Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **18** (2006), 1–12

Équidistribution des sous-variétés de petite hauteur

par Pascal AUTISSIER

Résumé. On montre dans cet article que le théorème d'équidistribution de Szpiro-Ullmo-Zhang concernant les suites de petits points sur les variétés abéliennes s'étend au cas des suites de sous-variétés. On donne également une version quantitative de ce résultat.

Abstract. In this paper, the equidistribution theorem of Szpiro-Ullmo-Zhang about sequences of small points in an abelian variety is extended to the case of sequences of higher dimensional subvarieties. A quantitative version of this result is also given.

1. Introduction

Dans ce texte, on appelle **variété** sur un corps K tout schéma intègre et projectif sur K.

Commençons par rappeler les travaux de Szpiro, Ullmo et Zhang sur l'équidistribution des petits points (*cf* [17]) :

Définition. Soit V une variété sur $\mathbb{Q}$. Une suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ de fermés intègres de V est dite **générique** dans V lorsque pour tout fermé $Z \neq V$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n \subset Z\}$ est fini.

Soit K un corps de nombres de degré N. Notons G_K l'ensemble des plongements $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Soit A une variété abélienne sur K de dimension d. Remarquons que $A(\mathbb{C})$ est alors l'union disjointe des groupes $A_\sigma(\mathbb{C})$. Soit μ la mesure de probabilité sur $A(\mathbb{C})$ égale sur chaque $A_\sigma(\mathbb{C})$ à la mesure de Haar de masse $1/N$.

Soit $\hat{\mathrm{h}}_L$ la hauteur de Néron-Tate relativement à un faisceau inversible L symétrique et ample sur A. Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de points fermés de A. Pour tout $n \geq 0$, on pose $k_n = \deg(P_n) = [k(P_n) : \mathbb{Q}]$.

Lorsque Z est un fermé réduit de $A_\mathbb{C}$ purement de codimension q, on désigne par δ_Z le courant d'intégration sur $Z(\mathbb{C})$ (c'est un $(q;q)$-courant sur $A(\mathbb{C})$).

Manuscrit reçu le 30 avril 2004.

Szpiro, Ullmo et Zhang ont démontré le théorème d'équirépartition suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est générique dans A et que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(P_n) = 0$. Alors la suite de mesures $\left(\frac{1}{k_n}\delta_{P_{n\mathbb{C}}}\right)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers μ.*

Ce résultat a permis à Ullmo [18] et Zhang [20] de prouver la conjecture de Bogomolov (*cf* aussi [1]).

On étend ici le théorème 1.1 aux suites génériques de sous-variétés :

Soit $\| \ \|$ une "métrique du cube" (*cf* [12]) sur $L_{\mathbb{C}}$. Notons ω la $(1;1)$-forme de courbure de $(L_{\mathbb{C}};\| \ \|)$ sur $A(\mathbb{C})$ et posons $k = \deg_L(A)$. Remarquons que l'on a $\omega^{\wedge d} = k\mu$ sur $A(\mathbb{C})$.

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés intègres de A de dimension p. On pose $k_n = \deg_L(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$. On prouve le résultat suivant :

Théorème 1.2 (5.1)**.** *Supposons que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est générique dans A et que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) = 0$. Alors la suite de mesures $\left(\frac{1}{k_n}\omega^{\wedge p} \wedge \delta_{Y_{n\mathbb{C}}}\right)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers μ.*

La démonstration s'inspire de celle du théorème 1.1. Elle se place donc dans le cadre de la théorie d'Arakelov (*cf* [5]), et utilise le théorème de "Hilbert-Samuel arithmétique" dû à Gillet et Soulé [9] (*cf* aussi Abbes et Bouche [2]).

Remarquons en particulier que si $(Y_n)_{n\geq 0}$ est générique dans A et si U est un ouvert non vide de $A(\mathbb{C})$ disjoint de $Y_{n\mathbb{C}}$ pour tout n assez grand, alors on a $\liminf_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) > 0$. On peut donner une version quantitative de ce résultat :

Théorème 1.3 (7.1)**.** *On suppose la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ générique dans A. Soit U_η une boule ouverte de $A(\mathbb{C})$ de rayon $\eta \in]0;\eta_0[$ telle que U_η soit disjoint de son conjugué complexe. On suppose que U_η et $Y_{n\mathbb{C}}$ sont disjoints pour tout $n \geq 0$. Alors on a $\liminf_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) \geq c_0\eta^{2d+2}$ (η_0 et c_0 sont des constantes ne dépendant que de $(K;A;L;p)$).*

Par ailleurs, Zhang a proposé une généralisation de la conjecture de Bogomolov (*cf* [19]) :

Soient V une variété lisse sur $\mathbb{Q}$ et L un faisceau inversible ample sur V. Supposons que l'on a un morphisme fini $f : V \to V$ et un isomorphisme $L^{\otimes m} \simeq f^*L$, où m est un entier > 1.

