PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 36 (50), 1984, pp. 119–124

СООТВЕтсТВИЯ ГАЛУА ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ЗАДЕРЖКАМИ, *I*

М.И. Миличич

Резюме. В работе рассматривается вопрос описывания замкнутых классов функций с задержками с помощью отношений. Для получения основных теорем определяется понятие временного отношения, основное понятие стабилизирования функций с задержкой временного отношения и операции над временными отношениями, что позволяет рассматривать замкнутые классы времменых отношений. Получаются те же самые результаты как при описании замкнутых классов функций k-значной логики с помощью отношений ([4], [5]), т.е. показывается, что существует антиизоморфизм решеток замкнутых классов функций с задержками (содержащих селекторы) и замкнутых классов временных отношений.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ алфавит переменных, принимающих в качестве значений элементы из множества $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Обозначим через P_k множество всех функций $f(x_1, \dots, x_n)$ аргументы которых и сами функции принимают в качестве значений елементы из E_k. Пусть t параметр, принимающий одно из значений $0, 1, 2, \dots$. Будем называть его задержкой. Множество всех пар вида $(f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$, где $f \in P_k$, $t = 0, 1, 2, \dots$ обозначим через P_k'. пару (f, t) будем называть функцией k-значной логики f с задержкой t. В P_k вводятся индуктивно операции синхронной суперпозиции и понятия замыкания и замкнутого класса относительно операции синхронной суперпозиции.

Операцию синхронной суперпозиции здесь выразим через операции на множестве функций с задержками, аналогично операциям на множестве функций алгебры логики, предложеным А.И. Мальцевым. Операции Мальцева ζ, τ, Δ и ∇ определим так. Пусть $(f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$ функция

AMS Subject Classification (1980): Primary 68E99.

Список литературы находится на стр. 134.

с задержкой, тогда

$$((\zeta f)(x_1, x_2, \dots, x_n), t) = (f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1), t), \tag{1}$$
$$((\tau f)(x_1, x_2, \dots, x_n), t) = (f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n), t), \tag{2}$$
$$((\Delta f)(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), t) = (f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), t), \tag{3}$$
$$((\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), t) = (f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}), t). \tag{4}$$

Операцию (5) вводим следуюыим образом. Пусть заданы пары: $(f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$, $(g_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m_1}), t_1), \dots, (g_n(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm_n}), t_1)$, тогда

$$\begin{aligned}&(f(g_1 \times \dots \times g_n), t + t_1)\\ &\quad = (f(g_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m_1}), \dots, g_n(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm_n})), t + t_1).\end{aligned}$$

Под алгеброй функций с задержками будем понимать множество функций с задержками замкнутое относительно операции (1) – (5).

Определение 1. Пусть $N_1 = \{0\} \cup N$ множество натуральных чисел и нуля и M некоторое множество m-арних отошений на E_k. Функцию $R : N_1 \to M$ будем называть m-арним временным отношением на E_k.

Это значит, что временное отношение можно записать так:

$$R = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), (2, \rho_2), \dots, (i, \rho_i), \dots\} \text{ где } (\forall i \in N_1)(\rho_i \in E_k^m).$$

Определение 2. Будем говорить, что функция с задержкой: $(f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$ стабилизирует временное отношение R, или что R устойчиво для каждого $(i, \rho_i) \in R$ существует $(j, \rho_j) \in R$ так, что для любого набора $(\hat\beta_1, \hat\beta_2, \dots, \hat\beta_n)$ точек из ρ_i, $f(\hat\beta_1, \hat\beta_2, \dots, \hat\beta_n)$ принадлежит ρ_j и кроме того $j = i + t$, т.е. если

$$f(\rho_i, \rho_i, \dots, \rho_i) \subseteq \rho_j \quad \text{и} \quad j = i + t, \tag{$*$}$$

где $f(\rho_i, \rho_i, \dots, \rho_i) = \{f(\hat\beta_1, \hat\beta_2, \dots, \hat\beta_n) \mid (\hat\beta_1, \hat\beta_2, \dots, \hat\beta_n) \in \rho_i^n\}$.

Напомним, что под $f(\hat\beta_1, \hat\beta_2, \dots, \hat\beta_n)$ понимается точка арности m, i-ая координата которой равна значению функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от i-ых координат точек $\hat\beta_1, \hat\beta_2, \dots, \hat\beta_n$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.

В случае когда функция с задержкой (f, t) выполняет $(*)$, будем говорить, что она погружает пару (i, ρ_i) в пару (j, ρ_j).

