Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **17** (2005), 575–606

Sur la dimension cohomologique des pro-p-extensions des corps de nombres

par Christian MAIRE

À Georges Gras, pour son soixantième anniversaire
en témoignage de ma très grande reconnaissance

Résumé. Dans ce papier, nous étudions la dimension cohomologique des groupes $G_S := \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K})$, où K_S est la pro-p-extension d'un corps de nombres K, non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places S de K, et maximale pour ces propriétés. Si cette dimension est bien connue lorsque S contient toutes les places au-dessus de p, elle le semble moins bien dès lors que S ne contient pas toutes ces places. Néanmoins, il est possible d'obtenir des informations quand une $\mathbb{Z}_p$-extension $\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}$ se trouve dans K_S/K. En effet, dans ce cas, une étude du $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})]]$-module $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_\infty)^{ab}$ permet de donner des conditions suffisantes pour que le pro-p-groupe $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_\infty)$ soit libre. Si tel est le cas, il s'en déduit que la dimension de G_S est au plus 2. Ici, nous développons une démarche explicite mettant en jeu ces conditions afin de trouver des exemples numériques pour lesquels il est effectivement possible de calculer cette dimension cohomologique.

Abstract. In this paper, we study the cohomological dimension of groups $G_S := \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K})$, where K_S is the maximal pro-p-extension of a number field K, unramified outside a finite set S of places of K. This dimension is well-understood only when S contains all places above p; in the case where only some of the places above p are contained in S, one can still obtain some results if K_S/K contains at least one $\mathbb{Z}_p$-extension $\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K}$. Indeed, in that case, the study of the $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})]]$-module $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_\infty)^{ab}$ allows one to give sufficient conditions for the pro-p-group $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_S/\mathrm{K}_\infty)$ to be free. Under the latter condition, the dimension of G_S is at most 2. Here, we develop an explicit strategy for realizing these conditions so as to produce numerical examples for which we effectively compute this cohomological dimension.

Manuscrit reçu le 14 mai 2004.

Christian Maire
GRIMM
Université Toulouse le Mirail
5, allées A. Machado
31058 Toulouse cédex
E-mail : `maire@univ-tlse2.fr`
URL: `http://www.univ-tlse2.fr/grimm/maire`