PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 28 (42), 1980, 129–134

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ КЛАССА $W^r H(\delta_0)_L$

Слободан Милорадович

Пусть L пространство интегрируемых 2π-периодических функций f и пусть

$$\omega(f,\delta)_L = \sup_{|t|\le\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|dx, \qquad 0 < \delta \le \pi,$$

модуль непрерывности функции f в L.

Через

$$H(\delta_0)_L = \{f\colon \omega(f,\delta_0)_L \le 1\}$$

обозначим класс функций f из L для которых модули непрерывности в фиксированой точке δ_0, $0 < \delta_0 \le \pi$, не превосходят единицы, а через

$$W^r H(\delta_0)_L = \{f\colon f^{(r)} \in H(\delta_0)_L, \ \ r \in N\}$$

обозначим класс функций из L для которых r-та производная $f^{(r)} \in H(\delta_0)_L$.

На данных классах будем рассматривать задачу о верхней грани коэффициентов фурье

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \ \ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

где n-фиксированное натуральное число. Аналогичная задача в пространстве C непрерывных 2π-периодических функций рассматривана Лебегом [1] и Автором [2].

Прежде всего дадим решение задачи о приближений 2π-периодический функций в метрике C через функции из C с периодом $\frac{2\pi}{k}(k \ge 2, k \in N)$. Период функции f будем обозначать $\Omega(f)$. Положим

$$\bar{f}(x) = \max_{0\le s\le k} f\left(x + \frac{2s\pi}{k}\right), \ \ f(x) = \min_{0\le s\le k} \underline{f}\left(x + \frac{2s\pi}{k}\right), \ \ s \in N,$$

$$d(x) = \frac{f(\bar{x}) - \underline{f}(x)}{2}, \ \ 0 \le x \le \frac{2\pi}{k}.$$

Справедлива такая

Лемма. *Если функция f принадлежит C, $\Omega(f) = 2\pi$, то*

(1) $$\inf_{\Omega(\varphi)=\frac{2\pi}{k}} f \|f-\varphi\|_{C[0,2\pi]} = \|d\|_{C_{\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]}}.$$

Доказательство. Сразу проверяется что $d \in C$, $d(0) = d\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, $\Omega(d) = \frac{2\pi}{k}$, $\Omega(\varphi^*) = \frac{2\pi}{k}$ где $\varphi^* = \frac{\bar{f}+\underline{f}}{2}$.

Так как для любого $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) - \varphi^*(x) \le \bar{f}(x) - \varphi^*(x) = d(x)$, $f(x) - \varphi^*(x) \ge \underline{f}(x) - \varphi^*(x) = -d(x)$, то $|f(x) - \varphi^*(x)| \le d(x)$ и

(2) $$\|f - \varphi^*\|_{C[0,2\pi]} \le \|d\|_{\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]}.$$

Учитывая что d непрерывна функция на замкнутом интервале то существует такое $x_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{k}\right]$ что $d(x_0) = \|d\|$. Для любой φ, $\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}$,

$$\|f-\varphi\|_{C[0,2\pi]} \ge \max_{0\le s\le k} \left| f\left(x_0 + \frac{2\pi s}{k}\right) - \varphi(x_0)\right| \ge \max(\bar{f}(x_0) - \varphi(x_0), \varphi(x_0) - \underline{f}(x_0)) \ge d(x_0) = \|d\|,$$

т.е.

(3) $$\|f-\varphi\|_{C[0,2\pi]} \ge \|d\|_{C\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]}.$$

Из (2) и (3) получается (1).

Так как множество $C_{\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]}$ не строго выпукло то функция с помощью которой достигается равенство, вообще говоря, (1) неединствена.

Заметим что лемма справедлива в более общем случае, когда $\Omega(\varphi) = \frac{2\pi l}{k}$, $(l, k) = 1$. Доказательство не немяется.

Теперь мы можем доказат такую теорему:

Теорема 1. *Если $f \in H(\delta_0)_L$, то*

$$\frac{1}{n\delta_0\pi} \le \sup a_n(f) = \sup b_n(f) \le \begin{cases} \frac{1}{2\pi \sin\frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0 \in \left(0, \frac{2\pi}{3\pi}\right] \\ \frac{1}{4\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0 = \frac{2\pi}{(2s+1)n}, \; s = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\sup a_n(f) = \sup b_n(f) = \frac{1}{2\pi}, \frac{2\pi}{3n} \le \delta_0 \le \pi.$$

Доказательство. В силу периодичности

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right)\cos nx dx.$$

Следовательно, если f^* экстремальная функция для $b_n(f)$, $f^*\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)$ будет экстремальная функция для $a_n(f)$ и

(4) $$\sup_{f\in H(\delta_0)_L} a_n(f)=\sup_{f\in H(\delta_0)_L} b_n(f).$$

Пусть $\delta_0\in\left(0,\frac{\pi}{n}\right]$. Так как

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\cos n\left(x-\frac{\delta_0}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\cos n\left(x+\frac{\delta_0}{2}\right)\right]dx=\frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{\delta_0}{2}\right)-f\left(x-\frac{\delta_0}{2}\right)\right]\cos nx dx$$

то $b_n(f)\le\frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}$, т.е.