Определение 3. Множество функций с задержками $\mathcal{F}$ стабилизирует временное отношение R, если каждая функция из $\mathcal{F}$ стабилизирует временное отношение R.

Определение 4. Множество функций с задержками $\mathcal{F}$ стабилизирует множество временных отношений $\mathcal{R}$, если каждая функция стабилизирует каждое отношение из $\mathcal{R}$.

Ввдём понятие диагонального временного отношения.

Определение 5. Пусть $\sim$ отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. Будем говорить что $D(\sim) = \{(0, \rho_0), (1, \rho_1), \ldots, (i, \rho_i), \ldots\}$ является диагональним временным отношением относительно заданного отношения эквивалентности $\sim$, если для всякого $i \in \{0\} \cup N$, отношение ρ_i является диагональным отношением относительно отношения эквивалентности $\sim$.

Напомним, что m-арное отношение ρ на E_k является диагональным отношением относительно отношения эквивалентности $\sim$ на $\{1, 2, \ldots, m\}$ если

$$\rho = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_m) \mid (\forall j, k)(((j, k \in \{1, 2, \ldots, m\})\&(j \sim k)) \\ \Rightarrow (\alpha_j = \alpha_k))\}.$$

Легко проверяются следующие основные свойства понятия стабилизирования.

1. Каждая селекторная функция с нулевой задержкой стабилизирует каждое временное отношение.

2. Каждая функция с задержкой стабилизирует каждое диагональное временное отношение.

Лемма 1. *Если функция с задержкой (f, t) стабилизирует временное отношение R, то функции $(\zeta f, t)$, $(\tau f, t)$, $(\Delta f, t)$, $(\nabla f, t)$ получающиеся из (f, t) применением операций* $(1) - (4)$, *также стабилизирыют временное отношенне R.*

Доказательство. Покажем, на пример, что это верно для функции $(\zeta f, t)$. Пусть $(p, \rho_p) \in R$ и $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}) \in \rho_p$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$(\zeta f)((\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}), (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}), \ldots, (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn})) \\ ((\zeta f)(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), (\zeta f)(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}), \ldots, (\zeta f)(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{mn})) \\ = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m).$$

Так как $(\zeta f)((\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) = f(\alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \ldots, \alpha_{in}, \alpha_{i1}) = \beta_i (i = 1, \ldots, m)$ и функция (f, t) стабилизирует временное отношение R, то $\exists (p + t, \rho_{p+t}) \in R$ так, что $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \in \rho_{p+t}$, откуда следует, что и функция $(\zeta f, t)$ погружает пару (p, ρ_p) в пару $(p + t, \rho_{p+t}$, откуда следует, что и функция $(\zeta f, t)$ погружает пару (p, ρ_p) в пару $(p + t, \rho_{p+t})$. Лемма доказана.

Ламма 2. *Если функции $(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), t)$, $(g_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m_1}), t_1)$, $(g_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m_2}), t_1), \ldots,$ $(g_n(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm_n}), t_1)$ стабилизируют временное отношение R, тогда и функция $(f(g_1 \times g_2 \times \cdot s \times g_n), t + t_1)$ стабилизирует отношение R.*

Доказательство. Пусть $(p,\rho_p)\in R$. Покажем, что в R существует пара (q,p_q), такая, что функция $(f(g_1\times g_2\times\cdot s\times g_n),t+t_1)$ погружает пару (p,ρ_p) в пару (q,ρ_q). Пусть

$$\begin{array}{ll}(\alpha^1_{1j_1},\alpha^2_{1j_1},\ldots,\alpha^m_{1j_1})\in\rho_p & (j_1=1,2,\ldots,m_1)\\ (\alpha^1_{2j_2},\alpha^2_{2j_2},\ldots,\alpha^m_{2j_2})\in\rho_p & (j_2=1,2,\ldots,m_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\alpha^1_{nj_n},\alpha^2_{nj_n},\ldots,\alpha^m_{nj_n})\in\rho_p & (j_n=1,2,\ldots,m_n).\end{array}$$

Положим

$$\begin{array}{ll}b^i_1=g_1(\alpha^i_{11},\alpha^i_{12},\ldots,\alpha^i_{1m_1}), & \\ b^i_2=g_2(\alpha^i_{21},\alpha^i_{22},\ldots,\alpha^i_{2m_2}), & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b^i_n=g_n(\alpha^i_{n1},\alpha^i_{n2},\ldots,\alpha^i_{nm_n}), & (i=1,2,\ldots,m).\end{array}$$

