Estratto da «*Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*»
10 (1939), pp. 41-51

LA TEORIA DEL RISCHIO E IL PROBLEMA DELLA « ROVINA DEI GIOCATORI »

B. DE FINETTI.

SUNTO. — La teoria del rischio secondo il punto di vista del Lundberg può essere impostata, col vantaggio di rendere meno restrittive le ipotesi e più aderenti all'applicazione pratica i risultati, appoggiandosi sulla generalizzazione di un procedimento classico relativo al problema della « rovina dei giocatori ».

1. Si deve, come è noto, al Lundberg l'idea di considerare il problema del rischio dal punto di vista *asintotico*, consistente nel ricercare il valore limite della probabilità che un'azienda che sopporti date alee e le fronteggi mediante un fondo di garanzia regolato in modo determinato, e di cui sia noto l'importo iniziale, non abbia mai a « fallire » (ossia ad esaurire detto fondo) entro un tempo lunghissimo. La sua teoria fu esposta per la prima volta nella comunicazione presentata al Congresso internazionale degli Attuari di Vienna (1909) [1] e fu successivamente elaborata in ulteriori lavori [2] e ripresa da altri Autori, particolarmente da H. Cramér e I. Laurin [3].

In confronto al punto di vista più elementare che si limita a considerare la probabilità di rovina in ogni esercizio singolarmente, e al punto di vista classico in cui si segue fino all'estinzione il portafoglio esistente (isolandolo, alquanto artificiosamente, dal complesso degli affari futuri), l'impostazione « asintotica » mi sembra costituisca effettivamente un progresso concettuale. Benchè nessuno dei tre diversi

---

1) *Ueber die Theorie der Rückversicherung*, « Atti del VI Congresso Internazionale degli Attuari »; Vienna, 1909.

2) *Ueber die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse*, « Skand. Aktuarietidskrift », 1930; *Some supplementary researches on the collective risk theory*, ibidem, 1932; ecc.

3) H. CRAMÉR, *On the Mathematical Theory of Risk*, « Skandia », 1930; I. LAURIN, *An Introduction into Lundberg's Theory of Risk*, « Skand. Aktuarietidskrift », 1930.

punti di vista (nè alcun altro che si limiti a considerare il rischio come espresso da un'unica misura) possa, a mio modo di vedere, costituire una impostazione completa ed esauriente del problema – per il che sarebbe da considerarlo nel suo aspetto dinamico studiando tutto l'andamento della probabilità di rovina attraverso il tempo – pur tuttavia, volendo limitarsi a un'unica indicazione, mi sembra che quella più significativa e più intimamente connessa agli aspetti essenziali del problema sia quella riguardante il comportamento asintotico.

Mi sembra giusto tuttavia osservare che una elegante impostazione, fondandosi sulla teoria classica del rischio, per determinare un confine inferiore della probabilità perchè la perdita non esaurisca il fondo a disposizione *durante tutto un periodo di tempo* è stata fatta dal Cantelli [4] sin dal 1918. È questo lo scopo principale che condusse il Lundberg a considerare la teoria del rischio dal punto di vista asintotico.

Per quanto riguarda invece i metodi seguiti nella trattazione del Lundberg, bisogna riconoscere che alla maggiore elevatezza dello strumento analitico, in confronto alle considerazioni occorrenti secondo gli altri punti di vista, non corrisponde una più adeguata aderenza dell'impostazione alle reali esigenze di una approfondita disamina del problema concreto. In tesi generale, si può osservare a priori che l'adozione di metodi analitici richiedenti schematizzazioni spinte in modo troppo precisato si adatta male allo studio di questioni empiriche e limita comunque notevolmente la validità dei risultati. In particolare, nel caso in questione, l'impostazione analitica del Lundberg fa perdere di vista parecchi degli aspetti più interessanti del problema: infatti essa considera cumulativamente la massa dei rischi senza permettere di risalire all'influenza dei singoli rischi, come occorre perchè la teoria del rischio adempia al suo fine principale di fornire una teoria del pieno; essa esige l'indipendenza stocastica (ossia: nel senso del calcolo delle probabilità) dei rischi, e non solo in esercizi successivi, ma in successivi intervalli di tempo comunque brevi; essa ha bisogno di schematizzare in modo semplicista e idealizzato le ipotesi sui rischi e sull'incasso premi in ogni intervallo di tempo. Quanto ai risultati, essi pure risultano in forma alquanto complicata, sì che per l'uso pratico conviene ricavare un'espressione approssimata, e l'ordine d'idee strettamente analitico in cui si svol-

