont comprendre le même nombre de molécules. Si dans la partie A par exemple, il y avait à un moment donné beaucoup plus que 5×10^{23} molécules, les molécules dont la vitesse est dirigée de B vers A seraient sans doute bientôt arrêtées par les chocs nombreux qui en résulteraient, tandis que celles qui ont une vitesse en sens inverse pénétreraient plus facilement dans B, et l'égalité tendrait à se
Vu l'impossibilité de suivre dans le détail un nombre si grand de molécules, nous pouvons chercher à nous faire une idée de leur répartition à un instant donné en admettant que chacune d'elles ait 1 chance sur deux d'être dans le volume A, et qu'en conséquence le nombre total de molécules qui s'y trouvent effectivement correspond au nombre de coups gagnants dans une partie de $n = 10^{24}$ coups de pile ou face. Est-il possible, dans ces conditions, que ce nombre dépasse $\frac{n}{2}$ de plus de $n \times 10^{-6} = 10^{18}$! Cet écart, quoique très grand, serait insensible à nos moyens d'observation et le gaz pourrait être considéré comme absolument homogène. Pourtant, nous allons voir que même un tel écart est tout-à-fait invraisemblable.
En effet, si nous le mettons sous la forme $\alpha\sqrt{n}$, on a $\alpha = 10^6$, et d'après le N°7, la probabilité d'une telle circonstance se mesure par un nombre décimal dans lequel la virgule est suivie de près le 10^{12} zéros, soit près de mille milliards. C'est un nombre si petit qu'aucune comparaison ne peut en donner une idée et en admettant qu'on répète une expérience des milliards de milliards de fois pour observer cette circonstance (1), nous pouvons affirmer qu'on y arrivera jamais. Le résultat obtenu constitue alors une loi physique, déduite de la théorie et vérifiée par l'expérience, qui s'énonce comme suit :

Un gaz enfermé dans un volume déterminé s'y répartit d'une manière homogène, (à moins de cause d'erreur systématique : cas du gaz pesant, ou cas où l'état d'équilibre n'a pas encore eu le temps de s'établir.)

On se rend compte de même que si l'on étudie, soit les vitesses des molécules, soit, dans le cas d'un mélange gazeux la proportion des molécules des gaz composants, on trouvera toujours le même résultat dans les différentes parties du volume gazeux ; si on étudie les directions des vitesses des molécules, toutes les directions sont également probables (principe d'isotropie). Aucune hétérogénéité, aucune organisation de la masse gazeuse

(1) Ne pas oublier qu'un événement très peu probable peut acquérir une probabilité appréciable si on multiplie le nombre d'expériences tendant à le réaliser.

ne peut s'établir spontanément ; si ce n'est pas logiquement impossible, ce serait un de ces hasards si surprenants que sa possibilité doit être exclue.

(19) Phénomènes réversibles et irréversibles.

Sans entrer dans le détail d'aucun calcul nous pouvons d'abord répondre à une objection que l'on peut être tenté de faire à la théorie cinétique des gaz, et qui disparaît si l'on a bien compris le véritable caractère des lois déduites du calcul des probabilités.

Dans le mouvement des différentes molécules, on admet l'application des lois de la mécanique rationnelle. Le choc de deux molécules est en première approximation comparable à celui de deux sphères parfaitement élastiques (au moment du choc, les deux sphères sont tangentes : les composantes normales des vitesses s'échangent ; les composantes tangentielles ne varient pas) ; le développement de la théorie conduit à admettre que le choc est précédé d'une répulsion des deux molécules suivant une force fonction de la distance, et dans d'autres cas il faut les assimiler à des corps autres que les sphères. Quoi qu'il en soit ce sont là des lois qui ne changent pas si dans leur expression analytique on change le signe du temps ; les phénomènes régis par elles sont des phénomènes réversibles.

Comment dès lors expliquer par ces lois des phénomènes irréversibles ? Comment expliquer la loi d'après laquelle deux masses gazeuses au contact arrivent à se mélanger complètement, même si au début elles différaient par la nature des gaz ou leur pression ou leur température ? Comment expliquer toutes les règles de la thermodynamique qui se rattachent au principe de Carnot et la notion d'entropie ?

Prenons, pour choisir un de ces exemples, celui de deux masses gazeuses ne différant que par leurs températures (la température est liée, comme nous le verrons, à la vitesse des molécules). Elles vont se mélanger.