Définition. Un fermé intègre Y de V est dit **prépériodique** lorsque l'ensemble $\{f^n(Y) \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

Lorsque l'on a de telles données, Zhang a montré comment obtenir une hauteur canonique $\hat{\mathrm{h}}_L$ généralisant la construction de Néron-Tate. En particulier, la fonction $\hat{\mathrm{h}}_L$ est positive ; si un fermé intègre Y de V est prépériodique, alors on a $\hat{\mathrm{h}}_L(Y) = 0$; et un point fermé P est prépériodique si et seulement si $\hat{\mathrm{h}}_L(P) = 0$.

Dans cette situation, la conjecture de Zhang s'énonce ainsi :

Conjecture (i). Soit Y un fermé intègre de V. Si $\hat{\mathrm{h}}_L(Y) = 0$, alors Y est prépériodique.

Zhang a montré que $\hat{\mathrm{h}}_L(Y) = 0$ si et seulement si Y contient une suite de points fermés $(P_n)_{n\geq 0}$ générique dans Y telle que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(P_n) = 0$. En particulier, si Y contient un ensemble Zariski-dense de points fermés prépériodiques, alors Y est conjecturalement prépériodique.

Ce dernier énoncé, qui ne fait plus intervenir de hauteur, rappelle une conjecture de dynamique complexe :

Conjecture (ii). Soient M une variété lisse sur $\mathbb{C}$ et $f : M \to M$ un morphisme fini. On suppose qu'il existe un faisceau inversible L ample sur M tel que $L^{\otimes m} \simeq f^*L$ avec $m > 1$. Si un fermé intègre Y de M contient un ensemble Zariski-dense de points prépériodiques, alors Y est prépériodique.

Cette conjecture "s'applique" en particulier au cas où M est l'espace projectif $\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}}$ et f un morphisme fini de degré > 1 (on prend alors $L = \mathcal{O}(1)$).

Par ailleurs, lorsque M est une variété abélienne sur $\mathbb{C}$ et f la multiplication par un entier > 1, la conjecture (ii) est un théorème de Raynaud (*cf* [15]).

Pour attaquer la conjecture (i), on pourrait commencer par prouver un résultat d'équidistribution des petits points analogue au théorème 1.1. La mesure limite μ serait alors la mesure à l'équilibre du système dynamique $(V_{\mathbb{C}}; f_{\mathbb{C}})$.

La difficulté de cette approche est que l'on est amené, semble-t-il, à utiliser un théorème de Hilbert-Samuel arithmétique sans hypothèse de positivité de la courbure, qui n'est connu que pour les surfaces arithmétiques (*cf* propositions 3.3.3 et 4.1.4 de [3]).

Je remercie Serge Cantat et Antoine Chambert-Loir pour de fructueuses conversations et pour leurs conseils concernant ce papier. Je remercie également Emmanuel Ullmo pour l'inspiration qu'il m'a procurée.

2. Définitions et notations

Soient M une variété lisse sur $\mathbb{C}$ et L un faisceau inversible sur M.

Définition. Une **métrique** sur L est une famille $\| \ \|$ de normes hermitiennes sur L variant de manière continue sur $M(\mathbb{C})$. Posons $\widehat{L} = (L; \| \ \|)$.

On note $\omega_{\widehat{L}}$ le $(1;1)$-courant de courbure de $\widehat{L}$ sur $M(\mathbb{C})$; il est caractérisé par la propriété suivante : pour toute section rationnelle s non nulle de L, on a l'égalité $\omega_{\widehat{L}} = \delta_{\mathrm{div}(s)} - \dfrac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\ln\|s\|$.

Définition. Soit $\|\ \|$ une métrique sur L ; posons $\widehat{L} = (L;\|\ \|)$. On dit que $\|\ \|$ est **p.s.h.** lorsque le courant $\omega_{\widehat{L}}$ est positif, autrement dit lorsque pour tout ouvert U de M et tout $s \in \Gamma(U;L)$ ne s'annulant pas sur U, la fonction $-\ln\|s\|$ est plurisousharmonique sur $U(\mathbb{C})$.

Définition. Une **variété arithmétique** est un schéma X intègre, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, tel que la fibre générique $X_{\mathbb{Q}}$ soit lisse sur $\mathbb{Q}$. Remarquons que $X_{\mathbb{C}}$ est alors l'union disjointe de variétés lisses sur $\mathbb{C}$.