---

4) F. P. Cantelli, *Su due applicazioni del teorema di Boole alla Statistica matematica*, « Rend. R. Acc. Lincei », Roma, 1918.

gono le deduzioni non mostra che la soluzione esatta o quella approssimata abbiano un significato intuitivamente significativo.

Scopo della presente Nota è di mostrare appunto che tale significato esiste, e che lo si può mettere in evidenza in modo semplice e diretto – sia per riguardo alla formula esatta che a quella approssimata – ricollegandosi alle considerazioni classiche ed elementari sulla rovina dei giocatori. Per far ciò basta sfruttare un'idea che sostanzialmente risale a De Moivre [5], il quale l'aveva considerata però come un artificio per risolvere un caso particolare; occorre invece, in connessione con la moderna nozione di funzione caratteristica, mettere in luce il significato e la portata assolutamente generale del procedimento, ed è questo che ci proponiamo di fare.

2. Premettiamo qualche cenno sul caso di due competitori che partecipano ad un gioco equo, non solo per richiamare risultati noti, ma anche per aggiungere alcune osservazioni sulle condizioni più ampie per la loro validità.

Indichiamo con Y_t il guadagno del primo dei competitori dopo un tempo t; se i capitali iniziali dei due competitori sono G' e G'', si ha rovina dell'uno o dell'altro quando Y_t esce per la prima volta dall'intervallo $-G' < Y_t < G''$ rispettivamente divenendo minore di $-G'$ o maggiore di G''. A un istante t qualsiasi, può darsi o che la partita prosegua ($-G' < Y_t < G''$ in tutto l'intervallo da 0 a t), o che sia terminata con la rovina del primo o del secondo dei competitori. Dette P_t^*, P_t', P_t'' le probabilità delle tre eventualità, avremo $P_t^* + P_t' + P_t'' = 1$; P_t' e P_t'' sono ovviamente funzioni mai decrescenti di t, e tenderanno pertanto a due limiti P' e P'' che diremo brevemente probabilità di rovina dei due competitori.

È noto che nei problemi di giochi considerati nelle trattazioni classiche si ha

$$P' = G''/(G' + G'') \quad , \quad P'' = G'/(G' + G'') \, ,$$

ossia

$$P' + P'' = 1 \quad , \quad P'' G'' - P' G' = 0$$

(probabilità di rovina inversamente proporzionali ai capitali iniziali), ed è facile vedere che le condizioni di validità di queste relazioni sono le tre seguenti, (a), (b) e (c).

---

[5] Cfr., per esempio, J. BERTRAND, *Calcul des Probabilités*, Chap. VI, *La ruine des joueurs*.

(*a*) Perchè sia $P' + P'' = 1$ occorre e basta che $P_t^* \to 0$ al crescere di t; ciò sussiste a maggior ragione se vale la condizione più restrittiva (*a'*) che tenda a zero la probabilità che sia $-G' < Y_t < G''$, ciò che a sua volta avviene se la dispersione di Y_t cresce indefinitamente.

La relazione $P'' G'' - P' G' = 0$ esprime l'equità del gioco consistente nella perdita dell'intero capitale iniziale G' o G'' con le probabilità P' e P''; essa suppone pertanto:

(*b*) che il gioco sia equo anche qualora si stabilisca di proseguirlo fino alla rovina di uno dei giocatori, e

(*c*) che all'istante della rovina di uno dei giocatori non possa rimanere un margine di perdita insoluto.