Au moment où elles seront mélangées, concevons une masse gazeuse identique à celle obtenue par le nombre et les positions des molécules, mais où les vitesses seront changées de signe; elle devra repasser dans l'ordre inverse par tous les états où était passé le mélange considéré d'abord, pour finir par se séparer en deux masses de températures différentes, ce qui est contraire aux principes de la thermodynamique.

L'explication est très simple: cette circonstance n'est pas logiquement impossible, d'après les lois élémentaires qui régissent les mouvements des molécules. Mais il serait surprenant que les molécules aient précisément les positions et les vitesses initiales voulues pour que cette circonstance se produise, et cette circonstance est si peu probable qu'on peut la considérer comme impossible. Il est donc pratiquement impossible que l'état final d'un gaz se trouve composé de deux masses à des températures différentes. Mais il n'y a rien d'impossible à ce qu'un tel état soit son état initial, si on l'a produit en amenant au contact deux masses gazeuses différentes.

Malgré la symétrie des lois du mouvement, l'hétérogénéité possible pour l'état initial, ne l'est pas pour l'état final, et la contradiction disparaît.

(20) Loi de répartition des vitesses.-

D'après le principe de l'isotropie, toutes les directions de vitesse sont également probables c'est-à-dire, si sur une sphère on considère deux aires égales, la vitesse d'une molécule située au centre a autant de chances d'être dirigée vers un point de l'une ou de l'autre de ces aires. Que peut-on dire des grandeurs de ces vitesses?

Peut-on avoir une idée de leur répartition dans le cas où toutes les molécules sont identiques, en pensant que tout se passe comme si pour une molécule les chocs des autres molécules étaient des impulsions très petites et indépendantes? Dans ce cas la probabilité de la vitesse d'une molécule à un instant donné répondrait à la formule de Gauss, et ju le grand nombre des molécules, à un instant donné, les différentes vitesses possibles seraient réalisées des nombres de fois presque exactement proportionnels à leurs probabilités, d'après cette formule. Le seul coëfficient indéterminé qui existe dans cette formule est alors défini par la vitesse quadratique moyenne, liée à la force vive, qui conserve nécessairement sa valeur initiale.

Mais notre comparaison est inexacte. Les chocs reçus par une molécule ne sont ni très petits ni indépendants. L'impulsion donnée à une molécule au moment du choc avec une autre est en effet du même ordre que la vitesse relative. D'autre part les effets probables du choc, au point de vue de la valeur de la vitesse finale dépendent essentiellement de la vitesse initiale. Les lois du choc de deux sphères élastiques sont telles qu'il peut arriver que la sphère animée de la plus grande vitesse reçoive encore un supplément de vitesse. Mais, si une molécule a une vitesse plus grande que la plupart des autres, les chocs les plus probables sont ceux qui diminuent sa vitesse; si sa vitesse est faible, elle a au contraire des chances d'augmenter par des chocs (1). On se rend compte que par la répartition de ces chocs, on a chance d'arriver à un état de régime stable, dans lequel les différentes vitesses possibles ont des probabilités bien déterminées. Cette loi de répartition correspondant précisément à celle de Gauss.

La comparaison indiquée au début, quoique correspondant

---

(1) Exercice proposé. - Démontrer la proposition qui vient d'être énoncée. En admettant la loi de Gauss pour la répartition des vitesses des différentes molécules, trouver la loi de probabilité pour la vitesse v_1 après un choc d'une molécule ayant avant le choc la vitesse v_0. On n'oubliera pas que la probabilité pour que le choc ait lieu avec une molécule de vitesse u est proportionnel à la probabilité de cette vitesse, mais aussi à la grandeur de la différence géométrique $v_0 - u$. Comparer à la note du N° 21.

à un problème mathématique très différent, donne une idée très juste du résultat. La loi de Gauss pour la répartition des vitesses est bien une loi stable, qui a chance de subsister si elle est établie, (point relativement aisé à démontrer), et qui a chance de s'établir, chance très grande équivalant à une certitude, si elle ne l'est pas (point plus délicat, discuté avec soin par Maxwell, Lorentz et Boltzmann).

