PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 28 (42), 1980, pp. 187–194

SUR LA RÉPARTITION DES ZÉROS D'UNE CLASSE DE POLYNÔMES

D.M. Simeunović

(Communiqué le 28. X 1977.)

On considère, dans cet article, le polynôme

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (n > 2) \tag{1}$$

et la répartition de ses zéros le plan complexe sous l'hypothèse que ses coefficients a_k satisfont aux conditions

$$a_k > 0 \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \ \text{ et } \ 0 < \frac{a_0}{a_1} < \frac{a_1}{a_2} < \cdots < \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

ou plus généralement

$$|a_k| > 0 \ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \ \text{ et } \ 0 < \left|\frac{a_0}{a_1}\right| < \left|\frac{a_1}{a_2}\right| < \cdots < \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|.$$

On démontre, sous ces conditions, les théorèmes suivants, quant au polynôme (1).

Théorème 1. *Si l'on a, dans* (1), $a_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *et*

$$a_k^{\,2} \geq 4a_{k-1}a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2}$$

le polynôme (1) *ne possède que des zéros négatifs simples, un seul dans chacun des intervalles*

$$\left(-\frac{2a_0}{a_1}, 0\right), \ \left(-\frac{2a_1}{a_2}, -\frac{2a_0}{a_1}\right), \ldots, \left(-\frac{2a_{n-1}}{a_n}, -\frac{2a_{n-2}}{a_{n-1}}\right). \tag{3}$$

Théorème 2. *Si on a, dans* (1), $a_k > 0 (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *et*

$$a_k^{\,2} \geq 2a_{k-1}a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4}$$

le polynôme (1) *n'a pas de zéros dans le domaine*

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg\{z\} \leq \frac{\pi}{2}.$$

THÉORÈME 3. *Si on a, dans* (1), $|a_k| > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$

$$|a_k|^2 \geq 5|a_{k-1}a_{k+1}| \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{5}$$

alors le polynôme (1) *est différent de zéro à la limite de chaque anneau circulaire*

$$\sqrt{5}\left|\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}\right| < |z| < \sqrt{5}\left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right| \quad (k = 2, 3, \ldots n) \tag{6}$$

et n'a qu'un zéro à l'intérieur de chacun d'eux.

Les théorèmes 1, 2 et 3 qui on trait au polynôme (1) sont valables, sous les mêmos conditions, pour la fonction entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{7}$$

La démonstration des théorèmes 2 et 3, dans le cas de la fonction entière (7) est identique à celle du polynôme (1). Pour démontrer le théorème 1 dans le cas de la fonction entière (7) on considére la suite des polynômes

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad (n = 3, 4, \ldots)$$

c'est-à-dire la suite des sommes partielles de la série (7).

On considère, dans [1], la fonction entière

$$f(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r_2} + \cdots + \frac{z^n}{r_1 r_2 \cdots r_n} + \cdots \tag{8}$$

et la répartition, dans le plan complexe, des ses zéros, sous l'hipothèse que les r_k satisfont aux conditions $1 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n \cdots$ ou plus généralement $1 < |r_1| < |r_2| < \cdots < |r_n| < \cdots$. Les théorèmes sont démontrés pour la fonction (8):

(i) Si $r_1 > 1$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, la fonction (8) n'a pas de zéros dans le région

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg\{z\} \leq \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Si $r_1 > 1$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 4$ $(k = 1, 2, \ldots)$, la fonction (8) n'a que des zéros simples négatifs, un dans chaque intervalle

$$(-2r_1, 0), \quad (-2r_{k+1}, -2r_k), \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

(iii) Si les r_k sont réels ou complexe, et si $|r_1| < 1$ et $\left|r_{\frac{k+1}{r_k}}\right| \geq 5(k = 1, 2, \ldots)$, la fonction (8) est différente de zéro sur la limite de chaque anneau circulaire

$$\sqrt{|r_{k-1}r_k|} < |z| < \sqrt{|r_k r_{k+1}|} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \ \ (|r_0| = 1) \tag{9}$$

et n'a qu'un zéro à l'interieur de chacun d'eux.

Si on pose, dans (8), $r_1 = a$, $\frac{r_{k+1}}{r_k} = a^2$, on obtient la fonction

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k^2} z^k. \tag{10}$$

Dans [2, tome II, p. 69, probléme 176], c'est-à-dire [2, tome I, p. 123, problème 200], G. Pólya et G. Szegö on démontré que

1) pour $a \geq 2$ la fonction (10) n'a que des zéros négatifs réels,

2) pour $|a| \geq 2,5$ la fonction (10) est différente de zéro à la limite de chaque anneau circulaire

$$|a|^{2k-2} < |z| < |a|^{2k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

et n'a, à l'intérieur de chacun d'eux, qu'un zéro.