Un **faisceau inversible hermitien** sur X est un couple $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L};\|\ \|)$, formé d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X et d'une métrique $\|\ \|$ sur $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ invariante par conjugaison complexe.

Remarque. Soit Y un schéma intègre et projectif sur $\mathbb{Z}$. On a deux possibilités :
- Y est plat et surjectif sur $B_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$; Y est alors dit horizontal ;
- Y est au-dessus d'un point fermé $b = p\mathbb{Z}$ de B_0 (*ie* Y est une variété sur $\mathbb{F}_p$) ; Y est alors dit vertical.

3. Théorie d'Arakelov

Soient X une variété arithmétique de dimension (absolue) d, et $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L};\|\ \|)$ un faisceau inversible hermitien sur X dont la métrique $\|\ \|$ est C^∞. Pour $0 \le p \le d$, on désigne par $\mathrm{Z}_p(X)$ le groupe des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de fermés intègres (de X) de dimension p.

Faisons quelques rappels de la théorie des hauteurs développée par Bost, Gillet et Soulé :

Pour $0 \le p \le d$, on définit (*cf* [9] p. 485, [5] p. 933) le groupe de Chow arithmétique de dimension p, noté $\widehat{\mathrm{CH}}_p(X)$. Le degré arithmétique définit une application $\mathbb{Z}$-linéaire $\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{CH}}_0(X) \to \mathbb{R}$. Pour $1 \le p \le d$, on construit la première classe de Chern arithmétique $\widehat{\mathrm{c}}_1(\widehat{\mathcal{L}}) : \widehat{\mathrm{CH}}_p(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}_{p-1}(X)$, qui est $\mathbb{Z}$-linéaire.

Soient maintenant $p \in \{0;\cdots;d\}$ et $D \in \mathrm{Z}_p(X)$. Soit g un courant de Green pour $D_{\mathbb{C}}$. Le réel

$$\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(D) = \widehat{\deg}\Big[\widehat{\mathrm{c}}_1(\widehat{\mathcal{L}})^p(D;g) - (0;\omega_{\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}}^{\wedge p}\wedge g)\Big]$$

ne dépend pas du choix de g. On l'appelle la **hauteur d'Arakelov** de D relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$.

Soit Y un fermé intègre horizontal de dimension p tel que $\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}}) > 0$. La **hauteur normalisée** de Y relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le réel

$$\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \frac{\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)}{\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}})p} \quad .$$

Proposition 3.1. *Soient Y un fermé intègre de X de dimension $p \geq 1$, n un entier ≥ 1, et s une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y}$ (sur Y). Alors on a l'égalité*

$$\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n = \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{div}(s)) - \int_{Y(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \omega^{p-1}_{\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}}$$

(On convient que l'intégrale est nulle si Y est vertical).

Démonstration. C'est la proposition 3.2.1 (iv) de [5] p. 949. □

Le résultat suivant est un analogue arithmétique du théorème de Hilbert-Samuel :

Théorème 3.1. *Supposons $\mathcal{L}$ ample et la métrique $\| \ \|$ p.s.h.. Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout entier n assez grand, il existe une section globale s non nulle de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ telle que $\max\limits_{X(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \leq \epsilon n - \mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)n$.*

Démonstration. *cf* théorème 9 de [9] p. 539 ou corollaire du théorème principal de [2]. □

4. Hauteurs

4.1. Hauteurs de Weil.

Soient V une variété lisse sur $\mathbb{Q}$ et L un faisceau inversible ample sur V. Notons $V^{\diamond}$ l'ensemble des fermés intègres de V.

Définition. Un **modèle entier** de $(V; L)$ est un couple $(X; \widehat{\mathcal{L}})$, formé d'une variété arithmétique X et d'un faisceau inversible hermitien $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \ \|)$ sur X tels que $(X_{\mathbb{Q}}; \mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$ soit isomorphe à $(V; L)$, que $\mathcal{L}$ soit ample sur X, que la métrique $\| \ \|$ soit C^{∞}, et que la courbure $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}}$ soit définie positive sur $X(\mathbb{C})$.

Remarquons que pour tout entier e assez grand, le couple $(V; L^{\otimes e})$ admet un modèle entier.

La définition suivante étend aux sous-variétés la notion classique de hauteur de Weil sur les points :

Définition. Une application $\hat{h} : V^{\diamond} \to \mathbb{R}$ est une **hauteur de Weil** relativement à L lorsqu'il existe un entier $e \geq 1$, un modèle entier $(X; \widehat{\mathcal{L}})$ de $(V; L^{\otimes e})$ et un réel C tels que

$$\forall\, Y \in V^{\diamond} \quad \left| \hat{h}(Y) - \frac{1}{e}\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}) \right| \leq C$$

($\overline{Y}$ désigne l'adhérence de Y dans X).

