МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
56 (2004), 81–84

UDK 517.977
оригинални научни рад
research paper

# CONTRÔLABILITÉ D'UN PROBLÈME NON LINÉAIRE INVERSE DE LA THÉORIE DE TRANSPORT

**S. Lahrech**

**Résumé.** Dans cette note, on étudie la contrôlabilité d'un problème non linéaire inverse de la théorie de transport. Comme référence, on se base sur un résultat d'estimation a priori pour certain problème de la théorie de transport (voir [1]).

## 1. Position du problème

On examine le problème suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(v,\nabla_x)u+\Sigma(x,v,t)u(x,v,t)=\int_V J(x,v',t,v)u(x,v',t)\,dv'+F(x,v,t)+w(u), \tag{1.1}$$

$(x,v,t)\in D=G\times V\times(0,T)$ où $u(x,v,t)$ caractérise la densité de répartition des particules dans l'espace de phase $G\times V$ au moment $t\in]0,T[$, $w\in\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$, $w(0)=0$, $w'(0)=0$. Le coefficient d'absorption $\Sigma(x,v,t)$, l'indicatrice de dissipation $J(x,v',t,v)$ et la fonction de source intérieure représentent le milieu où ce processus se produit.

Supposons par la suite que le domaine $G$ est strictement convexe, borné et la frontière de $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Posons

$$V=\{\,v:0<v_0\le|v|\le v_1\,\}$$

où $v_0,v_1$ sont deux nombres positifs tel que $v_0<v_1$. Soient $\Omega=G\times V$, $F(x,v,t)=f(x,v)g(x,v,t)+h(x,v,t)$. D'aprés [2], si $w\equiv 0$ et si toutes les caractérestiques du milieu $\Sigma,J,F$ ainsi que le flux sortant, l'état initial du processus et l'état final du processus sont donnés i.e.

$$u(x,v,t)=\mu(x,v,t),\qquad (x,v,t)\in\Gamma_+=\Upsilon_+\times[0,T] \tag{1.2}$$

où $\Upsilon_+=\{\,(x,v)\in\partial G\times V:(v,n_x)>0\,\}$, $n_x$ est la normale extérieure à la frontière $\partial G$ du domaine $G$ au point $x$,

$$u(x,v,0)=\varphi(x,v),\qquad (x,v)\in\overline{G}\times V \tag{1.3}$$

$$u(x,v,T)=0,\qquad (x,v)\in\overline{G}\times V, \tag{1.4}$$

---

*AMS Subject Classification*: 49 N 50
*Keywords and phrases*: Controlability, inverse problem, transport theory.

alors $\exists!(u,f)\in\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et vérifiant (1.1)–(1.4). Cela signifie qu'elle existe une commande $f\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ qui permet de transformer le système aux paramètres distribués (1.1)–(1.4) de l'état initial $\varphi(x,v)$ à l'état final $\Psi(x,v)=0$ en un temps $t=T$.

On suppose maintenant que $w$ est une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tel que $w(0)=w'(0)=0$ et on étudie la contrôlabilité du système (1.1)–(1.4).

Les espaces fonctionnels qu'on va utiliser on peut trouver dans l'article [1].

Posons

$$d=\sup_{(x,v)\in\overline{G}\times V}\alpha(x,v)$$

et supposons que $d<T$. Alors d'aprés [2] $\alpha\in\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})$ et $(v,\nabla)\alpha=-1$.

## 2. Contrôlabilité

Examinons maintenant le problème (1.1)–(1.4) où

$$J\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}\times V),\quad \mu\in\mathcal{C}^1_t(\Gamma_+),\quad \varphi\in\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega}),\quad \Sigma\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}),$$
$$h\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}),\quad g\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}),\quad 0<g_0\le g(x,v,0),\ \forall(x,v)\in\overline{\Omega},\qquad \varphi/\Upsilon_+=0.$$

Alors on a le résultat suivant de contrôlabilité du système (1.1)–(1.4):

Theorem 2.1. *$\exists\delta>0$, $\exists\varepsilon>0$, $\exists a>0$ tel que si*

$$d<a,\qquad \|\mu\|_{\mathcal{C}^1_t(\Gamma_+)}+\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}+\|h\|_{\mathcal{C}^1_t(\overline{D})}<\delta$$