Les théorèmes (ii) et (iii) représentent la généralisation des résultats 1) et 2) de G. Pólya et G. Szegö. Les méthodes de démonstration des théorèmes (ii) et (iii) données dans [1] sont semblables aux méthodes de démonstration de 1) et 2) de G. Pólya et G. Szegö [2].

Remarque. On peut prendre, dans les théorèmes (i), (ii), et (iii), $r_1 > 0$, respectivement $|r_1| > 0$, alors qu'on peut prendre, dans (iii), c'est-à-dire dans (9) l'anneau

$$\sqrt{5}|r_{k-1}| < |z| < \sqrt{5}|r_k| \qquad (k = 1, 2, \ldots), \ \ (|r_0| = 1).$$

Les théorèmes (i), (ii) et (iii) qui considèrent la fonction entière (8), sont valable, sous les mêmes conditions, pour chaque somme partielle

$$f_n(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r_2} + \cdots + \frac{z^n}{r_1 r_2 \cdots r_n} \qquad (n = 3, 4, \ldots). \tag{11}$$

Les théorèmes 1, 2, et 3 que se rapportent au polynôme (1) s'obtiennent simplement des théorèmes (i), (ii) et (iii), démontrés dans [1], avec la différence qu'on y prend, au lieu de $r_1 > 1$, resp. $|r_1| > 1, r_1 > 0$, resp. $|r_1| > 0$, en ramenant au préalble le polynôme (1) à la forme (11).

Afin de pouvoir obtenir d'autres conclusions sur les zéros du polynôme (1), nous démontrerons ici complètement les théorèmes 1, 2, et 3.

Démonstration du théorème 1. Considerons un polynôme de la forme

$$Q(z) = 1 + \frac{z}{r_1} + \frac{z^2}{r_1 r} + \cdots + \frac{z_n}{r_1 r_2 \cdots r_n} \qquad (n > 2) \tag{12}$$

où on a $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n$. Les module du k-ième terme de (12) est maximal pour $r_k < |z| < r_{k+1} (k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Les modules des termes de (12) croissent continument, du premier jusqu'au terme maximal, pour ces valeurs de z, et décroissent ensuite du terme maximal jusqu'au dernier [2, tome I, p. 20, problème 117].

Soit $(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1}(-x)^k$ le terme maximal dans (12) pour $z = -x(x > 0)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} &Q(-x)(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1}(-x)^k = \\ (13) \qquad &= \left(1 - \frac{x}{r_{k+1}} + \frac{x^2}{r_{k+1} r_{k+2}} + (-1)^{n-k} \frac{x^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \cdots r_n}\right) \\ &- \frac{r_k}{x} + \frac{r_k r_{k-1}}{x^2} - \cdots + (-1)^k \frac{r_k r_{k-1} \cdots r_1}{x^k} > 1 - \frac{x}{r_{k+1}} - \frac{r_k}{x}. \end{aligned}$$

Pour $x = 2r_k$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 4$, c'est-à-dire $\frac{r_k}{r_{k+1}} \leq \frac{1}{4} (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ il résulte de (13)

$$(14) \qquad Q(-2r_k)(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1}(-2r_k)^k > \frac{1}{2} - \frac{2r_k}{r_{k+1}} \geq 0.$$

De (12) on a $Q(0) > 0$ et de (14)

$$(15) \qquad Q(-2r_1) < 0, \quad Q(-2r_2) > 0, \ldots, (-1)^n Q(-2r_n) > 0.$$

(Dans la deuxième inégalité (15), pour $n = 2$ et $r_2 = 4r_1$ la signe $>$ devient $=$). Il résulte de (15) que $Q(z)$ n'a que des zéros négatifs simples, exactement $n(n > 2)$, à rasion d'un par intervalle

$$(16) \qquad (-2r_1, 0), \quad (-2r_{k+1}, -2r_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si on divile par a_0 le polynôme (1), on obtient

$$(17) \qquad \frac{P(z)}{a_0} = 1 + \frac{z}{\frac{a_0}{a_1}} + \frac{z^2}{\frac{a_0}{a_2}} + \cdots + \frac{z^n}{\frac{a_0}{a_n}}.$$