La proposition suivante montre entre autres que cette définition “ne dépend pas du choix de $(e; X; \widehat{\mathcal{L}})$” :

Proposition 4.1. *Soit $\hat{h}$ une hauteur de Weil relativement à L. Alors pour tout entier $e \geq 1$ et tout modèle entier $(X; \widehat{\mathcal{L}})$ de $(V; L^{\otimes e})$, il existe un réel C tel que* $\forall\, Y \in V^{\diamond} \quad \left|\hat{h}(Y) - \frac{1}{e}\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y})\right| \leq C$.

En outre, la fonction $\hat{h}$ est minorée sur $V^{\diamond}$.

Démonstration. La première partie de l'énoncé est une reformulation de la proposition 3.2.2 de [5] p. 950. La deuxième partie se déduit de la remarque (iii) de [5] p. 954. □

4.2. Hauteur canonique.

Soient V une variété lisse sur $\mathbb{Q}$ et L un faisceau inversible ample sur V. On suppose que l'on a un morphisme fini $f : V \to V$ et un isomorphisme $\alpha : L^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} f^*L$, où m est un entier > 1.

À partir de ces données, Zhang construit une hauteur de Weil particulière relativement à L par un procédé dynamique :

Proposition 4.2. *Il existe une unique hauteur de Weil $\hat{\mathrm{h}}_L$ relativement à L telle que pour tout $Y \in V^{\diamond}$, on ait l'égalité $\hat{\mathrm{h}}_L(f(Y)) = \hat{\mathrm{h}}_L(Y)m$.*

De plus, on a les propriétés suivantes :

- Si $\hat{h}$ est une hauteur de Weil relativement à L, alors la suite de fonctions $\left(\frac{1}{m^n}\hat{h} \circ f^n\right)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $V^{\diamond}$ vers la fonction $\hat{\mathrm{h}}_L$;

- La fonction $\hat{\mathrm{h}}_L$ est positive sur $V^{\diamond}$;

- Si Y est un fermé intègre prépériodique de V, alors on a $\hat{\mathrm{h}}_L(Y) = 0$;

- Un point fermé P de V est prépériodique si et seulement si $\hat{\mathrm{h}}_L(P) = 0$.

Démonstration. C'est une reformulation du théorème 2.4 de [19] p. 292. □

L'application $\hat{\mathrm{h}}_L$ est appelé la **hauteur canonique** relativement à $(L; f)$. Remarquons qu'elle ne dépend pas du choix de l'isomorphisme α.

5. Équidistribution

Soit K un corps de nombres de degré N. Soient A une variété abélienne sur K de dimension d et $0_A \in A(K)$ sa section neutre. Pour tout entier non nul c, on note $[c] : A \to A$ le morphisme de multiplication par c.

Soit L un faisceau inversible symétrique (*ie* $[-1]^*L \simeq L$) et ample sur A. On fixe un isomorphisme $0_A^*L \simeq \mathcal{O}_B$ sur $B = \mathrm{Spec}(K)$. Par le théorème du cube, on en déduit naturellement un isomorphisme $[c]^*L \simeq L^{\otimes c^2}$ sur A pour chaque entier $c \geq 2$.

La hauteur canonique $\hat{\mathrm{h}}_L$ relativement à $(L;[c])$ ne dépend pas du choix de l'entier $c \geq 2$; c'est la **hauteur de Néron-Tate** relativement à L (*cf* aussi [13] et [10]).

On fixe un entier $c \geq 2$. D'après [12] p. 50-52, il existe une unique métrique $\| \ \|$ de classe C^∞ sur $L_{\mathbb{C}}$ telle que l'isomorphisme $[c]^*L \simeq L^{\otimes c^2}$ devienne une isométrie (*ie* une "métrique du cube").

Notons ω la courbure de $(L_{\mathbb{C}};\| \ \|)$; posons $k = \deg_L(A)$ et $\mu = \dfrac{1}{k}\omega^d$. Pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, la mesure μ_σ est alors la mesure de Haar de masse $1/N$ sur $A_\sigma(\mathbb{C})$.

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés intègres de A de dimension p. On pose $k_n = \deg_L(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$.