*et si les conditions suivantes:*

$$\varphi(x,v)=\mu(x,v,0),$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial t}(x,v,T)=h(x,v,T),$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial t}(x,v,0)+(v,\nabla)\varphi+\Sigma(x,v,0)\varphi(x,v)-\int_V J(x,v',0,v)\varphi(x,v')dv'-h(x,v,0)=0,$$
$$\mu(x,v,T)=0,\qquad (x,v)\in\Upsilon_+,$$

*sont réalisées, alors*

$$\exists!(u,f)\in B_\varepsilon^{(\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1_t(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})})}(0)$$

*solution du problème (1.1)–(1.4). De plus, $f/\Upsilon_+=0$.*

*Preuve.* Désignons par $(\mathcal{S}')$ le problème linéaire associée au problème (1.1)–(1.4), i.e $(\mathcal{S}')$ est équivalent au problème (1.1)–(1.4) mais avec la condition $w\equiv0$. Posons

$$\begin{aligned}S=\{\,(u,f)\in\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega}):\exists!h_1\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}),\ \exists!\mu_1\in\mathcal{C}^1_t(\Gamma_+),\\ \exists!\varphi_1\in\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})\text{ tel que }(u,f)\text{ soit la solution du problème}(\mathcal{S}')\\ \text{associée à }(h_1,\mu_1,\varphi_1)\in Y,\ f/\Upsilon_+=0,\ \varphi_1/\Upsilon_+=0\,\},\end{aligned}$$

muni de la norme

$$\|(u,f)\|_S = \|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})},$$

où

$$\begin{aligned} Y = \{\, (h,\mu,\varphi) \in \mathcal{C}_t^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}_t^1(\Gamma_+) \times \mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega}) :\ & \frac{\partial \mu}{\partial t}(x,v,T) = h(x,v,T), \\ \mu(x,v,0) = \varphi(x,v),\ \mu(x,v,T) = 0,\ & \frac{\partial \mu}{\partial t}(x,v,0) + (v,\nabla)\varphi + \Sigma(x,v,0)\varphi(x,v) \\ & - \int_V J(x,v',0,v)\varphi(x,v')dv' - h(x,v,0) = 0,\ \forall (x,v) \in \Upsilon_+ \,\}. \end{aligned}$$

D'aprés [1], la solution $(u,f)$ du problème $(\mathcal{S})'$ dépend continûment de $(h_1,\mu_1,\varphi_1)$. D'où

$$\exists c > 0,\ \forall (u,f) \in S\ \|(u,f)\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})} \le c\|(u,f)\|_S.$$

Soit $B_l(0)$ le $l$ voisinage de 0 dans $Y_1 \times S$, où $Y_1 = \{\, (h_1,\mu_1,\varphi_1) \in Y :\ \varphi_1/\Upsilon_+ = 0 \,\}$, muni de la norme

$$\|(h_1,\mu_1,\varphi_1)\|_{Y_1} = \|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}.$$

Soit $H\colon B_l(0) \to Y_1$ l'opérateur défini par:

$$\begin{aligned} H(h_1,\mu_1,\varphi_1,u,f) = (\frac{\partial u}{\partial t} + (v,\nabla)u + \Sigma u - \int_V J(x,v',t,v)u(x,v',t)dv' \\ - fg - h_1 - w(u), u/\Gamma_+ - \mu_1, u(x,v,0) - \varphi_1(x,v)). \end{aligned}$$

Il est clair que $H(0) = 0$ et $H$ est continu au point 0.

D'autre part, on vérifie aisement que

$$H'_{(u,f)}(h_1,\mu_1,\varphi_1,u,f)(u_0,f_0)$$

existe en tout point $(u_0,f_0) \in S$ et vaut

$$\begin{aligned} (\frac{\partial u_0}{\partial t} + (v,\nabla)u_0 + \Sigma u_0 - \int_V J(x,v',t,v)u_0(x,v',t)\,dv' - f_0 g - w'(u)u_0, \\ u_0/\Gamma_+, u_0(x,v,0)) \end{aligned}$$

et $H'_{(u,f)}$ est continu au point 0.