Так как функции (g_1,t_1), $(g_2,t_1),\ldots,$ (g_n,t_1) стабилизируют временное отношение R, то в R существует пара $(p+t_1,\rho_{p+t_1})$ такая, что $(b^1_s,b^2_s,\ldots,b^m_s)\in\rho_{p+t_1}$ $(s=1,2,\ldots,n)$. Положим $c^q=f(b^q_1,b^q_2,\ldots,b^q_n)$ $(q=1,2,\ldots,m)$. Так как функция $(f(x_1,x_2,\ldots,x_n),t)$ стабилизирует отношение R, то существует пара $(p+t_1+t,\rho_{p+t_1+t})$ такая, что $(c^1,c^2,\ldots,c^m)\in\rho_{p+t_1+t}$.

Ясно, что

$$c^q=f(g_1(\alpha^q_{11},\alpha^q_{12},\ldots,\alpha^q_{1m_1}),g_2(\alpha^q_{21},\alpha^q_{22},\ldots,\alpha^q_{2m_2}),\ldots,g_n(\alpha^q_{n_1},\alpha^q_{n_2},\ldots,\alpha^q_{nm_n}))$$

$(q=1,2,\ldots,m)$, откуда и следует, что $(f(g_1\times g_2\times\cdot s\times g_n),t+t_1)$ стабилизирует отношение R, что и требовалось доказать.

Таким образом, совокупность всех функций с задержками на E_k, стабилизирующих некоторое данное временное отношение R на E_k, образует замкнутый класс, т.е. алгебру на E_k, которую мы будем называть алгеброй полиморфизмов временного отношения R и обозначать $\mathcal{P}(R)$. Очевидно,

$$\mathcal{P}(R)=\bigcup_{d=0}^{\infty}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}(\rho_i,\rho_{i+d}\right),$$

где $\mathcal{P}(\rho_i,\rho_{i+d})$ обозначает множество всех функций с задержками которые погружают пару (i,ρ_i) в пару $(i+d,\rho_{i+d})(i=0,1,2,\ldots;\ d=0,1,2,\ldots)$.

Пусть $\mathcal{R}=\{R_i\}$ некоторое множество временных отношений на E_k, тогда множество всех полиморфизмов множества $\mathcal{R}$ является алгеброй. Очевидно, $\mathcal{P}(\mathcal{R})=\cap\mathcal{P}(R_i)$.

Пусть $\mathcal{F}$ множество функций с задержками на E_k. Совокупност всех отношений на E_k, устойчивых для всех функций из $\mathcal{F}$, будем называть множеством инвариантов $\mathcal{F}$ и обозначать через $\mathcal{J}(\mathcal{F})$. Множество $\mathcal{J}(\mathcal{F})$ непустое при любом $\mathcal{F}$, так как содержит все временные диагоннали. Множество $\mathcal{J}(\mathcal{F})$ также представляет собой алгебру (т.е. коалгебру) относительно операций над отношениями.

Приведем временные отношения которые полностью характеризуют максимальные классы В.Б. Кудрявцева в P_2, для полноты в втором смысле.

1. Классу $L' = \{(f,q) \mid f \in L,\ q = 0,1,2,\dots\}$ соответствует временное отношение

$$R(L') = \{(i,\rho_L) \mid i \in N_1,\ \rho_L = \{(0,0,0,0),\ (0,0,1,1),\ (0,1,0,1),\ (0,1,1,0),\ (1,0,0,1),\ (1,0,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,1)\}\}.$$

2. Классу $M' = \{(f,q) \mid f \in M,\ q = 0,1,2,\dots\}$ соответствует временное отношение

$$R(M') = \{(i,\rho_M) \mid i \in N_1,\ \rho_M = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}.$$

3. Классу $S' = \{(f,q) \mid f \in S,\ q = 0,1,2,\dots\}$ соответствует временное отношение $R(S') = \{(i,\rho_S) \mid i \in N_1,\ \rho_S = \{(0,1),(1,0)\}$.

4. Классу $T_0' = \{(f,q) \mid f \in T_0,\ q = 0,1,2,\dots\}$ соответствует временное отношение $R(T_0') = \{(i,\rho_0) \mid i \in N_1,\ \rho_0 = \{(0)\}\}$.

5. Классу $T_1' = \{(f,q) \mid f \in T_1,\ q = 0,1,2,\dots\}$ соответствует временное отношение $R(T_1') = \{(i,\rho_1) \mid i \in N_1,\ \rho_1 = \{(1)\}\}$.