Théorème 5.1. *Supposons que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est générique dans A et que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) = 0$. Alors la suite de mesures $\left(\dfrac{1}{k_n}\omega^p\delta_{Y_{n\mathbb{C}}}\right)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers μ.*

Démonstration. Posons $\nu_n = \dfrac{1}{k_n}\omega^p\delta_{Y_{n\mathbb{C}}}$ pour tout entier $n \geq 0$. Il s'agit de montrer que pour toute fonction ϕ continue sur $A(\mathbb{C})$, la suite numérique $\left(\displaystyle\int_{A(\mathbb{C})} \phi\nu_n\right)_{n\geq 0}$ converge vers $\displaystyle\int_{A(\mathbb{C})} \phi\mu$.

Il suffit en fait de le vérifier pour ϕ invariante par conjugaison complexe et C^∞ sur $A(\mathbb{C})$. Il existe alors un réel $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in [-t_0;t_0]$, la $(1;1)$-forme $\omega_t = \omega + \dfrac{it}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$ soit positive sur $A(\mathbb{C})$. Soient $t \in [-t_0;t_0]$ et $\epsilon > 0$.

On choisit un entier $e \geq 1$ et un modèle $(X;\widehat{\mathcal{L}})$ de $(A;L^{\otimes e})$ tels que la métrique sur $\mathcal{L}$ soit la métrique du cube $\| \ \|^{\otimes e}$.

Pour tout $Y \in A^\diamond$, on pose $\hat{h}(Y) = \dfrac{1}{e}\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y})$, où $\overline{Y}$ désigne l'adhérence de Y dans X. L'application $\hat{h}$ est par définition une hauteur de Weil relativement à L. D'après la proposition 4.2, il existe $n_1 \geq 0$ tel que $\left|\hat{h}\circ[c^{n_1}] - c^{2n_1}\hat{\mathrm{h}}_L\right| \leq c^{2n_1}\epsilon$ sur $A^\diamond$. On pose $e_1 = c^{2n_1}e$.

On construit un modèle $(X';\widehat{\mathcal{L}}')$ de $(A;L^{\otimes e_1})$ de la manière suivante :

On désigne par $f : X' \to X$ la normalisation de X par le morphisme $[c^{n_1}] : A \to A$, de sorte que l'on a $f_{\mathbb{Q}} = [c^{n_1}]$ sur $X'_{\mathbb{Q}} \simeq A$. On pose alors $\widehat{\mathcal{L}}' = (\mathcal{L}';\| \ \|') = f^*\widehat{\mathcal{L}}$.

Par la formule de projection (*cf* proposition 3.2.1 (iii) de [5] p. 949), on a, pour tout $Y \in A^\diamond$, la relation $\hat{h}([c^{n_1}](Y))e = \mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y}')$, où $\overline{Y}'$ désigne l'adhérence de Y dans X'. On en déduit :

$$\forall\, Y \in A^\diamond \quad \left|\hat{\mathrm{h}}_L(Y) - \frac{1}{e_1}\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y}')\right| \leq \epsilon \quad . \tag{5.1}$$

On pose $\| \|'_t = \| \|' \exp(-e_1 t\phi)$ et $\widehat{\mathcal{L}}'_t = (\mathcal{L}'; \| \|'_t)$. Par multilinéarité, on a la formule

$$\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}'_t}(X') - \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}'}(X') = (d+1)e_1^{d+1} k t^2 Q(t) + (d+1)e_1^{d+1} t \int_{A(\mathbb{C})} \phi\omega^d \quad ,$$

où $Q(T) = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\mathrm{C}_{d+1}^{j+1}}{(d+1)k} T^{j-1} \int_{A(\mathbb{C})} \phi \Big(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi\Big)^j \omega^{d-j}$ est un polynôme en T.

Sachant que $\hat{\mathrm{h}}_L(A) = 0$, on en déduit à l'aide de (5.1) la minoration

$$\frac{1}{e_1}\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}'_t}(X') \geq t^2 Q(t) - \epsilon + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi\mu \quad . \tag{5.2}$$

Maintenant, appliquons le théorème 3.2 (Hilbert-Samuel arithmétique) : il existe $n_2 \geq 1$ et $s \in \Gamma(X'; \mathcal{L}'^{\otimes n_2}) - \{0\}$ tels que $\max\limits_{A(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\|'_t \leq \epsilon n_2 - \mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}'_t}(X') n_2$.