Quest'ultima condizione è soddisfatta – per il primo dei due competitori (e simmetricamente per l'altro) – in due casi: primo, quando Y_t non può assumere che valori interi (rispetto a un certo importo assunto come unitario), e non può decrescere che di un'unità per volta, e G' è del pari intero; secondo, quando Y_t varia con continuità (processo aleatorio continuo). Però, se la condizione non è soddisfatta, il ragionamento non cade per sè stesso in difetto ma soltanto richiede l'introduzione di un termine correttivo: dette precisamente Δ' e Δ'' le speranze matematiche del margine di perdita insoluto da parte del primo e rispettivamente del secondo competitore nel caso che sia esso a giungere a rovina, basta sostituire nelle formule precedenti G' e G'' con $G' + \Delta'$ e $G'' + \Delta''$. Generalmente poi si potrà stabilire che Δ' e Δ'' sono praticamente trascurabili di fronte a G' e G'', cosicchè le formule senza termine correttivo si potranno ancora ritenere valide come formule approssimate.

Più diffusamente occorrerà intrattenerci sulla precedente condizione (*b*). Il caso che generalmente si considera è quello della *indipendenza stocastica* fra i guadagni di periodi successivi ($Y_{t_1} - Y_{t_0}$, $Y_{t_2} - Y_{t_1}$, $Y_{t_3} - Y_{t_2}$, $\cdots$ sono numeri aleatori stocasticamente indipendenti comunque si fissi la successione di istanti $t_0, t_1, \cdots$; in particolare, se si tratta di una successione *discreta* di « colpi » o « partite », sono numeri aleatori stocasticamente indipendenti i singoli guadagni $X_1, X_2, \cdots, X_n$ che formano $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$); sotto tale condizione è fuori dubbio che, se il gioco è equo in ogni singolo colpo elementare, rispettivamente in ogni intervallo comunque breve di tempo, lo è anche stabilendo di proseguirlo fino alla rovina di uno dei competitori. Ma è evidente che l'ipotesi dell'indipendenza è più restrittiva del necessario; potrebbe anzi forse sembrare a prima vista che non occorresse nessun'ulteriore restrizione, per il fatto che una somma di numeri aleatori a speranza matematica nulla ha sempre speranza matematica nulla. Il ragionamento però non sarebbe corretto, perchè qui si tratta della somma di un numero di termini dipendente dall'esito stesso delle corrispondenti partite, e si vede facilmente che la conclusione non è vera pensando al caso di un gioco in cui il risultato di un colpo tenda a ripetersi nei successivi (correlazione positiva): se ad esempio nel gioco di testa e croce il risultato del primo colpo tendesse a riprodursi quasi certamente nei successivi sarebbe quasi certa la rovina di chi perde il primo colpo, e si avrebbero quindi due probabilità di rovina quasi uguali tra loro, con danno del competitore più ricco. L'equità del gioco nelle singole partite non è dunque sufficiente a garantire l'equità della condizione di ripeterlo e proseguirlo ad oltranza.