Le polynôme (17) peut se mettre sous la forme

$$(18) \qquad \frac{P(z)}{a_0} = 1 + \frac{z}{\frac{a_0}{a_1}} + \frac{z^2}{\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2}} + \cdots + \frac{z^n}{\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}}.$$

Si on pose, dans (18) $\frac{a_0}{a_1} = r_1, \frac{a_n}{a_2} = r_2, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n} = r_n$ et $\frac{P(z)}{a_0} = Q(z)$, on obtient le polynôme (12). Les conditions

$$0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n$$

et

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 4 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

se réduisent maintenant aux conditious $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $0 < \frac{a_0}{a_1} < \frac{a_1}{a_2} < \cdots < \frac{a_{n-1}}{a_n}$ et conditions (2), et les intervalles (16) aux intervalles (3), ce qui démontre le théorème 1.

Conséquence du théorème 1. *Si on a, dans le polynôme* (1) $a_k > 0 (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *et* ${a_k}^2 > a_{k-1}a_{k+1}(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ *et si la condition*

$${a_s}^2 \geq 4a_{s-1}a_{s+1}$$

est satisfaite pour un nombre impair $k = s < n$, *le polynôme* (1) *a au moins un zéro dans l'intervalle* $\left(-\frac{2a_{s-1}}{a_s}, 0\right)$.

Démonstration. Si dans (12) $\frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, et si la condition $\frac{r_{s+1}}{r_s} \geq 4$ est remplie pour un nombre impair $k = s < n$, on obtient pour $x = -2r_s$, de (13)

$$\begin{aligned} Q(-2r_s)(r_1r_2\cdots r_s)^{-1}(-2r_s)^s &= \left[1 - \frac{2r_s}{r_{s+1}} + \left(\frac{2r_s}{r_{s+1}}\right)^2\left(\frac{r_{s+1}}{r_{s+2}}\right)\right. \\ &- \left.\left(\frac{2r_s}{r_{s+1}}\right)^3\left(\frac{r_{s+1}}{r_{s+2}}\right)^2\left(\frac{r_{s+2}}{r_{s+3}}\right) + \cdots\right] - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{r_{s-1}}{r_s}\right) - \\ &- \frac{1}{8}\left(\frac{r_{s-1}}{r_s}\right)^2\left(\frac{r_{s-2}}{r_{s-1}}\right) + \cdots > \frac{1}{2} - \frac{2r_s}{r_{s+1}} \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui signifie que $Q(-2r_s) < 0$. Etant donné que $Q(0) > 0$, le polynôme $Q(z)$ a au moins un zèros dans l'intervalle $(-2r_s, 0)$. Les conditions $r_1 > 0$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, avec $\frac{r_{s+1}}{r_s} \geq 4$ pour un $k = s < n$ impair, valable pour $Q(z)$, se réduisent, dans ce cas du polynôme (1), à $a_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et ${a_k}^2 > a_{k-1}a_{k+1}$ $(k = 1, 2, , \ldots, n-1)$, et pour $k = s < n$ impair, à la condition ${a_s}^2 \geq 4a_{s-1}a_{s+1}$, alors que l'intervalle $(-2r_s, 0)$ qui ce rapporte à $Q(z)$, se réduit à la suite de $r_s = \frac{a_{s-1}}{a_s}$, dans le cas du polynôme (1), à l'intervalle $\left(-\frac{2a_{s-1}}{a_s}, 0\right)$, ce qui démontre la conséquence du théorème 1.

Démonstration du théorème 2. Pour $0 \leq |z| \leq r_1$ (12) n'a pas zéros, ainsi que l'etablit le théorème de Kakeya [2, tome I, section III, probléme 22].

Soient $-\frac{\pi}{2} \leq \arg\{z\} \leq \frac{\pi}{2}$, $z = |z|e^{\theta i}$. Pour $r_k < |z| < r_{k+1}(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ nous écrirons (12) dans la forme

$$\begin{aligned} Q(z) = \frac{z^k}{r_1r_2\cdots r_k}&\left[1 + \left(\frac{z}{r_{k+1}} + \frac{r_k}{z}\right) + \left(\frac{z^2}{r_{k+1}r_{k+2}} + \frac{r_kr_{k-1}}{z^2}\right) + \right. \\ &\cdots + \left(\frac{z_k}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_{2k}} + \frac{r_kr_{k-1}\cdots r_1}{z^k}\right) + \left(\frac{z^{k+1}}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_{2k+1}}\right) + \\ &\left.\cdots + \frac{z^{n-k}}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_n}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{19}$$