Posons $Z = \mathrm{div}(s_{\mathbb{Q}})$. Puisque la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est générique dans A, il existe un entier $n_3 \geq 0$ tel que $\forall\ n \geq n_3\ Y_n \not\subset Z$. Alors, d'après la proposition 3.1, on a (pour tout $n \geq n_3$) :

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y_n}') n_2 - \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\mathrm{div}(s_{|\overline{Y_n}'})) &= -e_1^p \int_{Y_n(\mathbb{C})} (n_2 e_1 t\phi + \ln \|s_{\mathbb{C}}\|'_t)\omega^p \\ &\geq [\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}'_t}(X') - \epsilon] e_1^p n_2 k_n - e_1^{p+1} n_2 k_n t \int_{A(\mathbb{C})} \phi\nu_n \ . \end{aligned}$$

Majorons le premier membre : En utilisant (5.1) et la positivité de $\hat{\mathrm{h}}_L$, on obtient d'une part l'inégalité $\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\mathrm{div}(s_{|\overline{Y_n}'})) \geq -e_1^{p+1} p n_2 k_n \epsilon$ et d'autre part l'inégalité $\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y_n}') \leq [\hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) + \epsilon](p+1)e_1^{p+1} k_n$. On en déduit à l'aide de la minoration (5.2) que l'on a (pour tout $n \geq n_3$) :

$$(p+1)\hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi\nu_n \geq t^2 Q(t) - (2p+3)\epsilon + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi\mu \quad . \tag{5.3}$$

On fait tendre n vers $+\infty$ puis ϵ vers 0 dans ce qui précède ; sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) = 0$, on trouve l'inégalité

$$\liminf_{n\to+\infty} \Big(t \int_{A(\mathbb{C})} \phi\nu_n\Big) \geq t^2 Q(t) + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi\mu \quad .$$

Finalement, en faisant tendre t vers 0 :

- Par valeurs supérieures, on obtient $\liminf\limits_{n\to+\infty} \Big(\int_{A(\mathbb{C})} \phi\nu_n\Big) \geq \int_{A(\mathbb{C})} \phi\mu$;
- Par valeurs inférieures, on obtient $\limsup\limits_{n\to+\infty} \Big(\int_{A(\mathbb{C})} \phi\nu_n\Big) \leq \int_{A(\mathbb{C})} \phi\mu$.

On en déduit le résultat. □

6. Variante arakelovienne

Soient X une variété arithmétique de dimension d et $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \ \|)$ un faisceau inversible hermitien sur X. On suppose que $\mathcal{L}$ est ample sur X, que la métrique $\| \ \|$ est C^∞, et que la courbure $\omega = \omega_{\widehat{\mathcal{L}}_\mathbb{C}}$ est définie positive sur $X(\mathbb{C})$. Le couple $(X; \widehat{\mathcal{L}})$ est donc un modèle entier de $(X_\mathbb{Q}; \mathcal{L}_\mathbb{Q})$.

Posons $k = \deg_{\mathcal{L}_\mathbb{Q}}(X_\mathbb{Q})$ et $\mu = \dfrac{1}{k}\omega^{d-1}$. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés intègres de $X_\mathbb{Q}$ de dimension p. On pose $k_n = \deg_{\mathcal{L}_\mathbb{Q}}(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$.

On fait l'hypothèse $(*)$ suivante : pour tout fermé intègre Y de $X_\mathbb{Q}$ de dimension $p-1$, on a $\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}) \geq \mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$.

Remarquons que cette hypothèse est automatiquement vérifiée lorsque $p = 0$.

Proposition 6.1. *Supposons que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est générique dans $X_\mathbb{Q}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y_n}) = \mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$. Alors la suite de mesures $\left(\dfrac{1}{k_n}\omega^p \delta_{Y_{n\mathbb{C}}}\right)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers μ.*

Démonstration. Posons $\nu_n = \dfrac{1}{k_n}\omega^p\delta_{Y_{n\mathbb{C}}}$ pour tout entier $n \geq 0$. Soit ϕ une fonction invariante par conjugaison complexe et C^∞ sur $X(\mathbb{C})$. Il existe un réel $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in [-t_0; t_0]$, la $(1;1)$-forme $\omega_t = \omega + \dfrac{it}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$ soit positive sur $X(\mathbb{C})$.

Soient $t \in [-t_0; t_0]$ et $\epsilon > 0$. On pose $\| \ \|_t = \| \ \| \exp(-t\phi)$ et $\widehat{\mathcal{L}}_t = (\mathcal{L}; \| \ \|_t)$. Par multilinéarité, on a la relation

$$\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(X) - \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) = dkt^2Q(t) + dt\int_{X(\mathbb{C})} \phi\omega^{d-1} \quad ,$$

où Q est une fonction polynomiale.

D'après le théorème 3.2, il existe $n_1 \geq 1$ et $s \in \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n_1}) - \{0\}$ tels que $\max\limits_{X(\mathbb{C})} \ln \|s_\mathbb{C}\|_t \leq \epsilon n_1 - \mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(X) n_1$.

