PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 38 (52), 1985, pp. 153–156

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖАЩИХ КЛАССАМ БЕСОВА

Мухарем Бериша

Резюме. В этой работе определены достаточные условия которым должны удовлетворять коэффициенты Фурье функции $f(x)$ чтобы она принадлежала классу $B(p, \theta, \alpha)$.

0. В работе [**1**] были получены необходимые и достаточные условия (в терминах коэффициентов Фурье) для принадлежности четных функций с монотонными коэффициентами Фурье классам функций типа Бесова.

В работе [**2**] были определены необходимые условия которые должны удовлетворять коэффициенты Фурье чтобы функция принадлежала классу $B(p, \theta, k, \alpha)$.

В настоящей работе указаны достаточные условия которым должны удовлетворять коэффициенты Фурье чтобы в общем случае функция

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i\nu x) \text{ где } c_\nu = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-i\nu t) dt,$$

принадлежала классу $B(p, \theta, \alpha)$. В данном случае функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию:

$$(*) \qquad \int_0^\delta \alpha(t) t^\sigma \, dt \le C\delta^\sigma \int_0^{2\delta} \alpha(t) dt$$

для всех $\delta \in (0, \delta_0)$.

Отметим, что в настоящей работе утверждения доказываюця при помощи наилучих приближений.

Необходимые определения смотри в работе [**2**].

AMS Subject Classification (1980): Primary 42A32.

1. Через $E_n(f)_p$ обозначим наилучше приближение функции $f(x)$ в метрике L_p при помощи тригонометрических полиномов не выше чем n, т.е.

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n} \|f(x) - T_n(x)\|_p$$

Будем говорить что некоторая функция $\alpha(t)$ есть функция типа σ, если она измерима на $[0,1]$, суммируема на $[\delta,1]$ для любого $\delta \in (0,1)$ и если существуют действительные числа $\sigma, \delta > 0$ и число $\delta_0 \in (0,1)$ такие что:

1. $\alpha(t) \geq C$ для всех $t \in [0,1]$
2. $\int_0^\delta \alpha(t)t^s dt < \infty$ для всех $s < \sigma$ и $\delta \in (0,\delta_0)$
3. $\int_0^\delta \alpha(t)t^s dt = \infty$ для всех $s < \sigma$ и $\delta \in (0,\delta_0)$.

Будем говорить, что $f(x) \in B(p,\theta,\alpha)$ если:

1. $f(x) \in L_p$, для некоторого p из промежутка $1 \leq p \leq \infty$
2. θ некоторое число из промежутка $0 < \theta < \infty$
3. $\alpha(t)$ функция типа σ
4. $I = \int_0^1 \alpha(t)\omega_k^0(f,t)_p dt < \infty$,

где k некоторое натуральное число удовлетворящее $k > \sigma/\theta$. Условие $k\theta > \sigma$ гарантирует, что класс $B(p,\theta,\alpha)$ састоит не только из констант [**5**].

Для доказательства основных результов работы нам понадобяця следующие леммы

Лемма 1. [**5**] *Пусть $f(x) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \theta < \infty$ и $\alpha(t)$ функция типа σ, тогда для любого натурального числа k удовлетворящего $k < \sigma/\theta$ справедливо неравенство:*

$$\int_0^1 \alpha(t)\omega_k^0(f,t)_p dt \leq C_1\{E_0^\theta(t)_p + E_1^0(t)_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{2^\nu}^\theta(f)_p\}$$

где C_1 не зависит от $f(x)$ и

$$\mu(\nu) = \int\limits_{1/2^\nu}^{2/2^\nu} \alpha(t)dt, \quad \nu \geq 1, \;\; \mu(0) = 1.$$

Лемма 2. [**4**, Т. 19, стр. 43] *Пусть числа α, β и a_ν таковы, что $a_\nu \geq 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, тогда справедливо неравенство:*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\beta\right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

Лемма 3. [**7**] *Пусть числа a_ν, b_ν и γ_ν таковы, что $a_\nu \geq 0$, $b_\nu \geq 0$ и $\sum_1^\infty a_\nu = a_n\gamma_n$, тогда для p из промежутка $1 \leq p < \infty$ справедливо неравенство:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} b^\mu\right)^p \leq p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu\gamma_\nu)^p$$