La partie réelle entre les crochets (19) est égale à

$$
\begin{aligned}
&1+\left(\frac{|z|}{r_{k+1}}+\frac{r_k}{|z|}\right)\cos\theta+\left(\frac{|z|^2}{r_{k+1}r_{k+2}}+\frac{r_kr_{k-1}}{|z|^2}\right)\cos 2\theta+\\
(20)\quad &\cdots+\left(\frac{|z^k|}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_{2k}}+\frac{r_kr_{k-1}\cdots r_1}{|z|^k}\right)\cos k\theta+\\
&\left(+\frac{|z|^{k+1}}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_{2k+1}}\right)\cos(k+1)\theta+\cdots+\left(\frac{|z|^{n-k}}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_n}\right)\cos(n-k)\theta.
\end{aligned}
$$

Nous démontrerons que l'expression (20) est positive pour $-\frac{\pi}{2}\le\arg\{z\}=\theta\le\frac{\pi}{2}$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k}\ge 2$ $(k=1,2,\dots n-1)$. Etant donné que les dérivées secondes par rapport à $|z|$, de chacune des fonctions

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(|z|)=\left(\frac{|z|}{r_{k+1}}+\frac{r_k}{|z|}\right),\ \varphi_2(|z|)=\left(\frac{|z|^2}{r_{k+1}r_{k+2}}+\frac{r_kr_{k-1}}{|z|^2}\right),\dots,\\
&\varphi_k(|z|)=\left(\frac{|z|^k}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_{2k}}+\frac{r_kr_{k-1}\cdots r_1}{|z|^k}\right),\\
&\varphi_{k+1}(|z|)=\left(\frac{|z|^{k+1}}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_{2k+1}}\right),\dots,\\
&\varphi_{n-k}(|z|)=\left(\frac{|z|^{n-k}}{r_{k+1}r_{k+2}\cdots r_n}\right)
\end{aligned}
$$

sont non négatives, les φ_i sont des fonctions convexes vers le bas, et pour $r_k\le|z|\le r_{k+1}$ $(k=1,2,\dots,n-1)$ elles prennent les valeurs maximales, soit pour $|z|=r_k$, soit pour $|z|=r_{k+1}$. A cause de $\frac{r_k}{r_{k+1}}\le\frac{1}{2}$ $(k=1,2,\dots,n-1)$ les fonctions φ_i ne dépassent pas, dans l'intervalle $[r_k,r_{k+1}]$ les valeurs

$$
\varphi_1^*=\left(1+\frac{1}{2}\right),\ \varphi_2^*=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\right),\ \varphi_3^*=\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}\right),\ \varphi_4^*=\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{10}}\right),\dots
$$

Le second terme, dans (20), est non négatif pour $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, et la somme des termes suivants ne dépasse pas

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}\right)+\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{10}}\right)+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\\
&\cdots<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1,
\end{aligned}
$$

ce qui rend l'expression (20) positive, et fait que (12) n'a pas de zéros dans le domaine $-\frac{\pi}{2}\le\arg\{z\}\le\frac{\pi}{2}$ quand $r_1>0$ et $\frac{r_{k+1}}{r_k}\ge 2$ $(k=1,2,\dots,n-1)$. Ceci signifie que le polynôme (18), c'est-à-dire (1), n'a pas de zéros dans le domaine $-\frac{\pi}{2}\le\arg\{z\}\le\frac{\pi}{2}$ quand ${a_k}^2\le 2a_{k-1}a_{k+1}$ $(k=1,2,\dots,n-1)$ puisque (1) se réduit à (18) pour $a_k>0$ $(k=0,1,2,\dots,n)$, $\frac{a_{k-1}}{a_k}=r_k$ $(k=1,2,\dots,n-1)$ et le condition $\frac{r_{k+1}}{r_k} \geq 2$ se réduit à $a_k{}^2 \geq 2a_{k-1}a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$, c'est-à-dire á (4), ce qui démontre le théoreème 2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. Soit

(21)
$$\Phi(z) = \frac{Q(z) - (r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k}{(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k} = \left(\frac{z}{r_{k+1}} + \frac{z^2}{r_{k+1} r_{k+2}} + \cdots + \frac{z^{n-k}}{r_{k+1} r_{k+2} \cdots r_n}\right) + \frac{r_k}{z} + \frac{r_k r_{k-1}}{z^2} + \cdots + \frac{r_k r_{k-1} \cdots r_1}{z^k}$$

et que z appartienne à l'anneau circulaire

(22)
$$\sqrt{5}|r_{k-1}| < |z| < \sqrt{5}|r_{k+1}| \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1), \ \ (|r_0| = 1).$$