Posons $Z = \mathrm{div}(s_\mathbb{Q})$. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ étant générique dans $X_\mathbb{Q}$, il existe un entier $n_2 \geq 0$ tel que $\forall\ n \geq n_2\ Y_n \not\subset Z$. Alors, en appliquant la proposition 3.1, on obtient (pour tout $n \geq n_2$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y_n})n_1 - \mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{div}(s_{|\overline{Y_n}})) &= -\int_{Y_n(\mathbb{C})} (n_1 t\phi + \ln\|s_\mathbb{C}\|_t)\omega^p \\ &\geq [\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(X) - \epsilon]n_1k_n - n_1k_nt\int_{X(\mathbb{C})} \phi\nu_n \quad .\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse $(*)$, on a la minoration $\mathrm{h}_{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{div}(s_{|\overline{Y_n}})) \geq pn_1k_n\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$. On en déduit que pour tout $n \geq n_2$, on a

$$(p+1)\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y_n}) + t\int_{X(\mathbb{C})} \phi\nu_n \geq (p+1)\mathrm{h}'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) + t^2Q(t) - \epsilon + t\int_{X(\mathbb{C})} \phi\mu \quad .$$

On conclut comme dans la démonstration du théorème 5.1. □

7. Version quantitative

Soient K un corps de nombres, A une variété abélienne sur K de dimension d, et L un faisceau inversible symétrique et ample sur A. Soit $\| \ \|$ une métrique du cube sur $L_{\mathbb{C}}$. On note ω la courbure de $(L_{\mathbb{C}}; \| \ \|)$ et on pose $k = \deg_L(A)$.

On fixe un plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et un isomorphisme $A_\sigma(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^d/\Gamma$ de groupes analytiques (où Γ est un réseau de $\mathbb{C}^d$) tel que la $(1;1)$-forme ω_σ s'écrive $\omega_\sigma = \dfrac{i}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z_j}$ dans $\mathbb{C}^d/\Gamma$.

On munit $\mathbb{C}^d$ de la norme hermitienne canonique, notée $\| \ \|$. Lorsque $z \in \mathbb{C}^d$, on note ici $\dot{z}$ l'image de z dans $\mathbb{C}^d/\Gamma$. On munit $\mathbb{C}^d/\Gamma$ de la distance D induite par $\| \ \|$, *ie* $D(\dot{x}; \dot{y}) = \min\limits_{\gamma\in\Gamma} \|x - y + \gamma\|$. Par ailleurs, on pose $\eta_0 = \dfrac{1}{2} \min\limits_{\gamma\in\Gamma-\{0\}} \|\gamma\|$.

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de fermés intègres de A de dimension p. Posons $c_0 = \dfrac{2\pi^d}{(p+1)(d+1)k}$. Soit U_η une boule ouverte de $A_\sigma(\mathbb{C})$ de rayon $\eta \in]0; \eta_0[$. Si σ est réel, on suppose U_η disjoint de son conjugué complexe.

Théorème 7.1. *On suppose que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est générique dans A et que $Y_{n\mathbb{C}}$ est disjoint de U_η pour tout $n \geq 0$. Alors on a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) \geq c_0\eta^{2d+2}$.

Démonstration. Soient $\dot{z_0}$ le centre de U_η et U'_η le conjugué complexe de U_η. Soit $\psi : [0; \eta_0[\to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ vérifiant :
- La fonction ψ est nulle sur $[\eta; \eta_0[$;
- On a $\psi' \geq -1$ et $\psi'' \geq 0$ sur $[0; \eta_0[$.

Soit $\phi : A(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ la fonction caractérisée par les propriétés suivantes :
- Si $\|z - z_0\| < \eta$, alors $\phi(\dot{z}) = \dfrac{\pi}{2}\psi\Big(\|z - z_0\|^2\Big)$;
- La fonction ϕ est invariante par conjugaison complexe ;
- La fonction ϕ est nulle en dehors de $U_\eta \cup U'_\eta$.

La $(1;1)$-forme $\omega_1 = \omega + \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\phi$ est alors positive sur $A(\mathbb{C})$. On reprend avec $t_0 = t = 1$ la démonstration du théorème 5.1, jusqu'à l'inégalité (5.3) :

$$\forall\, n \geq n_3 \quad (p+1)\hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) + \int_{A(\mathbb{C})} \phi\nu_n \geq Q_1 - (2p+3)\epsilon \quad ,$$

où $Q_1 = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{d}\int_{A(\mathbb{C})} \phi\omega_1^j\omega^{d-j}$.