(5) $$\sup_{f\in H(\delta_0)_L} b_n(f)\le\frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}.$$

Для функции $\varphi(x)=\frac{\operatorname{sig} n\sin nx}{4n\delta_0}$,

$$\omega(\varphi,\delta_0)=\sup_{|t|\le\delta_0}\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx=\sup_{|t|\le\delta_0}\frac{4nt}{4n\delta_0}=1 \text{ и } \varphi\in H(\delta_0)_L.$$

Учитывая (4), (5) и что

$$b_n(\varphi)=\frac{1}{4n\delta_0\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin nx|dx=\frac{1}{n\delta_0\pi},$$

получаем

(6) $$\frac{1}{n\delta_0\pi}\le\sup_{f\in H(\delta_0)_L} a_n(f)=\sup_{f\in H(\delta_0)_L} b_n(f)\le\frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}.$$

Пусть, теперь, $\delta_0=\frac{2\pi}{kn}$, $k\ge 2$, $k\in N$. Так как экстремльная функциь f должна быт нечетна, то

$$f(x)\sim\sum_{v=1}^{\infty} b_n(f)\sin vx.$$

Тогда

$$f\left(x+\frac{\pi}{kn}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{kn}\right)\sim\sum_{v=1}^{\infty}2b_n(f)\sin\frac{v\pi}{kn}\cos vx.$$

Если $v=knj$, $j=1,2,\dots$, то

$$f\left(x+\frac{\pi}{kn}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{kn}\right)\sim\sum_{v\neq knj}^{\infty}2b_n(f)\sin\frac{v\pi}{kn}\cos vx,$$

и для любой 2π-периодической функции

$$\varphi(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}[a_j(\varphi)\cos jx+b_j(\varphi)\sin jx],$$

$$b_n(f)=\frac{1}{2\pi\sin\frac{\pi}{k}}\int_{\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{\pi}{kn}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{kn}\right)\right][\cos nx-\varphi(knx)]dx$$

откуда получаем

$$|b_n(\varphi)|\leq\frac{1}{2\pi\sin\frac{\pi}{k}}\inf_{\varphi}\max_{x\in[-\pi,\pi]}|\cos nx-\varphi(knx)|=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sin\frac{\pi}{k}}\inf_{\varphi}\|\cos x-\varphi(kx)\|_{C[0,2\pi]}$$

Так кат $\Omega(\varphi(kx))=\frac{2\pi}{k}$, то пользуясь леммой легко вычислается что

$$\inf_{\varphi}\|\cos x-\varphi(kx)\|_{C[0,2\pi]}=\begin{cases}1, & k=2s,\quad s=1,2,\dots,\\ \cos\dfrac{\pi}{2k}, & k=2s+1,\quad s=1,2,\dots.\end{cases}$$

Для $\delta_0=\frac{2\pi}{n(2s+1)}$, $s=1,2,\dots,$

$$b_n(f)\leq\frac{\cos\frac{\pi}{2(2s+1)}}{2\pi\sin\frac{\pi}{2s+1}}=\frac{1}{4\pi\sin\frac{\pi}{2(2s+1)}},$$

т.е,

$$\sup_{f\in H(\delta_0)_L}b_n(f)\leq\frac{1}{4\pi\sin\frac{n\delta_0}{4}}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) получается утврждение первой части Теоремы 1. Из (7) для $\delta_0=\frac{2\pi}{3n}$ следует что

$$\sup_{f\in H\left(\frac{2\pi}{2n}\right)_L}b_n(f)\leq\frac{1}{2\pi}. \tag{8}$$

Для функции $g(x) = \frac{1}{4}\left[\delta\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - \delta\left(x + \frac{\pi}{2n}\right)\right]$, где δ функция Дирака, $\omega\left(g, \frac{2\pi}{3n}\right)_L = 1$,

$$b_n(g) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\delta\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - \delta\left(x + \frac{\pi}{2n}\right)\right]\sin nx dx = \frac{1}{2\pi}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует

$$\sup_{f \in H\left(\frac{2\pi}{2n}\right)_L} b_n(f) = \frac{1}{2\pi}.$$

Пусть, теперь, $\delta_0 > \frac{2\pi}{3n}$. Так как $\omega(g, \delta_0) = 1$, $b_n(g) = \frac{1}{2\pi}$,

$$b_n(f) \le \frac{1}{2\pi}\omega\left(f, \frac{2\pi}{3n}\right) \le \frac{1}{2\pi}\omega(f, \delta_0)_L,$$

то

$$\sup_{f \in H(\delta_0)_L} b_n(f) = \frac{1}{2\pi},$$

чем доказана и вторая часть Теоремы 1.

Теорема 2. *Если $f \in W^r H(\delta_0)_L$, то*

$$\frac{1}{n^{r+1}\delta_0\pi} \le \sup a_n(f) = \sup b_n(f) \le \begin{cases} \frac{1}{2\pi n^r \sin\frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0 \in \left(0, \frac{2\pi}{3n}\right] \\ \frac{1}{4\pi n^r \sin\frac{n\delta_0}{4}}, & \delta_0 = \frac{2\pi}{n(2s+1)},\ s = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\sup a_n(f) = \sup b_n(f) = \frac{1}{2\pi n^r},\quad \delta_0 \in \left[\frac{2\pi}{3n}, \pi\right].$$

Доказательство. Интегрируя по частям получаем что

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x)\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)dx,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x)\sin\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)dx$$

и повтарая те же самые расуждения как в Теореме 1. получаем доказательство Теоремы 2.

Из Теоремы 1. и 2. получается асимптотическая формула как

Следствие. Если $f \in W^r H(\delta_0)_L (W^0 H(\delta_0)_L = H(\delta_0)_L)$, то

$$\sup b_n(f) = \sup a_n(f) \approx \frac{1}{n^{r+1}\delta_0 \pi} \text{ при } \delta_0 \to 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lebesgue H., *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz*, Bull. Soc. Math. France, 38 (1910), 184–210.

[2] Miloradović S., *Aproksimacije funkcija Fourier-ovim sumama i gornja granica Fourier-ovih koeficijenata*, magistarski rad, Beograd 1977, str. 51.

Београд
Јурија Гагарина 115/82