On a alors

(23)
$$|\Phi(z)| = \left|\frac{Q(z) - (r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k}{(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k}\right| \leq \left(\frac{|z|}{|r_{k+1}|} + \frac{|z|^2}{|r_{k+1} r_{k+2}|} + \cdots + \frac{|z|^{n-k}}{|r_{k+1} r_{k+2} \cdots r_n|}\right) + \frac{|r_k|}{|z|} + \frac{|r_k r_{k-1}|}{|z|^2} + \cdots + \frac{|r_k r_{k-1} \cdots r_1|}{|z|^k}.$$

Pour $|z| = s|r_k| (s > 1)$ il résulte de (23)

$$\begin{aligned}|\Phi| \leq\ & s\left|\frac{r_k}{r_{k+1}}\right| + s^2\left|\frac{r_k}{r_{k+1}}\right|^2 \cdot \left|\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}\right| + s^3\left|\frac{r_k}{r_{k+1}}\right|^3 \cdot \left|\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}\right|^2 \cdot \left|\frac{r_{k+2}}{r_{k+3}}\right| \cdots \\ & + s^{n-k}\left|\frac{r_k}{r_{k+1}}\right|^{n-k} \cdot \left|\frac{r_{k+1}}{r_{k+2}}\right|^{n-k-1} \cdots \left|\frac{r_{n-1}}{r_n}\right| + \\ & + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\left|\frac{r_{k-1}}{r_k}\right| + \frac{1}{s^3}\left|\frac{r_{k-1}}{r_k}\right|^2 \cdot \left|\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}\right| + \cdots + \\ & + \frac{1}{s^k}\left|\frac{r_{k-1}}{r_k}\right|^{k-1} \cdot \left|\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}}\right|^{k-2} \cdots \left|\frac{r_1}{r_2}\right|.\end{aligned}$$

Pour

(24)
$$s = \sqrt{5}$$

et

$$\left|\frac{r_k}{r_{k+1}}\right| \leq \frac{1}{5} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2},$$

on a

$$\begin{aligned}|\Phi| \leq\ & \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{(\sqrt{5})^4} + \frac{1}{(\sqrt{5})^9} + \cdots \\ & + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{(\sqrt{5})^4} + \frac{1}{(\sqrt{5})^9} + \cdots = \\ & = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{(\sqrt{5})^4} + \frac{2}{(\sqrt{5})^9} + \cdots \leq \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{(\sqrt{5})^4} + \frac{2}{(\sqrt{5})^7} = \frac{10}{(\sqrt{5})^3 - 1} < 1.\end{aligned}$$

A cause de (24), et de la définition (21) de $\Phi(z)$, on aura pour chaque z sur le cercle $|z| = \sqrt{5}|r_k|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left|\frac{Q(z) - (r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k}{(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k}\right| < 1 \text{ c'est-à-dire } \left|\frac{Q(z)}{(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k} - 1\right| < 1,$$

d'où il résulte que $\frac{Q(z)}{(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k} \neq 0$, c'est-à-dire $Q(z) \neq 0$. A la suite du théorème de Rouché il résulte maintenent que les fonctions $(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k$ et $[Q(z) - (r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k]$, c'est-à-dire $(r_1 r_2 \cdots r_k)^{-1} z^k$ et $Q(z)$ ont, dans le cercle $|z| < \sqrt{5}|r_k|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ un nombre égal de zéros, donc k. Ceci signifie que dans le cercle $|z| < \sqrt{5}|r_{k-1}|$ la fonction $Q(z)$ a $(k-1)$ zéros, ce qui prouve qu'à l'intérieur de chacun des anneau circulaires (22) se trouve un zéro du polynôme $Q(z)$.

Les conditions $|r_1| > 0$ et $\left|\frac{r_{k+1}}{r_k}\right| \geq 5$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ qui se rapportent au polynôme $Q(z)$, se reduisent, pour polynôme $P(z)$, à $|a_k| > 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et $|a_k|^2 \geq 5|a_{k-1} a_{k+1}|$, c'est-à-dire (5), ce qui prouve le théorème 3.

RÉFÉRENCES

[1] D.M. Simeunović, *Remarque sun les zéros d'une classe des fonctions entières,* GLAS de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, t. CCLX.
Classe des Sciences mathématiques et naturelles, No. 26 (1965), 75–83.

[2] G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,* Berlin 1954.