La condizione necessaria e sufficiente perchè il gioco ad oltranza sia equo è data dall'annullarsi della relativa speranza matematica (che è espressa, nel caso di « partite » discrete, dalla serie $\sum_h P_h^* \mathfrak{M}^*(X_h)$ ove con $\mathfrak{M}^*(X_h)$ si indichi la speranza matematica dell'h-esimo colpo subordinatamente all'ipotesi che esso abbia luogo senza che precedentemente sia avvenuta la rovina di uno dei competitori). Perchè tale condizione (b) sussista è sufficiente, ovviamente, la condizione più restrittiva (b') che tutte le $\mathfrak{M}^*(X_h)$ siano nulle, ossia che ogni colpo appaia equo (all'inizio del gioco) anche subordinatamente all'ipotesi che la rovina non si produca prima di giungere a giocarlo. Questa condizione è anzi anche necessaria se si vuole che sia equo anche il gioco fino alla rovina di uno dei competitori ma al più fino ad un istante comunque prefissato. Una condizione (b'') ancora più restrittiva si ha supponendo che ogni colpo debba apparire equo anche subordinatamente a ciascuna delle ipotesi possibili sul risultato delle partite precedenti; questa condizione poi è non solo sufficiente ma anche necessaria se si vuole che il gioco sia equo anche stabilendo che la facoltà di interromperlo sia lasciata in un modo qualunque alla decisione unilaterale dei competitori (sia soltanto del primo oppure soltanto del secondo unilateralmente, oppure di uno qualunque dei due unilateralmente).

Nel seguito supporremo sempre verificata quest'ultima condizione (b'') dell'equità di ogni colpo anche subordinatamente a tutte le possibili ipotesi riguardo al risultato dei precedenti: osserviamo che essa è di già molto meno restrittiva di quella dell'indipendenza, e che tale allargamento di ipotesi è indispensabile per le applicazioni alla teoria del rischio dato che l'indipendenza non sussiste certamente (per esempio causa il rischio di morte di un medesimo individuo in anni successivi), mentre la nuova condizione, invece, sussiste.

Ricapitolando: sotto le condizioni (*a*) e (*b*) le probabilità di rovina P' e P'' sono date in generale da

$$P' = \frac{G'' + \Delta''}{G' + \Delta' + G'' + \Delta''} \quad , \quad P'' = \frac{G' + \Delta'}{G' + \Delta' + G'' + \Delta''} ;$$

i termini correttivi Δ' e Δ'' cadono nell'ipotesi (*c*) in cui si ha la formula classica, la quale vale comunque come formula approssimata purchè i termini correttivi siano praticamente trascurabili in confronto ai capitali iniziali; le condizioni (*a*) e (*b*) sono poi a maggior ragione soddisfatte se sussistono quelle più restrittive (*a'*), rispettivamente (*b'*) o (*b''*), praticamente più espressive e di più agevole verifica.

Come è noto e come risulta ovvio, se uno dei competitori è molto più ricco dell'altro, la rovina di quest'ultimo è praticamente certa (se $G'' \to \infty$, $P' \to 1$, tanto se vale la (*c*) che nel caso generale).

3. Si tratta ora di passare all'ipotesi di un gioco non equo, quale appunto ci si presenta nel caso di un'impresa (come il lotto, la roulette, ecc.) ove sia riservato un vantaggio al « banco », o in quello che ci interessa direttamente di una compagnia d'assicurazione che disponga di un margine di caricamento per fronteggiare il rischio degli scarti sfavorevoli.

L'artificio di De Moivre consiste nel ricondursi al caso di un gioco equo osservando che la probabilità di rovina di due competitori che dispongono di un certo numero di lire ciascuno (e partecipano a un gioco in cui ad ogni colpo uno di essi perde o guadagna una lira) non varia se le « lire » si sostituiscono con « gettoni » cui si attribuisce un valore arbitrario (anche variabile), e che è possibile fissare la scala di tali valori variabili (precisamente: in progressione geometrica) in modo che il gioco appaia equo. In tal modo vale ancora la formula

$$P' = G''/(G' + G'') \quad , \quad P'' = G'/(G' + G'')$$

purchè G' e G'' rappresentino il « valore » dei « gettoni » in tale senso fittizio.

Basta formulare tale idea in forma più astratta e generale per riconoscerne la portata del tutto generale. Si tratta di eseguire una trasformazione esponenziale, attribuendo al guadagno Y_t il valore $e^{\alpha Y_t} - 1$, ciò che corrisponde ad attribuire ad un ulteriore guadagno dy, dopo che il guadagno precedente è y, il valore $e^{\alpha y}\, dy$. Fissando opportunamente il coefficente α, la trasformazione conduce ad un gioco equo e permette di ricondursi alla trattazione precedente.