6. Классу $C' = \{(f,q+1) \mid f \in B,\ q = 0,1,2,\dots\} \cup \{\varphi,q+1) \mid \varphi \in \Gamma,\ q = 0,1,2,\dots\} \cup \{(\psi,0) \mid \psi \in A\}$ соответствует временное отношение $R(C') = \{(0,\rho = \{(0,1)\}),\ (1,\Delta = \{(0,0),(1,1)\}),\ (2,\Delta),\ (3,\Delta),\ \dots\}$.

7. Классу $E_0' = \{(f,0) \mid f in B\} \cup \{(\varphi,0) \mid \varphi \in A\} \cup \{(1,q) \mid q = 0,1,2,\dots\} \cup \cup \{(0,q+1) \mid q = 0,1,2,\dots\}$ соответствует временное отношение $R(E_0') = \{0,\ \rho = (0,1),(1,1)\}),\ (1,\Delta),\ (2,\Delta),\dots\}$.

8. Классу

$$E_1' = \{(f,0) \mid f \in \Gamma\} \cup \{(\varphi,0) \mid \varphi \in A\} \cup \{(1,q+1) \mid q = 0,1,2,\dots\} \cup \{(0,q) \mid q = 0,1,2,\dots\}$$

соответствует временное отношение

$$R(E_1') = \{(0,\rho = \{(0,0),(0,1)\}),\ (1,\Delta),\ (2,\Delta),\dots\}.$$

9. Классу $H' = \{(f,0) \mid f \in S\} \cup \{(\varphi,q+1) \mid \varphi \in Y, q = 0,1,2,\dots\}$ соответствует временное отношение

$$R(H') = \{(0,\ \rho = \{(0,1),(1,0)\}),\ (1,\Delta),\ (2,\Delta),\dots\}.$$

10. Классу

$$W'_r = \{(f, (2q+1)\cdot 2^r) \mid \bar{f} \in M,\ q = 0,1,2,\dots\} \cup \{(0,q) \mid q = 0,1,2,\dots\}$$
$$\cup\, \{(1,q) \mid q = 0,1,2,\dots\} \cup \{(\varphi, (2q+1)\cdot 2^s) \mid \varphi \in M,\ s = r+1, r+2, \dots;$$
$$q = 0,1,2,\dots\} \cup \{(\psi, 0) \mid \psi \in M\}(r = 0,1,2,\dots)$$

соответствует временное отношение
$R(W'_r) = \{(i, \rho_i) \mid i \in N_1$, если $i = 2^r\cdot(2q)$, $q = 0,1,2,\dots$, то $\rho_i = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, если $i = 2^r\cdot(2q+1)$, $q = 0,1,2,\dots$, то $\rho_i = \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$, если $i \neq l\cdot 2^r$, $l = 0,1,2,\dots$, то $\rho_i = \{(0,0),(1,1)\}$.

Например, для $r = 2$:

$$R(W'_2) = \{(0,\rho),(1,\Delta),(2,\Delta),(3,\Delta),(4,\rho^{-1}),(5,\Delta),(6,\Delta),(7,\Delta),(8,\rho),$$
$$(9,\Delta),(10,\Delta),(11,\Delta),(12,\rho^{-1}),\dots\}$$

где $\rho = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $\Delta = \{(0,0),(1,1)\}$.

11. Классу

$$Z'_r = \{f, (2q+1)\cdot 2^r) \mid f \in \Delta,\ q = 0,1,2,\dots\} \cup \{(\varphi, (2q+1)\cdot 2^s \mid \varphi \in A,$$
$$s = r+1, r+2, \dots;\ q = 0,1,2,\dots\} \cup \{(\psi, 0) \mid \psi \in A\}, (r = 0,1,2,\dots)$$

соответствует временное отношение
$R(Z'_r) = \{(i,\rho_i) i \in N_1$ и если $i = 2^r\cdot(2q)$, $q = 0,1,2,\dots$, то $\rho_i = \{(0,1)\}$, если $i = 2^r\cdot(2q+1)$, $q = 0,1,2,\dots$, то $\rho_i = \{(1,0)\}$, если $i \neq l\cdot 2^r$, $l = 0,1,2,\dots$, то $\rho_i = \emptyset\}$.

Например, для $r = 2$:

$$wR(Z'_2) = \{(0,\rho),(1,\emptyset),(2,\emptyset),(3,\emptyset),(4,\rho^{-1}),(5,\emptyset),(6,\emptyset),(7,\emptyset),$$
$$(8,\rho),(9,\emptyset),(10,\emptyset),(11,\emptyset),(12,\rho^{-1}),\dots\}$$

где $\rho = \{(0,1)\}$.