(21) Calcul de la pression.—

On peut obtenir, par un calcul très simple la pression qui existera sur les parois d'une enceinte remplie de gaz. Soit ds un élément de surface. Chaque molécule (dans le cas d'un gaz unique toutes les molécules ont même masse m) heurtant la paroi avec une vitesse normale u (les autres composantes de la vitesse n'interviennent pas), prendra après le choc une vitesse normale de sens contraire, et aura donc donné à la parois une impulsion $2\,m\,u$. Si α est le nombre de chocs correspondant à des molécules de vitesse normale u pendant le temps dt, l'impulsion totale sera $2\sum m\,\alpha\,u$, et elle équivaudra à une pression p telle que

$$p\,ds\,dt = 2\sum m\,\alpha\,u = 2\,m\sum \alpha\,u$$

Pour calculer α, appelons β la probabilité de la vitesse u dirigée vers la paroi ou en sens contraire, et N le nombre de molécules par unité de volume, de sorte que $N\,m = \rho$ est la densité. Les molécules de vitesse normale u, dans le petit cylindre de base ds et de hauteur $u\,dt$, sont en nombre $\beta N u\,ds\,dt$, et la moitié, soit $\frac{\beta}{2} N u\,ds\,dt$, auront leur vitesse dirigée vers la paroi. Tel est donc le nombre α des molécules qui arriveront à la paroi pendant le temps dt (1)

---

(1) Le nombre α des chocs de la paroi avec des molécules ayant la vitesse normale u est donc proportionnel à βu. Comparer avec l'exercice proposé en note du N° 20.

en admettant que si certaines sont deviées par des chocs avant d'arriver à la paroi, d'autres prendront cette vitesse par suite des chocs, et qu'il y aura compensation.

En remplaçant alors α par sa valeur, il vient

$$p = m N \Sigma \beta u^2 = \rho \Sigma \beta u^2$$

$\rho \Sigma \beta u^2$ est la force vive des masses constituant l'unité de volume, pour les composantes normales des vitesses. D'après le principe d'isotropie, les composantes des vitesses suivant deux directions perpendiculaires entre elles dans le plan de la paroi ont la même valeur, de sorte que cette expression est le tiers de la force vive totale.
Il vient donc

$$p = \frac{\rho V^2}{3}$$

ou

(17) $$p v = \frac{V^2}{3},$$

V^2 désignant le carré de la vitesse moyenne, et v étant le volume occupant l'unité de masses.

(22) La formule de Van der Waals.

Si on suppose que V est une fonction de la température, la formule (17) n'est autre que la loi de Mariotte, ainsi retrouvée par la théorie. On sait que cette loi n'est vraie que d'une manière approchée. Pouvons-nous, en précisant davantage la théorie, avoir une meilleure approximation ?

Nous avons négligé jusqu'ici le volume occupé par les molécules. Si chaque molécule est assimilable à une sphère rigide de rayon ε, son centre n'occupera pas une position arbitraire dans le volume rempli de gaz, mais ne pourra pas s'approcher de la paroi de moins de ε.

Si S est la surface totale, le volume ainsi interdit est $S\varepsilon$, et nous devons en tenir compte. Cette quantité $S\varepsilon$ n'est guère accessible à l'expérience. Tout se passe comme si le volume offert au gaz était légèrement plus petit.

Mais pour le centre de chaque molécule, il y a une autre zône interdite, constituée par l'ensemble des sphères Σ de rayons 2ε ayant pour centres les centres des autres molécules (sphères de protection).

Aux fortes pressions, ce volume peut ne pas être négligeable à côté du volume v, et on est conduit à remplacer la formule (17) par

$$(18) \qquad p\,(v-b) = \frac{V^2}{3},$$

b étant une constante. Contrairement à ce qu'un raisonnement superficiel pourrait faire penser, b n'est d'ailleurs pas le volume des sphères de protection des molécules constituant l'unité de masse, mais la moitié de ce volume.

(Voir pour l'explication de ce point : Boltzmann - La théorie cinétique des gaz, Volume 2, N°4).

La formule (18), plus exacte que la loi de Mariotte, ne l'est pas encore absolument. Pour avoir une meilleure approximation il faut tenir compte de l'attraction des molécules entre elles, et cette hypothèse conduit à la formule de Van der Waals.

$$(18) \qquad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = \frac{V^2}{3}$$

On sait que cette formule est très sensiblement vérifiée par les gaz.
Malgré quelques petites différences dans le voisinage des points critiques, l'aspect des propriétés des gaz près du point critique est à peu près celui qui résulte de la formule.
Si la différence doit faire penser qu'il existe une propriété encore inconnue des molécules qui en est la cause, l'analogie est très remarquable, et conduit à penser que la

théorie cinétique des gaz correspond bien à une réalité.