L'equazione che dà α deve esprimere che $\mathfrak{M}(e^{\alpha Y_t} - 1) = 0$, ossia $\varphi_t(\alpha) = 1$ se si indica con $\varphi_t(\alpha) = \mathfrak{M}(e^{\alpha Y_t})$ la « funzione caratteristica » di Y_t [6]; il valore di α rimane così univocamente determinato, perchè $\varphi_t(\alpha) - 1$ è funzione concava ed ha un'unica radice, oltre quella ovvia per $\alpha = 0$, che non interessa. Possiamo subito vedere poi che α ha segno opposto rispetto alla speranza matematica, ossia è negativo o positivo a seconda che le condizioni sono non eque a favore o a sfavore del primo competitore: infatti $\mathfrak{M}(X)$ è la derivata di $\mathfrak{M}(e^{\alpha X} - 1)$ per $\alpha = 0$, e l'altra radice di $\mathfrak{M}(e^{\alpha X} - 1) = 0$ si troverà quindi necessariamente a sinistra di $\alpha = 0$ se $\mathfrak{M}(X) > 0$, a destra se $\mathfrak{M}(X) < 0$.

Per l'applicabilità del metodo di cui ci occupiamo è necessario che α non dipenda da t, perchè il gioco deve risultare equo adottando un'unica trasformazione ossia un unico α; tale condizione risulta ben naturale e significativa dalle due osservazioni seguenti: che α caratterizza – nel senso che vedremo – il grado di rischiosità di un'operazione, e che se le singole operazioni sono stocasticamente indipendenti ed hanno un medesimo grado di rischiosità, corrispondente a un dato valore di α, lo stesso avviene per il loro complesso.

Cominciamo da quest'ultima asserzione. Se X e Y sono numeri aleatori stocasticamente indipendenti ed è, per un medesimo valore di α, $\mathfrak{M}(e^{\alpha X}) = \mathfrak{M}(e^{\alpha Y}) = 1$, è pure, per il medesimo α, $\mathfrak{M}(e^{\alpha(X+Y)}) = \mathfrak{M}(e^{\alpha X} \cdot e^{\alpha Y}) = \mathfrak{M}(e^{\alpha X})\, \mathfrak{M}(e^{\alpha Y}) = 1$ (e lo stesso vale analogamente per la somma di un numero qualunque di numeri aleatori). Anche in questa dimostrazione possiamo sostituire alla troppo restrittiva condizione dell'indipendenza stocastica quella analoga alla (b''): che cioè $e^{\alpha Y}$ abbia speranza matematica uguale ad 1 anche subordinatamente a qualsiasi ipotesi circa il valore di X, ossia, in generale, che ogni singola operazione abbia sempre il medesimo grado di rischiosità indipendentemente dall'esito delle altre operazioni. Indicando infatti con $\mathfrak{M}_x(e^{\alpha Y})$ la speranza matematica di $e^{\alpha Y}$ subor-

---

6) Con leggera modifica rispetto alla terminologia usuale, dove si chiama funzione caratteristica $\mathfrak{M}(e^{itX})$, col fattore $i = \sqrt{-1}$ all'esponente.

dinatamente all'ipotesi che X assuma un dato valore x, e supposto che sia $\mathfrak{M}_x (e^{\alpha Y}) = 1$ per ogni x, abbiamo ancora

$$\mathfrak{M} (e^{\alpha(X+Y)}) = \mathfrak{M} (e^{\alpha X} \cdot e^{\alpha Y}) = \mathfrak{M} \{ e^{\alpha X} \mathfrak{M}_X (e^{\alpha Y}) \} = \mathfrak{M} (e^{\alpha X}) = 1 .$$