L'intégrale dans le premier membre est nulle puisque $Y_{n\mathbb{C}}$ et U_η sont disjoints. En faisant tendre n vers $+\infty$ puis ϵ vers 0 dans l'inégalité précédente, on obtient donc la minoration $\liminf_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) \geq \frac{Q_1}{p+1}$.

Par ailleurs, un calcul que j'épargne au lecteur montre que

$$Q_1 = \frac{4\pi^d}{k}\int_0^\eta \left[1 - \Big(1 + \psi'(r^2)\Big)^{d+1}\right] r^{2d+1}\mathrm{d}r \quad .$$

On a donc

$$\liminf_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(Y_n) \geq c_0 \int_0^\eta \left[1 - \Big(1 + \psi'(r^2)\Big)^{d+1}\right](2d+2) r^{2d+1}\mathrm{d}r \quad .$$

Maintenant, soit $\psi_0 : [0;\eta_0[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi_0(\rho) = \eta - \rho$ si $\rho < \eta$ et $\psi_0(\rho) = 0$ si $\rho \geq \eta$. En faisant tendre ψ vers ψ_0 convenablement, on en déduit le résultat. $\square$

8. Cas des courbes

Soient V une courbe lisse sur $\mathbb{Q}$, L un faisceau inversible ample sur V, $f : V \to V$ un morphisme fini, et $\alpha : L^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} f^*L$ un isomorphisme, où m est un entier > 1.

Notons μ la mesure à l'équilibre du système dynamique $(V_\mathbb{C}; f_\mathbb{C})$. Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de points fermés de V. Pour tout $n \geq 0$, on pose $k_n = [k(P_n) : \mathbb{Q}]$.

Citons pour mémoire la variante suivante de la proposition 4.1.4 de [3] :

Proposition 8.1. *Supposons que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ est générique dans V et que $\lim_{n\to+\infty} \hat{\mathrm{h}}_L(P_n) = 0$. Alors la suite de mesures $\left(\frac{1}{k_n}\delta_{P_{n\mathbb{C}}}\right)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers μ.*

Ce résultat s'applique en particulier au cas où $V = \mathbb{P}^1_K$ (avec K un corps de nombres) et f de degré > 1.

Bibliographie

[1] A. Abbes, *Hauteurs et discrétude.* Astérisque **245** (1997), 141–166.

[2] A. Abbes, T. Bouche, *Théorème de Hilbert-Samuel "arithmétique".* Annales de l'Institut Fourier **45** (1995), 375–401.

[3] P. Autissier, *Points entiers sur les surfaces arithmétiques.* Journal für die reine und angew. Math. **531** (2001), 201–235.

[4] Y. Bilu, *Limit distribution of small points on algebraic tori.* Duke Math. Journal **89** (1997), 465–476.

[5] J.B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms.* Journal of the AMS **7** (1994), 903–1027.

[6] G.S. Call, J.H. Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms.* Compositio Math. **89** (1993), 163–205.

[7] S. Cantat, *Endomorphismes des variétés homogènes.* Enseignement Math. **49** (2003), 237–262.

[8] A. Chambert-Loir, *Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes.* Annales Scientifiques de l'ENS **33** (2000), 789–821.

[9] H. Gillet, C. Soulé, *An arithmetic Riemann-Roch theorem.* Inventiones Math. **110** (1992), 473–543.

[10] W. Gubler, *Höhentheorie.* Math. Annalen **298** (1994), 427–455.

[11] V. Maillot, *Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables.* Mémoires de la SMF **80** (2000).

[12] L. Moret-Bailly, *Métriques permises.* Astérisque **127** (1985), 29–87.

[13] P. Philippon, *Sur des hauteurs alternatives I.* Math. Annalen **289** (1991), 255–283.

[14] B. Poonen, *Mordell-Lang plus Bogomolov.* Inventiones Math. **137** (1999), 413–425.

[15] M. Raynaud, *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion.* Progress in Math. **35** (1983), 327–352.

[16] R. Rumely, *On Bilu's equidistribution theorem.* Contemporary Math. **237** (1999), 159–166.

[17] L. Szpiro, E. Ullmo, S. Zhang, *Équirépartition des petits points.* Inventiones Math. **127** (1997), 337–347.

[18] E. Ullmo, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes.* Annals of Math. **147** (1998), 167–179.

[19] S. Zhang, *Small points and adelic metrics.* Journal of Algebraic Geometry **4** (1995), 281–300.

[20] S. Zhang, *Equidistribution of small points on abelian varieties.* Annals of Math. **147** (1998), 159–165.

Pascal Autissier
Université de Rennes I,
campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, France
E-mail : `pascal.autissier@univ-rennes1.fr`
URL: `http ://name.math.univ-rennes1.fr/pascal.autissier/`