2. Теорема 1. *Для того чтобы периодическая функция*

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i\nu x)$$

принадлежала классу $B(p,\theta,\alpha)$ при $2 \le p \le \infty$, достаточно чтобы её коэффициенты Фурье удовлетворяли следующим условиям:

для $\theta \le p$:
$$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) < \infty$$

для $\theta \ge p$:
$$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) \{b(|\nu|)/A(|\nu|)\}^{\theta/p-1} < \infty$$

где
$$A_\nu = \int_{1/\nu+1}^{1/\nu} \alpha(t)dt \;\; и \;\; b_\nu = \int_{1/\nu+1}^{1} \alpha(t)dt$$

Доказательство . Используя лемму 1 и неравенство [**3**]:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{2^\nu}^\theta (f)_p \le C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_\nu^\theta (f)_p$$

имеем $I \le C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_\nu^\theta (f)_p$.

Для $p \ge 2$ имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_\nu^\theta (f) \le C - 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(|\nu|) \left(\sum_{|n|=\nu}^{\infty} |c_n|^p |n|^{p-2} \right)^{\theta/p} .$$

Если $\theta \le p$, тогда применяя лемму 2 имеем:

$$I \le C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_n|^\theta |n|^{\theta-2\theta/p} \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_n|^\theta |n|^{\theta-2\theta/p} b(|n|).$$

Если $\theta \ge p$, тогда применяя лемму 3 имеем:

$$I \le C_6 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(|\nu|) [\gamma(|\nu|) |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}]^{\theta/p}$$

где $b(n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) = A(n)\gamma(n)$. Значит,

$$I \le C_7 \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta |\nu|^{\theta-2\theta/p} b(|\nu|) \{b(|\nu|)/A(|\nu|)\}^{\theta/p-1}.$$

Теорема 2. *Для того чтобы периодическая функция*

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikx)$$

принадлежала классу $B(p,\theta,\alpha)$ при $1 < p \leq 2$ достаточно чтобы её коэффициенты Фурье удовлетворяли следующим условиям:

для $\theta \leq 2$
$$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_n|^\theta b(|n|) < \infty$$

для $\theta \geq 2$
$$\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_n|^\theta b(|n|)\{b(|n|)/A(|n|)\}^{\theta/2-1} < \infty$$

Доказательство. Пусть $1 < p \leq 2$, тогда очевидно, что

$$E_n(f)_p \leq C_8 E_n(f)_2$$

На основании равенства Парсеваля следует

$$I \leq C_9 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E_\nu^\theta \leq C_{10} \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left(\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{\theta/2}.$$

Если $\theta \leq 2$, применяя лемму 2 имеем:

$$I \leq C_{11} \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \left(\sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_n|^\theta \right) = C_{11} \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_n|^\theta \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) =$$
$$= C_{11} \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_n|^\theta b(|n).$$

Если $\theta \geq 2$, тогда на основании леммы 3 имеем:

$$I \leq C_{12} \sum_{|\nu|=1}^{\infty} A(\nu)[\gamma(|\nu|)|c_\nu|^2]^{\theta/2} =$$
$$= \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta A^{1-\theta/2}(|\nu|) b^{\theta/2}(|n|) =$$
$$= \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu|^\theta b(|\nu|)\{b(|\nu|)/A(|\nu|)^{\theta/2-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Бериша, *О коэфициентах Фурье некоторых классов функций*, Glasnik Mat. **16(36)** (1981, 75–90.

[2] М. Бериша, *Необходимые условия коэффициентов Фурье периодических функций принадлежащих $B(p, \theta, k, \alpha)$ классам типа Бесова*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) **35**(**49**)(1984), 87–91.

[3] М. Бериша, *О коэфициентах Фурье периодических функций принадлежащих $B(p, \theta, k, \alpha)$ – классам*, Mat. Balkanica, (в печти).

[4] Г.Б. Харди, Д.Е. Литьвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ГИИЛ Москва, 1984.

[5] К.М. Потапов, *О вложении и совпадении некоторых классов функций*, Изв. АН СССР **4**(1969), 840–860.

[6] К.М. Потапов, *Об одной теореме вложения*, Matematica (Cluj), **14**(**37**)(1972), 123–146.

Природно-математички факултет
38000 Приштина
Југославија

(Поступила 28 09 1984)