Il significato di α come indice di rischiosità scende di per sè dal risultato che è già stato enunciato e basta esprimerlo in formule. Alla equazione $P'' G'' - P' G' = 0$ del caso di equità (corrispondente al caso limite $\alpha = 0$) dovremo sostituire, eseguendo la trasformazione esponenziale con parametro α, l'equazione

$$P' (e^{-\alpha G'} - 1) + P'' (e^{\alpha G''} - 1) = 0$$

che, insieme alla $P' + P'' = 1$, valida sempre sotto la condizione (a), ci darà

$$P' = e^{\alpha G'} \frac{e^{\alpha G''} - 1}{e^{\alpha (G' + G'')} - 1} \quad , \quad P'' = \frac{e^{\alpha G'} - 1}{e^{\alpha (G' + G'')} - 1} .$$

Nel caso che uno dei capitali iniziali, per esempio G'', sia enormemente più grande dell'altro, ossia che dei due competitori uno sia di gran lunga più ricco, avremo $P' \cong 1$ (come nel caso di gioco equo) se α è positivo, ma invece $P' \cong e^{\alpha G'}$ se α è negativo.

La rovina di chi gioca indefinitamente contro un avversario infinitamente ricco è dunque praticamente certa se egli gioca a condizioni eque o sfavorevoli, mentre invece se le condizioni sono non eque a suo favore egli ha una probabilità non nulla di sfuggire alla rovina purchè disponga di un capitale iniziale, ed anzi la probabilità di rovina tende a zero, decrescendo in progressione geometrica, al crescere di tale capitale iniziale. Ponendo in tal caso, per metter meglio in evidenza il significato, $B = -1/\alpha$, si ha $P' = e^{-G'/B}$; B è il valore del capitale iniziale G' cui corrisponde per la probabilità di rovina P' il valore $1/e$, e lo chiameremo «livello di rischiosità»; α è $-1/B$, e in ciò è il suo accennato significato come indice di rischiosità.

4. Le condizioni sotto le quali siamo giunti a tale conclusione sono sempre le stesse del n. 2, e precisamente le (a), (b''), (c), ove la (b'') s'intenda nel senso esteso della costanza e indipendenza dai risultati precedenti dell'indice di rischiosità α di tutte le operazioni (mentre la condizione del n. 2 significava, in più, che α fosse non un valore qualunque ma zero). Quanto alla (c) osserviamo subito che la si può anche qui lasciar cadere salvo a introdurre un termine correttivo che

ci farà diminuire leggermente P' da $e^{-G'/B}$ ad $e^{-(G'+\Delta)/B}$, con Δ media esponenziale del margine insoluto di perdita in caso di rovina del dato competitore.

Il caso di un'azienda di assicurazioni rientra nelle ipotesi stabilite: perchè valga la (a) basta infatti – dal punto di vista pratico – supporre che il volume degli affari rimarrà a un livello almeno equivalente all'attuale per una serie abbastanza lunga di anni, sì da rendere legittimo l'uso di formule asintotiche, mentre la (b'') implica solamente che gli affari vengano mantenuti, attraverso il tempo, sempre su di un medesimo « livello di rischiosità », e che tale « livello di rischiosità » sia indipendente, in ciascun periodo, dai risultati degli anni precedenti.

È importante notare infine che il « livello di rischiosità » del complesso degli affari di un dato periodo dipende dal livello di rischiosità di ogni affare singolo, ed è anzi il medesimo livello di rischiosità degli affari singoli se questo è lo stesso per tutti e se vale l'ipotesi d'indipendenza stocastica; ciò dice infatti la proprietà fondamentale dimostrata nel n. 3. L'importanza di tale osservazione sta nel fatto che grazie ad essa le considerazioni sul rischio di fallimento svolte riferendosi al complesso degli affari, e che pertanto potrebbero riguardarsi come prevalentemente a carattere astratto, vengono ad innestarsi direttamente alle considerazioni più concrete relative alle singole polizze, e precisamente alla discussione dei caricamenti necessari per fronteggiare scarti sfavorevoli e dei criteri per la determinazione dei pieni.