23 - Les chaleurs spécifiques des gaz -

Voici d'autres conséquences non moins remarquables des formules (17) ou (18). Leurs seconds membres sont les quantités généralement désignées par RT (T = température absolue) : ce sont des fonctions bien connues de la température. D'une température à une autre, l'augmentation de la demi-force vive $\frac{1}{2} \Sigma m V^2$ est donc parfaitement connue ; il est naturel de penser que pour porter un gaz d'une température à une autre, il faut lui donner une augmentation d'énergie égale à l'augmentation de $\frac{1}{2} \Sigma m V^2$ ainsi calculée. La théorie permet donc de prévoir la valeur de la chaleur spécifique du gaz, (exprimée en ergs).

Cette valeur coïncide-t-elle avec celle fournie par l'expérience ?

Il n'en est rien. L'expérience nous donne des valeurs plus grande, sensiblement égales, pour bien des gaz, aux $\frac{5}{3}$ ou au double de la valeur théorique.

Faut-il alors abandonner la théorie ? Non, on peut modifier les hypothèses concernant les molécules. Nous avons supposé les molécules sphériques. Qu'arrive-t-il si elles ont une forme différente ?

Leurs chocs leur donneront, non seulement une vitesse d'ensemble, mais une rotation autour de leurs centres de gravité, qui, d'après des considérations que nous ne pouvons développer ici, absorberont en moyenne, lorsque le régime stable correspondant à une température déterminée sera établi, une énergie égale en général à celle correspondant au terme $\Sigma \frac{1}{2} m V^2$;

mais aux $\frac{2}{3}$ de cette quantité si la molécule, sans être sphérique, admet un axe de révolution. Cette énergie s'ajoute au terme $\Sigma \frac{1}{2} mV^2$; les coefficients $\frac{5}{3}$ et 2 sont donc expliqués.

Il y a là une nouvelle coïncidence, qui ne peut guère être l'effet du hasard, et qui constitue une nouvelle raison de croire à la théorie cinétique des gaz.

ajoutons, toutefois que l'étude approfondie des chaleurs spécifiques a montré que la théorie très simple qui précède ne correspond pas tout-à-fait à la réalité, et pour la mettre d'accord avec l'expérience, il a fallu faire une nouvelle hypothèse, assez surprenante, d'après laquelle l'énergie de rotation d'une molécule ne peut pas croître d'une manière continue (travaux de M. Planck et théorie des quanta.)

(24) Grandeurs moléculaires.–

Pour préciser cette théorie, pouvons-nous déterminer la masse et la dimension de chaque molécule? (Si on connaît la masse d'une molécule, on connaît le nombre de molécules dans une masse donnée; mais sa dimension est une deuxième inconnue indépendante de la précédente).

Dans toutes les formules que la théorie permet de prévoir, les coefficients sont des fonctions de ces inconnues. L'expérience, en déterminant ces coefficients, nous donne des relations entre ces inconnues.–

La connaissance du coefficient b de la formule de Van der Waals donne une première relation.–

Les lois de la diffusion en donnent une seconde. Si on met deux gaz soumis à la même pression au contact l'un de l'autre, les molécules d'un des gaz pénétreront plus ou moins vite dans la masse de l'autre, suivant qu'elles pourront parcourir un plus ou moins grand parcours moyen entre deux chocs. Le calcul donne alors la loi de la diffusion; la forme de cette loi est vérifiée par l'expérience (loi en fonction du temps et de la densité des gaz), et le coefficient qui y figure nous donne un nouveau renseignement sur les grandeurs moléculaires.

Les lois du mélange de deux gaz, ou de deux masses d'un même gaz à des températures différentes donnent lieu à des remarques analogues. Elles permettent de prévoir la valeur de la conductibilité calorifique du gaz.

La détermination de cette quantité nous donne une nouvelle relation entre nos deux inconnues.

Nous avons déjà des équations surabondantes, d'autres théories physiques en donnent un grand nombre d'autres. Ces équations sont compatibles, ou du moins les écarts sont relativement faibles relativement à ceux qu'on pourrait trouver si la théorie cinétique des gaz n'était pas fondée. Non seulement les différentes valeurs trouvées pour le nombre de molécules dans une molécule-gramme de gaz (soit 2 gr. d'hydrogène par exemple), sont du même ordre de grandeur, mais elles ne varient que dans des limites restreintes, de 60×10^{22} à 75×10^{22}. Il y a dans cette coïncidence une nouvelle et remarquable confirmation de la théorie.

Nota. – Pour plus de détails sur ces questions voir Boltzmann, la théorie cinétique des gaz ; J. Perrin, les atomes ; Conférences de la Société française de physique.

Sur les principes du calcul des probabilités, voir :

E. Carvallo, le calcul des probabilités et ses applications. Voir aussi le traité de M. E. Borel.