Montrons maintenat que $[H'_{(u,f)}(0)]^{-1}$ existe et qu'il est borné. On sait déja que $\forall (h_1,\mu_1,\varphi_1) \in Y_1\ \exists! (u_0,f_0) \in \mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solution du problème $(\mathcal{S})'$. Par conséquent, $[H'_{(u,f)}(0)]^{-1}$ existe. D'autre part, $\forall (h_1,\mu_1,\varphi_1) \in Y_1$

$$\begin{aligned} \|[H'_{(u,f)}(0)]^{-1}(h_1,\mu_1,\varphi_1)\|_S &= \|(u_0,f_0)\|_S \\ &= \|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})} = \|(h_1,\mu_1,\varphi_1)\|_{Y_1}. \end{aligned}$$

D'où $[H'_{(u,f)}(0)]^{-1}$ est un opérateur borné de $Y_1$ vers $S$.

D'aprés le théorème de la fonction implicite, on déduit que

$$\exists \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall (h_1, \mu_1, \varphi_1) \in B_\delta^{Y_1}(0)\ \exists! (u_0, f_0) \in B_\varepsilon^S(0)$$

tel que $H(h_1, \mu_1, \varphi_1, u_0, f_0) = 0$. Soient $0 < \eta < \varepsilon,\ \alpha_1 > 0$ tels que

$$\forall s:\ 0 < |s| < \alpha_1\ |w(s)| < \frac{\eta}{8},\ |w'(s)| < \sqrt{\frac{\eta}{8}}.$$

On peut supposer $\alpha_1 < \sqrt{\eta/8},\ \delta < \varepsilon/8$. Alors

$$\exists \xi < \min(\frac{\alpha_1}{c}, \varepsilon)\ \forall (h_1, \mu_1, \varphi_1) \in B_\delta^{Y_1}(0)\ \exists! (u_0, f_0) \in B_\xi^S(0) \text{ tel que}$$

$$H(h_1, \mu_1, \varphi_1, u_0, f_0) = 0 \text{ et } \|(u_0, f_0)\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})} \le c\|(u_0, f_0)\|_S \le c\xi < \alpha_1.$$

D'où

$$\exists! (u_0, f_0) \in B_{\alpha_1}^{(\mathcal{C}_{t,(v,\nabla)}^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})})}(0)$$

solution du (1.1)–(1.4). De plus, $f_0/\Upsilon_+ = 0$. En effet:

Soit $(u, f) \in B_{\alpha_1}^{(\mathcal{C}_{t,(v,\nabla)}^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})})}(0)$ tel que $(u, f)$ soit solution du problème (1.1)–(1.4) associée à $(h_1, \mu 1, \varphi_1)$. Alors $(u, f) \in S$ et

$$\|(u, f)\|_S = \|w(u) + h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}_{(v,\nabla)}^1(\overline{\Omega})}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|(u, f)\|_S &\le \|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}_{(v,\nabla)}^1(\overline{\Omega})} + \|(u, f)\|_S \\
&\le \|w(u)\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + 2\left[\|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}_{(v,\nabla)}^1(\overline{\Omega})}\right] \\
&\le \frac{\eta}{8} + \|w'(u)\|_{\mathcal{C}(\overline{D})}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{\mathcal{C}(\overline{D})} \\
&\quad + 2\left[\|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}_{(v,\nabla)}^1(\overline{\Omega})}\right] \\
&\le \frac{\eta}{8} + \sqrt{\frac{\eta}{8}}\sqrt{\frac{\eta}{8}} + 2\left[\|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}_{(v,\nabla)}^1(\overline{\Omega})}\right] \\
&\le \frac{\eta}{4} + 2\left[\|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}_{(v,\nabla)}^1(\overline{\Omega})}\right] \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent $(u, f) = (u_0, f_0)$. Ainsi on achéve la démonstration. ∎

REFERENCES

[**1**] Lahrech, S., *Estimation a priori pour un problème linéaire inverse de la théorie de transport*, Mat. Vesnik **56** (2004), 57–61.

[**2**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., Differents. uravn. **21** (1985), 109–119.

[**3**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., Differents. uravn. **21** (1985), 870–885.

[**4**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., *Obratnaya zadacha dlya odnogo uravneniya perenosa*, Izv. AN SSSR **276** (1984), 555–559.

[**5**] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer, 1978.

(received 04.02.2003)

Université Mohamed I, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, Oujda, Maroc

*E-mail*: `lahrech@sciences.univ-oujda.ac.ma`