Non rimane dunque che ad esprimere in forma esplicita il livello di rischiosità B per una singola assicurazione [7], in funzione della somma assicurata C, della probabilità (premio puro) p, e del margine unitario di caricamento disponibile m. La funzione caratteristica è

$$\varphi(t) = p e^{Ct(1-p-m)} + (1-p)\, e^{-Ct(p+m)} ;$$

$\alpha = -1/B$ è dato dunque da

$$\varphi(\alpha) = e^{-C\alpha(p+m)} \left[p e^{C\alpha} + (1-p) \right] = 1 ,$$

ossia

$$1 + p\,(e^{C/B} - 1) = e^{C(p+m)/B} .$$

7) Nel caso dell'assicurazione vita intendiamo naturalmente riferirci – anno per anno – all'assicurazione della somma sotto rischio verso il corrispondente premio di rischio; la parte di risparmio è del tutto estranea al problema.

Non potendosi risolvere direttamente rispetto a B, ci sarà utile risolvere rispetto ad m: si ha

$$m = \frac{B}{C} \log \left[1 + p \left(e^{C/B} - 1 \right) \right] - p = f\left(\frac{C}{B} \right);$$

costruita (per il valore p che interessa) la funzione $m = f(\xi)$, mediante la funzione inversa $\xi = f^{-1}(m)$ si può esprimere

$$B = \frac{C}{f^{-1}(m)} \, .$$

Sviluppando in serie si ottiene

$$m = f(\xi) = \xi \frac{p(1-p)}{2} + \xi^2 \frac{p}{3} \left[\left(p - \frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] + \cdots$$

da cui risulta, in prima approssimazione,

$$m = \frac{Cp(1-p)}{2B} \quad , \quad B = \frac{Cp(1-p)}{2m} \, .$$

Basandosi su queste formule le conclusioni (tanto più approssimate quanto minore sarà m, ossia quanto meno sarà necessario scostarsi dalle condizioni di equità) sarebbero le seguenti:

perchè tutte le singole assicurazioni corrispondano allo stesso ed unico livello di rischiosità B, il margine unitario di caricamento disponibile dovrebbe crescere proporzionalmente alla somma assicurata C;

rispettivamente, se invece m si lascia fisso:

il livello di rischiosità B cresce proporzionalmente alla somma assicurata C. Non volendo andare al di là di un livello B stabilito, si dovrà limitare la somma assicurata al massimo espresso da

$$C = \frac{2mB}{p(1-p)} \, ;$$

è questo il « pieno » al di là del quale i rischi dovranno venir coperti per riassicurazione.

Risulta quindi che il criterio per i pieni derivante dalla nostra impostazione conduce a fissarli proporzionali direttamente al margine di caricamento disponibile e inversamente al quadrato dello scarto quadratico medio $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$. Si potrebbe vedere facilmente che la stessa conclusione dimostrata per il caso elementare sussiste anche in generale.

Si potrebbero inoltre (ma ci limiteremo qui a farne menzione) trattare da questo stesso punto di vista anche casi meno semplici come quello della correlazione fra i rischi di uno stesso esercizio (fenomeni a carattere « epidemico », come ne dà un esempio tipico l'assicurazione grandine) o fra l'andamento di esercizi successivi (fenomeni a carattere « ciclico », come ne dà un esempio tipico l'assicurazione contro la disoccupazione). Si giungerebbe ad un ordine di considerazioni analogo a quello del Dubois [8] nel primo caso, e nel secondo a quello accennato dal Medolaghi [9].

---

8) P. DUBOIS, *Essai d'application etc.*, « Bull. Act. Franç. », 1936.

9) P. MEDOLAGHI, *Il rischio nelle assicurazioni*, « Atti Ist. Naz. Assicurazioni », 1929.